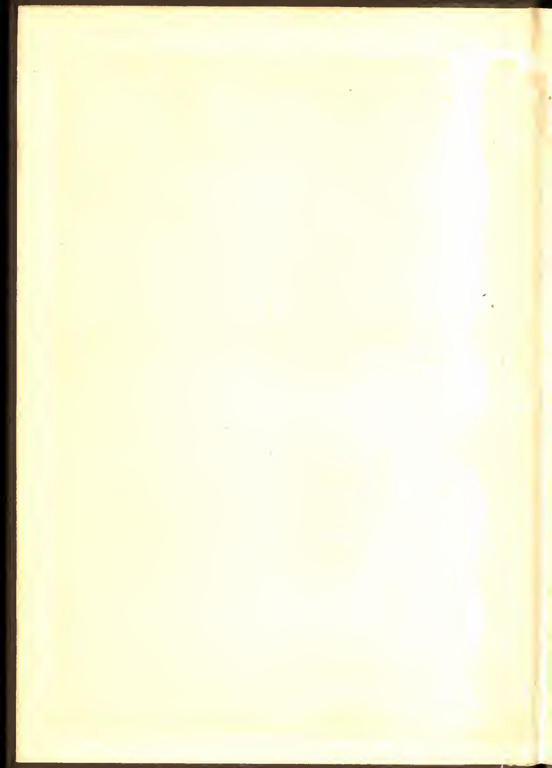


В.П. СИГОРСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИНЖЕНЕРА









На современном этапе
технической революции
все большее значение
приобретают вопросы
научной организации труда
и управления,
экономики
промышленного производства,
автоматизации
технологических процессов
с применением
электронных вычислительных машин,
психологии труда и др.
Сегодня каждый инженер,
независимо
от его узкой специализации,
должен не только владеть
основами знаний в этих отраслях,
но и быть информированным
о последних достижениях в них.
Именно эти вопросы
определяют тематику
«Библиотеки инженера»

Издательство «Техніка»
Киев
1975

В. П. СИГОРСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИНЖЕНЕРА

518
С-35

УДК 51 : 62

Математический аппарат инженера. Сигорский В. П. «Техніка», 1975, 768 с.

Излагаются практически важные разделы аппарата современной математики, которые используются в инженерном деле: множества, матрицы, графы, логика, вероятности. Теоретический материал иллюстрируется примерами из различных отраслей техники.
Предназначена для инженерно-технических работников и может быть полезна студентам вузов соответствующих специальностей.
Табл. 10, ил. 301, библиогр. 153.

Рецензенты: чл.-кор. АН УССР *В. С. Королюк,* д-р техн. наук *П. И. Чинаев*

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи

Заведующий редакцией инж. *З. В. Божко*

15179
Техническая
БИБЛИОТЕКА

С $\frac{20204-234}{М202(04)-75}$ 31-75

© Издательство «Техніка», 1975 г.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня трудно назвать область науки, промышленности и народного хозяйства, где бы не использовались математические модели. Это стало возможным благодаря совместным усилиям математиков, работавших в абстрактных областях, казавшихся вне приложений, и физиков-инженеров, и прежде всего радиотехников.

М. А. Лаврентьев

Эта глава начинается с рассмотрения общих вопросов применения математики в инженерном деле. Математический аппарат инженера определяется как взаимосвязанная совокупность языка, моделей и методов математики, ориентированная на решение инженерных задач. Цель настоящей книги — помочь инженеру в освоении некоторых практически важных разделов математического аппарата, пока еще не нашедших должного отражения в вузовском курсе высшей математики.

Основное внимание уделяется множествам, матрицам, графам, логике и вероятностям. Все эти разделы тесно связаны между собой, поэтому во вводной главе приведены краткие сведения по каждому из них, которые затем используются при более глубоком изложении материала. Внутренние ссылки даются тремя цифрами в скобках, означающими соответственно номера главы, параграфа, пункта. При ссылках на материал внутри главы ее номер опускается, а в пределах параграфа ссылка содержит только номер пункта.

При изучении вводной главы важно понять смысл основных определений, привыкнуть к соответствующей символике, научиться выполнять простейшие операции над математическими объектами. Этой цели должны способствовать приведенные в конце каждого параграфа задачи и упражнения, решение которых позволит закрепить и расширить изложенный материал. Даже если читатель отложит изучение специальных глав на будущее, то и тогда материал вводной главы может пригодиться при чтении специальной литературы и справочных пособий. Разумеется, каждый читатель в зависимости от его подготовки и целей наметит свой подход к использованию книги.

В конце каждой главы приведен краткий обзор литературы, который включает монографии и учебные пособия, использованные при подготовке этой книги и рекомендуемые для более глубокого изучения затронутых в ней вопросов.

1. МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРНОМ ДЕЛЕ

1. Взаимодействие математики и техники. Технические науки развиваются в тесном взаимодействии и сотрудничестве с математикой. Это проявляется, с одной стороны, в использовании математического аппарата для решения научно-технических задач. С другой стороны, инженерная практика в значительной мере ориентирует и стимулирует развитие самой математики. Можно привести множество примеров, иллюстрирующих это положение.

Исследование различных типов дифференциальных уравнений с самого начала тесно связывалось с решением технических и физических проблем. Метод наименьших квадратов, ставший одним из эффективных средств обработки результатов наблюдений, возник из потребностей геодезической практики. Начертательная геометрия развилась под влиянием строительного дела, архитектуры и механики. Огромный арсенал численных методов сформировался и продолжает развиваться благодаря практическим потребностям.

Взаимодействие математических и прикладных дисциплин приводит к их взаимному обогащению, причем этот процесс носит двусторонний характер. Нередко идеи и методы, разработанные для решения частных задач в какой-либо конкретной области, приобретают в процессе развития столь общее значение, что их строгое обоснование становится делом математиков. Те идеи и методы, которые выдерживают всесторонние и подчас весьма длительные испытания, развиваются в математические теории, обслуживая затем более широкий класс задач, чем те, из которых они возникли.

Характерным примером в этом отношении является теория вероятностей, для оформления которой как раздела математики понадобилось несколько столетий, считая от первых попыток найти закономерности в азартных играх. Операционное исчисление, разработанное на интуитивном уровне в конце прошлого века для расчета электрических цепей, испытало на себе все превратности судьбы, но затем получило строгое обоснование и нашло свое место в теории интегральных преобразований.

Можно привести много других примеров, когда математические теории, возникающие и развивающиеся из внутренних

потребностей математики, находят затем широкое практическое применение в других отраслях науки и техники. Так обстояло дело, например, с математической логикой, аппарат которой стал одним из основных средств проектирования автоматов и моделирования дискретных систем. Неэвклидовы геометрии, служившие первоначально целям аксиоматического обоснования математики, нашли применение при конструировании самолетов и ракет. Теория электромагнитных волн была разработана за несколько десятилетий до их обнаружения и практического использования.

В результате взаимодействия математики и техники возникают и успешно развиваются новые прикладные науки. Так, на стыке теории вероятностей с техникой связи и передачи сообщений возникла теория информации, методы которой используются не только в технике, но и в экономике, лингвистике, биологии. Под влиянием и при непосредственном участии математики развиваются такие общие науки как кибернетика, теория цепей и систем.

Одним из наиболее эффективных результатов взаимодействия математики и техники явилось создание современных вычислительных машин. Симбиоз математических методов и технических средств электроники, магнитной техники, прикладной оптики и механики уже весьма высоко зарекомендовал себя в этом отношении и открывает необозримые перспективы в будущем. Развитие вычислительной техники позволяет привести в действие более мощные ресурсы математики и усиливает ее роль как непосредственной производительной силы общества, способствуя тем самым прогрессу самой математики.

2. Современная математика. Наиболее характерной чертой современной математики является чрезвычайно высокая степень обобщения и абстракции. Традиционное определение математики как науки о пространственных формах и количественных отношениях уже не соответствует современному положению вещей, оно приобретает более глубокое и широкое содержание. Предмет современной математики составляют совокупности объектов самого общего вида и любые *возможные отношения* между ними.

Так, трехмерное геометрическое пространство обобщается на любое число измерений, и в этом многомерном пространстве изучаются пространственно подобные отношения (длина, расстояние, ортогональность). Алгебраические операции абстрагируются и распространяются на объекты любой природы, которые образуют различные структуры в зависимости от приписываемых им свойств (группа, кольцо, тело, поле). Под переменными понимаются не только обычные величины, но и функции, которые рассматриваются как объекты функциональных пространств. Изучаемые математикой объекты объединяют совокупности величин, для представления

которых используются такие понятия как множества, матрицы, графы.

Математика развивается как единая наука с присущими ей методами. Но в зависимости от точки зрения на ее предмет математику подразделяют на содержательную математику, формальную математику, метаматематику и прикладную математику.

Содержательная математика изучает системы абстрактных объектов, наделенных конкретным содержанием и называемых *конструктами*. Конструкты являются результатом идеализации материальных объектов и вводятся путем определения их свойств, которые постулируются или доказываются на основе принятых ранее определений других объектов. Например, точка рассматривается как то, что не имеет частей, линия — как то, что имеет только длину, параллельность — как такое свойство прямых, что, находясь в одной плоскости и будучи продолжены неограниченно в обе стороны, они нигде не встречаются. Содержательный смысл таких объектов вытекает из их описания.

Формальная математика отвлекается от конкретной природы объектов и сосредоточивает свое внимание на отношениях в чистом виде (например, отношение параллельности не связывается с понятием линии). Первоначально вводится совокупность символов (алфавит), которые различаются только по форме, а также задаются правила построения из этих символов терминов и предложений. Исходные положения формальной теории (аксиомы) принимаются в виде предложений, в которые входят определяемые термины. Из этих предложений на основе установленных правил преобразования выводятся другие предложения (теоремы) данной теории.

Метаматематика изучает формализованные теории как системы терминов и предложений. Объектами исследования метаматематики являются конечные последовательности (строчки) символов с операциями, которые представляют термины и предложения (в том числе аксиомы и теоремы). Метаматематику можно считать содержательной наукой, если системы символов рассматривать как материальные объекты.

Прикладная математика включает математические теории, проблемно-ориентированные на изучение явлений природы и общества. Такая ориентация осуществляется путем истолкования объектов формальных и содержательных теорий в категориях реального мира (эмпирическая интерпретация). Например, связывая понятия точки, линии, параллельности (или соответствующие им символы и термины) с объектами и отношениями физического пространства, приходим к прикладной (эмпирической) теории, которая обслуживает проблематику соответствующей области. Одна и та же математическая теория, получая различные интерпретации, может явиться основой для построения многих прикладных теорий.

Так, двузначная логика интерпретируется в технике как теория контактных и логических схем, а в науке о мышлении — как исчисление высказываний.

В отличие от прикладной математики, остальные математические теории часто относят к «чистой» математике. Однако между чистой и прикладной математикой невозможно провести четкую грань, да в этом и нет потребности. Ясно, что чисто математическая теория при определенных условиях может получить эмпирическую интерпретацию и стать основой для прикладной теории. В то же время теория, зародившаяся в недрах прикладных наук, может заслужить право на обобщение до уровня чисто математической теории.

3. Инженерное дело. Слово *инженер* происходит от латинского ingenium, что означает способность, изобретательность. Инженерное дело развивалось из ремесел, во все времена инженер что-то изобретал и сооружал. В современных условиях деятельность инженера по существу сводится к тому же, но она становится все более разнообразной по форме и содержанию. В процессе развития и сближения прикладных и фундаментальных наук высшие формы инженерного дела приобретают характер научно-исследовательской работы.

Инженерное дело характеризуется чрезвычайно широкой сферой приложения. Инженер может быть занят непосредственно в производстве, в проектной или научно-исследовательской организации, в государственных органах управления. Он может работать на вычислительном центре, на борту океанского лайнера или самолета. При этом круг его обязанностей в различной степени связан с производственной, конструкторской, исследовательской или административной деятельностью.

Наряду с расширением сферы приложения инженерного дела, усиливается его специализация. Вследствие развития производства и прикладных наук происходит расщепление традиционных специальностей, появляются новые. Так, перечень специальностей и специализаций, по которым ведется подготовка инженеров в вузах нашей страны, содержит более 500 названий.

Будучи специалистом в узкой области, инженер должен быть подготовлен к сотрудничеству и взаимопониманию с представителями других областей науки и техники, что совершенно необходимо в условиях современного производства, при разработке сложных технических проектов или проведении научных исследований. Ясно, что такая подготовка может быть достигнута только на прочном фундаменте естественных и математических наук.

Несмотря на большое разнообразие конкретных форм инженерной деятельности, центральное место в ней занимают процессы *обработки данных* и *принятия решений*. В условиях производства такими данными являются сведения о ходе технологических

процессов, результаты контроля выпускаемой продукции, технико-экономические показатели работы участка, цеха, предприятия. На основе анализа этих данных принимают решения, направленные на совершенствование технологии, увеличение производительности труда и повышение качества выпускаемой продукции. Принятие решений при проектировании основывается на анализе технических условий путем расщепления сложной задачи на более простые, использовании научно-технического опыта при теоретической и экспериментальной проверке выдвигаемых гипотез, всестороннем учете возможностей и ограничений технологии, экономических, социальных и психологических факторов. Участие в научных исследованиях возлагает на инженера принятие решений, направленных на обеспечение надежного функционирования технических средств и получение достоверных данных об исследуемых объектах. Инженеры участвуют также в планировании эксперимента, обработке данных и сформлении научных результатов.

Процессы обработки данных и принятия решений требуют привлечения математических методов и вычислительных средств, уровень которых зависит от сложности решаемых задач. Разумеется, успех дела в значительной мере определяется личными качествами инженера, его профессиональной и теоретической подготовкой. Важнейшую роль в этом отношении играет умение инженера выбрать соответствующий его задаче математический аппарат и наиболее эффективно использовать его для получения требуемого результата.

4. Математический аппарат инженера. По словам академика А. Н. Крылова, математика для инженера есть инструмент такой же, как штангенциркуль, зубило, напильник для слесаря. Инженер должен по своей специальности уметь владеть инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать, подобно тому, как слесарь не должен сам насекать напильник, но зато — уметь выбрать тот напильник, который ему нужен.

К математическому аппарату инженера можно отнести все то из математики, что используется в инженерном деле. В каждой конкретной области основу математического аппарата составляют математические теории, интерпретированные на совокупности объектов из данной области. Для математика такая интерпретация идет от теории к реальным системам, иллюстрирующим практичность теории и представляющим интерес как область ее приложения. Для инженера исходной является реальная система, при проектировании или исследовании которой он должен найти и использовать подходящую или, как говорят, *адекватную* математическую теорию. После эмпирической интерпретации адекватная математическая теория приспосабливается к решению задач данной конкретной области и развивается как прикладная.

Ясно, что для поиска и понимания математических теорий необходимо, прежде всего, знать *язык математики*. Без этого невозможно ни чтение математической литературы, ни общение с математиками. Более того, язык математики все больше проникает в прикладные области и широко используется в специальной литературе, т. е. в значительной мере становится и языком инженера.

Необходимым этапом на пути к адекватной теории является идеализация реальной системы в соответствии с поставленной задачей исследования или проектирования. Свойства идеализированной системы абстрагируются и отождествляются со свойствами математических объектов, в результате чего приходим к тому, что называют *математической моделью* системы.

Замена реальной системы соответствующей моделью позволяет использовать для ее исследования *методы* адекватной математической теории. В рамках прикладной теории эти методы, как правило, получают дальнейшее развитие в соответствии с характером решаемых задач и интерпретируются в терминах реальных объектов.

Итак, *математический аппарат инженера можно определить как взаимосвязанную совокупность языка, моделей и методов математики, ориентированную на решение инженерных задач.*

5. Язык математики. В математике, как и в других науках, наряду с естественными языками, используются искусственные языки, формализация которых достигает такого уровня, что при некоторых условиях саму математику рассматривают как специально организованный язык (формальная математика).

Естественные языки служат средством связи в человеческом обществе, на них говорят и пишут в повседневной жизни. В мире существует несколько тысяч различных языков и диалектов и всем им присущи некоторые общие черты. Такие сильные стороны естественных языков, как универсальность и выразительность, проявляются в их способности выразить любые человеческие чувства и знания. В то же время фразеологическая громоздкость, неоднозначность слов и неточность грамматики затрудняют использование естественных языков в научных целях.

Присущие естественным языкам недостатки устраняют построением *формального языка*, словарем которого служит система символов, обозначающих математические объекты и переменные, а также операции над объектами и отношения между ними. Формулы и любая совокупность символов, отвечающая определенным требованиям, играют роль предложений такого языка. Важнейшая особенность формального языка математики состоит в том, что переход от одних формул к другим совершается по строго определенным правилам, не допускающим двусмысленного толкования.

Естественные и формальные языки взаимно дополняют друг друга и каждый из них используется по своему назначению. На естественных языках осуществляется часть рассуждений, даются дополнительные пояснения, обсуждаются полученные результаты и т. п. Кроме того, естественный язык играет роль *метаязыка*, при помощи которого задаются свойства и правила (синтаксис) формального языка и вводятся содержательные определения объектов.

Следует признать, что в специальной технической литературе элементы формального языка математики нередко употребляются без особой надобности, когда то же самое можно выразить достаточно строго и лаконично на естественном языке. Это происходит либо в силу привычки, если автором является математик, либо из стремления придать изложению внешнюю солидность. Подобная мнимая математизация, не внося ничего полезного, создает излишние барьеры для понимания существа дела и обмена информацией.

Применение формального языка математики оправдано всегда, если речь идет о сложных вещах, изложение которых на естественном языке требует синтаксически сложных предложений и может привести к неточному их толкованию. Важно также и то, что работа с формальными языками развивает способности к логическому мышлению в любой прикладной области.

6. Математические модели. Реальные объекты, с которыми имеет дело инженер, обладают бесконечным множеством свойств и характеризуются бесконечным множеством связей как внутри самого объекта, так и вне его (связи с другими объектами и окружающей средой). Переход к соответствующим моделям является наиболее сложным и ответственным этапом применения математического аппарата в инженерном деле. В значительной мере успешное решение этой задачи определяется опытом и интуицией специалиста в данной конкретной области. В то же время можно указать и ряд общих требований, которые обычно предъявляются к математической модели: достаточная точность, предельная простота и стандартная форма.

Обеспечить достаточную точность модели — это значит учесть при идеализации реального объекта все существенные свойства и связи, отвлекаясь от второстепенных, несущественных свойств и связей. Решение этого вопроса зависит не только от характера самого объекта, но и от поставленной задачи. Поэтому для одного и того же объекта может потребоваться не одна, а несколько моделей, обслуживающих различные задачи при его проектировании или исследовании. Например, усилительная электронная цепь при определении начального режима описывается нелинейными алгебраическими уравнениями, а в режиме усиления слабых сигналов — линейными дифференциальными уравнениями. Для определения нелинейных искажений такой цепи в ее модели необходимо

учесть нелинейность характеристик электронных ламп или транзисторов.

Представляя реальный объект с достаточной точностью, математическая модель в то же время должна быть по возможности проще, так как дальнейшая работа со сложной моделью не только затруднительна, но может оказаться и практически невозможной. Противоречивость этих требований нередко вынуждает поступиться точностью в интересах простоты, однако такой компромисс допустим только в тех пределах, при которых модель еще отражает существенные свойства реального объекта. Разработка методов упрощения реальных объектов и систем с целью построения предельно простых математических моделей является одной из центральных задач любой прикладной области.

При моделировании реальных объектов целесообразно ориентироваться на математические модели стандартного вида, которые обеспечены соответствующим аппаратом. Физические процессы характеризуются пространственно-временными соотношениями и в общем случае описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Важным методом упрощения модели является представление объекта или совокупности объектов в виде системы таких ее частей (компонентов), связь между которыми можно с достаточной точностью охарактеризовать функциями только одной переменной (времени). В одних случаях этот путь подсказывается самой структурой объекта (например, электронные цепи или системы управления), в других случаях требуется искусственное расчленение объекта на отдельные части (например, балку с распределенной нагрузкой представляют в виде участков с сосредоточенными нагрузками). Если известны модели компонентов в виде некоторых зависимостей относительно их внешних связей, то модель системы можно представить обыкновенными дифференциальными уравнениями. Тем самым осуществляется переход от *модели с распределенными параметрами* к более простой *модели с сосредоточенными параметрами*.

Моделирование компонентов системы само по себе может представлять серьезные трудности, однако эта задача всегда проще, чем рассмотрение системы в целом. Кроме того, несмотря на огромное разнообразие систем, набор различных компонентов весьма ограничен, и их модели, полученные один раз в стандартной форме, могут затем многократно использоваться при моделировании сложных систем. В общем случае модели компонентов характеризуются нелинейными зависимостями. Однако многие задачи допускают их *линеаризацию*, что соответственно сильно упрощает и модели систем, которые в таких случаях описываются линейными уравнениями. Если параметры компонентов можно считать не зависящими от времени, то система представляется *стационарной моделью*

в виде дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Параметры системы и приложенные к ней воздействия можно рассматривать как детерминированные или случайные величины, что приводит соответственно к *детерминированным* или *стохастическим моделям*. Выбор той или иной модели зависит от характера протекающих процессов и поставленной задачи исследования.

Стохастические модели имеют особенно важное значение при исследовании и проектировании больших систем со сложными связями и трудно учитываемыми свойствами. В подобных ситуациях близость математической модели к исходной системе усиливается приданием ей вероятностного или статистического характера, учитывающего существенные свойства и связи, которые не поддаются детерминированному описанию.

Реальные физические процессы протекают в непрерывно изменяющемся времени, которое является аргументом соответствующих им функций. Роль непрерывного аргумента в различных задачах исследования или проектирования могут играть и другие физические величины (расстояние, объем, масса, температура и т. п.). При этом математические модели, типичными представителями которых являются дифференциальные уравнения, также называют *непрерывными*. Однако во многих случаях целесообразно рассматривать состояние системы только для последовательности дискретных значений независимой переменной (времени), отвлекаясь от характера происходящих процессов в промежутках между этими значениями. Этот подход обслуживают различные типы *дискретных моделей*.

Важным типом дискретных моделей являются конечно-разностные дифференциальные уравнения, которые описывают процессы в исследуемой системе относительно конечных (не обязательно равных) приращений независимой переменной. Такая модель представляет собой как бы моментальные фотографии состояний системы, выполненные последовательно через некоторые промежутки времени (или другой независимой переменной). Ясно, что точность моделирования тем выше, чем меньше приращения независимой переменной, но уменьшение интервалов между дискретными значениями неизбежно приводит к увеличению объема вычислений. Представление непрерывных систем дискретными моделями всегда связано с решением вопроса об оптимальном выборе шага дискретности как компромисса между точностью и простотой.

Для многих систем дискретность является основным свойством их функционирования. В некоторые моменты времени происходит переход из одного состояния в другое, последовательность которых представляет наибольший интерес, а процессы между этими состояниями либо отодвигаются на второй план, либо и вовсе не имеют

значения. В таких случаях дискретная модель представляет собой естественное отображение системы в том смысле, что дискретные моменты времени определяются изменением ее состояний. Более того, вместо времени (или другой независимой переменной) можно рассматривать последовательность состояний, различающихся каким-либо признаком. Типичным представителем дискретных моделей этого типа являются, например, *конечные автоматы*.

Для представления математических моделей широко используется аппарат теории множеств, матриц и графов. Соответственно различают *теоретико-множественные*, *матричные* и *топологические модели*. В последнее время в качестве математических моделей реальных объектов находят применение различные алгебраические структуры: группы, кольца, поля и т. п.

7. Математические методы. После того как математическая модель построена, дальнейшая работа состоит в применении соответствующих *математических методов* с целью получения необходимых характеристик данной модели, а значит, и исследуемого реального объекта. Большое разнообразие математических методов можно свести к трем основным видам: *аналитическим*, *графическим* и *численным*.

Получение характеристик модели в *аналитической форме* желательно во многих отношениях. Прежде всего, представляется возможным провести исследование в общем виде, независимо от численных значений параметров системы. Аналитические зависимости позволяют использовать эффективные методы оптимизации и получить соотношения, характеризующие поведение системы при изменении ее параметров. Не менее важно и то, что при подстановке в аналитические выражения численных значений можно контролировать точность вычислений. Однако аналитические методы применимы только для простейших моделей. Так, общее разложение определителя системы шести линейных уравнений содержит сотни членов, а для десяти уравнений число членов определителя может достигать нескольких миллионов. Решения алгебраических уравнений выше четвертой степени в общем случае не представимы в радикалах. Из-за громоздкости аналитических выражений или невозможности их получения значение аналитических методов в инженерной практике сильно ограничивается. В то же время аналитическая форма является основной при изложении и развитии математического аппарата в общем виде.

Графические методы обладают наглядностью и успешно используются как для иллюстрации аналитических методов, так и непосредственно в инженерных расчетах. Они особенно удобны, если не требуется высокая точность или если интерес представляет качественная картина происходящих процессов. Например, графические построения на фазовой плоскости позволяют судить о

характере колебаний в системе, ее устойчивости и т. п. Графические методы используются при решении теоретико-множественных уравнений, минимизации логических функций, статистической обработке результатов наблюдений и во многих других случаях. Инженеры привыкли пользоваться графиками нелинейных характеристик компонентов и протекающих в системах процессов, полученных теоретически или экспериментально. К сожалению, графические методы ограничены возможностями построений на плоскости или в трехмерном пространстве, вследствие чего они применимы только для простых моделей. Особое место занимают методы теории графов, но и они теряют наглядность при усложнении модели. В практике инженерных расчетов графические методы часто используются совместно с аналитическими. В таких случаях их называют *графоаналитическими методами.*

Наиболее общими являются *численные методы*. Схема вычислений задается формулой или совокупностью правил (алгоритмом), выполнение которых в определенном порядке приводит к требуемому результату. В зависимости от характера вычислительного процесса численные методы подразделяются на прямые и итерационные.

При использовании *прямых методов* результат получается путем последовательных операций над числами и его точность зависит исключительно от точности промежуточных вычислений. В *итерационных методах* результат получается путем последовательных приближений, начиная от некоторых начальных значений. Каждое последующее значение *(итерация)* вычисляется по одной и той же схеме, представляющей собой цикл вычислительного процесса. Необходимым условием работоспособности итерационного метода является сходимость последовательности итераций к искомой величине или совокупности величин, т. е. возможность получения результата с требуемой точностью. Практически требуется также достаточная скорость сходимости итерационного процесса, т. е. достижение требуемой точности таким количеством итераций, которое реализуется в данных конкретных условиях. Часто прямые методы называют *точными*, а итерационные — *приближенными*. Однако эти названия не связаны непосредственно с точностью получаемых результатов. Нередко, как раз наоборот, результаты, полученные прямыми методами, уточняются с помощью итерационных процессов.

В настоящее время разработано огромное количество вычислительных процедур, обслуживающих различные задачи исследования математических моделей. К ним относятся, например, численные методы интегрирования и дифференцирования, интерполяции и приближения функций, решения систем различных типов алгебраических и дифференциальных уравнений, оптимизации, исследования

устойчивости и т. д. С развитием вычислительной техники численные методы становятся незаменимым средством проектирования, организации производства и научных исследований.

8. Использование вычислительных машин. Пока вычислительные средства ограничивались арифмометром и логарифмической линейкой, инженер мог использовать в своей работе только сравнительно простой математический аппарат. В современных условиях все большее значение приобретает применение развитого математического аппарата в сочетании с высокопроизводительной вычислительной техникой.

Возрастающая роль математического моделирования в инженерном деле обусловлена характерными особенностями развития техники. Это, прежде всего, усложнение технических проектов, жесткие технико-экономические условия, требования высокого качества и надежности в условиях массового производства, сжатые сроки проектирования и освоения новых изделий. В то же время математическое моделирование опирается на большой парк вычислительных машин, отличающихся принципом действия и уровнем специализации, производительностью и объемом памяти, способами программирования и организацией связей с внешними устройствами.

Области применения двух основных типов машин — *аналоговых* и *цифровых* — определяются их характерными особенностями. Аналоговые машины имеют большие преимущества по скорости, а цифровые — по точности выполнения математических операций. Положительные стороны обоих типов машин объединяются в *гибридных вычислительных комплексах*, включающих цифровые и аналоговые устройства, связанные через цифроаналоговые преобразователи. Развитию таких комплексов способствуют, по крайней мере, два обстоятельства. Во-первых, повышение точности и компактности аналоговых устройств за счет совершенствования решающих компонентов (в частности, операционных усилителей) на основе интегральной технологии. Во-вторых, снижение эффективности применения цифровых устройств из-за возможного уменьшения точности при очень большом количестве операций.

Моделирование на вычислительных машинах может осуществляться двумя основными способами: в режиме *пакетной обработки данных* и в режиме *оперативного взаимодействия*.

В режиме пакетной обработки общение с машиной при решении некоторой задачи сводится к вводу исходных данных и получению требуемых результатов. Каждый раз такое общение происходит по однотипной схеме и оформляется как отдельный заказ. Часто пользователь вообще непосредственно не участвует в вычислительном процессе, который обслуживается персоналом вычислительного центра.

В режиме оперативного взаимодействия пользователь может вмешиваться в ход решения задачи, редактировать исходные и про-

15179
Техническая
БИБЛИОТЕКА
Лисаковского ГОК

межуточные данные в зависимости от получаемых результатов, уточнять и изменять постановку задачи. На практике такое взаимодействие (рис. 1) осуществляется на различных уровнях технического оснащения — от цифропечатающих устройств и графопостроителей до специально организованных пультов, называемых терминалами и дисплеями. Типичный *дисплей* состоит из электронно-лучевого индикатора, на котором отображается информация в цифровой и графической форме, и клавиатуры для ввода данных (или печатающего устройства, которое также используется для контроля и вывода). Часто дисплей снабжается световым пером, позволяющим осуществлять операции ввода исходных данных и команд

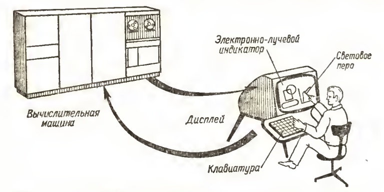


Рис. 1. Математическое моделирование на вычислительной машине в режиме оперативного взаимодействия.

редактирования и управления вычислительным процессом. В последнее время достигнуты существенные успехи в реализации общения пользователя с вычислительной машиной с помощью речевых команд.

Моделирование в режиме оперативного взаимодействия является наиболее привлекательным и перспективным методом использования вычислительных машин, позволяет достигнуть высокой степени автоматизации при проектировании, организации производства и научных исследованиях. Это, однако, не умаляет значения режима пакетной обработки данных при решении инженерных задач на вычислительных машинах различной сложности — от малых с простейшими методами программирования до больших универсальных с развитым математическим обеспечением.

Многие инженерные задачи могут решаться на машинах с помощью стандартных методов и программ. В таких случаях инженеру достаточно быть осведомленным о возможностях, которые могут быть предоставлены в его распоряжение вычислительным

центром или персоналом, эксплуатирующим и обслуживающим конкретную вычислительную машину. Однако рано или поздно возникнет необходимость написания программ для решения специальных задач и хорошо, если инженер подготовлен к этому. Как минимум, нужно ознакомиться хотя бы с начальными сведениями по программированию, чтобы иметь возможность общаться с программистами и совместно работать с ними. Но лучше всего самому овладеть методами программирования. Обретенная независимость в общении с машиной и большое эмоциональное удовлетворение компенсируют с избытком сравнительно небольшую затрату времени и усилий, необходимых для изучения подходящего языка программирования.

В сложном процессе проектирования математическое моделирование сочетается с экспериментами над реальными объектами. Эксперимент служит источником исходных данных и критерием правильности выбранной модели. В то же время само моделирование является как бы экспериментом в чистом виде, в котором представлены наиболее существенные свойства и связи исследуемых объектов.

9. Математическое образование инженера. Значение математического образования в подготовке инженеров за последние десятилетия сильно возросло. Совершенствованием содержания и методики преподавания высшей математики в вузах постоянно занимаются крупнейшие ученые и педагоги. Однако существующее положение вещей оставляет желать много лучшего. «Обучают ли наших студентов всему тому, что им нужно или что им может быть нужно?» — ставит вопрос академик С. Л. Соболев и отвечает: «Этого сказать нельзя. Даже в университетах программы не поспевают за жизнью, но особенно это заметно во втузах.»

Складывается необычная ситуация. Благодаря глубокой реформе преподавания математики в средней школе многие школьники теперь изучают такие разделы, о которых инженеры даже не слышали в свои студенческие годы. В школьные программы вводятся важные разделы современной математики — теория множеств, математическая логика и др. А начальное знакомство с некоторыми положениями теории графов в порядке опыта проводится даже в старших группах детских садиков (об этом свидетельствует книга «Дети и графы» супругов Папи, перевод которой вышел в 1974 г. в издательстве «Педагогика»).

Вузовский курс высшей математики в значительной мере дополняется при изучении специальных инженерных дисциплин, в которых излагается необходимый математический аппарат. По существу изучение математики в вузах на различных уровнях продолжается в течение всего периода учебы студентов. Большую роль в математической подготовке инженеров играют спецкурсы и учебные

пособия по тем разделам, которые не нашли должного отражения в основном курсе высшей математики.

Конечно, под влиянием требований все более усложняющейся инженерной практики изучение математики в вузах с каждым годом совершенствуется и углубляется. Постепенно видоизменяются учебные программы, пересматриваются традиционные методы преподавания, изменяется отношение к многим классическим разделам, которым приходится потесниться, чтобы освободить место и время для важнейших разделов современной математики. Но как бы ни были совершенны программы и учебники, каким бы мастерством ни владели преподаватели, сколько бы ни отводилось для математических дисциплин часов в учебных планах, невозможно изучить впрок все то, что потребуется из математики для будущей инженерной деятельности. Математическое образование инженера не заканчивается в вузе, более того, оно не заканчивается никогда.

Если бы даже кому-нибудь удалось достаточно полно установить, что может понадобиться инженеру из математики, то такая обширная программа оказалась бы практически нереализуемой в рамках учебных планов. Но и само прогнозирование развития математического аппарата инженера на несколько десятилетий вперед — дело чрезвычайно трудное. Опыт показывает, что многие математические теории, которые не имеют сегодня непосредственного приложения в технике, завтра могут оказаться необходимыми для решения новых инженерных задач и послужить основой для дальнейшего расширения и обогащения математического аппарата инженера.

Следует учитывать также и психологические аспекты математического образования. Ясно, что интерес к изучению какого-либо раздела математики существенно зависит от того, заготавливаются ли знания впрок или же они требуются для решения конкретной прикладной задачи. В последнем случае овладение знаниями, навыками и умением проходит значительно эффективнее и глубже, так как процесс обучения подогревается острой практической потребностью.

Итак, постоянное совершенствование математических знаний должно рассматриваться как естественный процесс в творческой деятельности инженера.

2. МНОЖЕСТВА

1. Что такое множество? Ответить на этот вопрос не так просто, как это кажется на первый взгляд. В повседневной жизни и практической деятельности часто приходится говорить о некоторых совокупностях различных объектов: предметов, понятий, чисел, символов и т. п. Например, совокупность деталей механизма, аксиом

геометрии, чисел натурального ряда, букв русского алфавита. На основе интуитивных представлений о подобных совокупностях сформировалось математическое понятие *множества* как объединения отдельных объектов в единое целое. Именно такой точки зрения придерживался основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор.

Множество относится к категории наиболее общих, основополагающих понятий математики. Поэтому вместо строгого определения обычно принимается некоторое основное положение о множестве и его элементах. Так, группа выдающихся математиков, выступающая под псевдонимом Н. Бурбаки, исходит из следующего положения: «Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

2. Множество и его элементы. Утверждение, что множество A состоит из различимых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (и только из этих элементов), условно записывается $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Принадлежность элемента множеству *(отношение принадлежности)* обозначается символом $\in$, т. е. $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $\ldots$, $a_n \in A$, или короче $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Если b не является элементом A, то пишут $b \notin A$ или $b \overline{\in} A$.

Два множества A и B *равны (тождественны)*, $A = B$, тогда и только тогда, когда каждый элемент A является элементом B и обратно. Это значит, что множество однозначно определяется своими элементами.

Множество может содержать любое число элементов — конечное или бесконечное. Соответственно имеем *конечные* (множество цифр 0, 1, ..., 9 или страниц в книге) или *бесконечные* (множество натуральных чисел или окружностей на плоскости) множества. Не следует, однако, связывать математическое понятие «множество» с обыденным представлением о множестве как о большом количестве. Так, *единичное (одноэлементное)* множество содержит только один элемент. Более того, вводится также понятие *пустого множества*, которое не содержит никаких элементов. Пустое множество обозначается специальным символом $\varnothing$.

Роль пустого множества $\varnothing$ аналогична роли числа нуль. Это понятие можно использовать для определения заведомо несуществующей совокупности элементов (например, множество зеленых слонов, действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$). Более существенным мотивом введения пустого множества является то, что заранее не всегда известно (или неизвестно вовсе), существуют ли элементы, определяющие какое-то множество. Например, множество выигрышей в следующем тираже спортлото на купленные билеты может оказаться пустым. Никто еще не знает, является ли

пустым или нет множество всех решений в целых числах уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 30$. Без понятия пустого множества во всех подобных случаях, говоря о каком-нибудь множестве, приходилось бы добавлять оговорку «если оно существует».

3. Множество и подмножества. Множество A, все элементы которого принадлежат и множеству B, называется *подмножеством (частью)* множества B. Это отношение между множествами называют *включением* и обозначают символом $\subset$, т. е. $A \subset B$ (A включено в B) или $B \supset A$ (B включает A). Например, множество конденсаторов электронной цепи является подмножеством всех ее компонентов, множество положительных чисел — это подмножество множества действительных чисел.

Отношение $A \subset B$ допускает и тождественность $(A = B)$, т. е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя ($A \subset A$). Полагают также, что подмножеством любого множества является пустое множество $\varnothing$, т. е. $\varnothing \subset A$. Одновременное выполнение соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$ возможно только при $A = B$. И обратно $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Это может служить определением равенства двух множеств через отношение включения.

Наряду с $A \subset B$, в литературе можно встретить и другое обозначение $A \subseteq B$. При этом под $A \subset B$ понимают такое отношение включения, которое не допускает равенства A и B *(строгое включение)*. Если допускается $A = B$, то пишут $A \subseteq B$ *(нестрогое включение)*. Мы будем придерживаться принятого ранее обозначения как для строгого, так и для нестрогого включения.

4. Множество подмножеств. Любое непустое множество A имеет, по крайней мере, два различных подмножества: само A и пустое множество $\varnothing$. Эти подмножества называются *несобственными*, а все другие подмножества A называют *собственными* (эта терминология связана со словами «собственно подмножества», а не со словом «собственность»). Конечные собственные подмножества образуются всевозможными сочетаниями по одному, два, три и т. д. элементов данного множества.

Элементы множества сами могут являться некоторыми множествами. Например, книга из множества книг в шкафу может рассматриваться как множество страниц. Здесь следует обратить внимание на то, что речь идет об элементах множества, а не о подмножествах (никакая совокупность страниц не может рассматриваться как подмножество множества книг).

Множество, элементами которого являются *все* подмножества множества A, называют *множеством подмножеств (множеством-степенью)* A и обозначают через $\mathcal{P}(A)$. Так, для трехэлементного множества $A = \{a, b, c\}$ имеем $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

В случае конечного множества A, состоящего из n элементов, множество подмножеств $\mathcal{P}(A)$ содержит 2^n элементов. Доказательство основывается на сумме всех коэффициентов разложения бинома Ньютона или на представлении подмножеств n-разрядными двоичными числами, в которых 1 (или 0) соответствует элементам подмножеств.

Следует подчеркнуть различия между отношением принадлежности и отношением включения. Как уже указывалось, множество A может быть своим подмножеством ($A \subset A$), но оно не может входить в состав своих элементов ($A \notin A$). Даже в случае одноэлементных подмножеств следует различать множество $A = \{a\}$ и его единственный элемент a. Отношение включения обладает свойством транзитивности: если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Отношение принадлежности этим свойством не обладает. Например, множество $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$ в числе своих элементов содержит множество $\{2, 3\}$, поэтому можно записать: $2{,}3 \in \{2, 3\}$ и $\{2, 3\} \in A$. Но из этого вовсе не следует, что элементы 2 и 3 содержатся в A (в приведенном примере мы не находим 2 и 3 среди элементов множества A, т. е. $2,\ 3 \notin A$).

5. Задание множеств. Множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно задать простым перечислением его элементов. Например, спецификация задает множество деталей изделия, каталог — множество книг в библиотеке. Но этот способ не пригоден для задания бесконечных множеств и даже в случае конечных множеств часто практически нереализуем.

Рассмотрим в качестве примера фасад 16-этажного дома с 38 окнами в каждом этаже. В вечернее время каждое из окон дома может быть освещено или затемнено, т. е. находиться в двух состояниях. Определенные совокупности освещенных окон можно рассматривать как некоторые образы. Считая все окна (их число равно $38 \cdot 16 = 608$) различными по их расположению на фасаде, каждый такой образ можно связать с соответствующим подмножеством освещенных окон. Тогда количество всех образов равно количеству элементов множества подмножеств всех окон, т. е. $2^{608} \approx 10^{183}$. Полученное число настолько большое, что его трудно даже представить. Оно несравнимо больше числа атомов во всей видимой вселенной, которое равно примерно 10^{73}. Если бы каждый атом превратился во вселенную, то и тогда на один атом приходилось бы 10^{37} образов ($10^{183} = 10^{73} \cdot 10^{73} \cdot 10^{37}$). Поэтому, хотя множество всех образов конечно и любой из них можно легко определить, о задании подобных множеств перечислением их элементов не может быть и речи.

6. Определяющее свойство. Другой способ задания множества состоит в описании элементов *определяющим свойством $P(x)$ (формой от x)*, общим для всех элементов. Обычно $P(x)$ — это высказывание, в котором что-то утверждается об x, или некоторая функция

переменной x. Если при замене x на a высказывание $P(a)$ становится истинным или функция в заданной области определения удовлетворяется, то a есть элемент данного множества. Множество, заданное с помощью формы $P(x)$, обозначается как $X = \{x \mid P(x)\}$, или $X = \{x : P(x)\}$, причем $a \in \{x \mid P(x)\}$, если $P(a)$ истинно. Например $\{x \mid x^2 = 2\}$ — множество чисел, квадрат которых равен двум, $\{x \mid x$ есть животное с хоботом$\}$ — множество слонов.

Обычно уже в самом определении конкретного множества явно или неявно ограничивается совокупность допустимых объектов. Так, множество слонов следует искать среди млекопитающих, а не среди рыб и тем более не среди планет. Если речь идет о множестве чисел, делящихся на 3, то ясно, что оно является подмножеством целых чисел. Удобно совокупность допустимых объектов зафиксировать явным образом и считать, что рассматриваемые множества являются подмножествами этой совокупности. Ее называют *основным множеством (универсумом)* и обычно обозначают через U. Так, универсумом арифметики служат числа, зоологии — мир животных, лингвистики — слова и т. п.

Если множество выделяется из множества A с помощью формы $P(x)$, то запись $\{x \mid x \in A,\ P(x)\}$ часто упрощается: $\{x \in A \mid P(x)\}$. Запись $\{f(x) \mid P(x)\}$ означает множество всех таких $y = f(x)$, для которых имеется x, обладающий свойством $P(x)$. Например, $\{x^2 \mid x$ — простое число$\}$ означает множество квадратов простых чисел.

7. Операции над множествами. Множества можно определять также при помощи операций над некоторыми другими множествами. Пусть имеются два множества A и B.

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество всех элементов, принадлежащих A или B. Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество всех элементов, принадлежащих одновременно как A, так и B. Например, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Множества, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называют *непересекающимися (расчлененными)*.

Разность $A \setminus B$ (или $A - B$) есть множество, состоящее из всех элементов A, не входящих в B, например, $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$. Ее можно рассматривать как *относительное дополнение* B до A. Если $A \subset U$, то множество $U \setminus A$ называется *абсолютным дополнением* (или просто *дополнением*) множества A и обозначается через $\bar{A}$. Оно содержит все элементы универсума U, кроме элементов множества A. Дополнение $\bar{A}$ определяется отрицанием свойства $P(x)$, с помощью которого определяется A. Очевидно, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Дизъюнктивная сумма (симметрическая разность) $A + B$ (или $A \oplus B$) есть множество всех элементов, принадлежащих или A, или

B (но не обоим вместе). Например, $\{1, 2, 3\} + \{2, 3, 4\} = \{1, 4\}$. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств за исключением тех, которые встречаются дважды.

8. Круги Эйлера. Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсума U используют *круги Эйлера* (рис. 2). Обычно универсум представляется множеством точек прямоугольника, а его подмножества изображаются в виде кругов или других простых областей внутри этого прямоугольника.

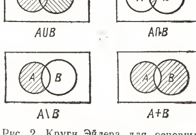


Рис. 2. Круги Эйлера для основных операций над множествами.

Множества, получаемые в результате операций над множествами A и B, изображены на рис. 2 заштрихованными областями. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис. 3). Дополнение множества A (до U), т. е. множество $\bar{A}$ изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A.

9. Отношения. В начале этого параграфа речь шла о том, что элементы множества могут находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями. Отношения между парами объектов называют *бинарными (двуместными)*. Выше уже были рассмотрены два таких отношения — принадлежность ($a \in A$) и включение $A \subset B$. Первое из них определяет связь между множеством и его элементами, а второе — между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство ($=$), неравенства ($<$ или $\leqslant$), а также такие выражения как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и т. п.

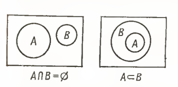


Рис. 3. Круги Эйлера для непересекающихся множеств, отношения включения и дополнения.

Для любого бинарного отношения можно записать соответствующее ему *соотношение* (для отношения неравенства соотношением будет $x < y$, для отношения «быть братом» соотношение запишется

как «x брат y»). В общем виде соотношение можно записать как xAy, где A — отношение, устанавливающее связь между элементом x из множества X ($x \in X$) и элементом y из множества Y ($y \in Y$). Ясно, что отношение полностью определяется множеством всех пар элементов (x, y), для которых оно имеет место. Поэтому любое бинарное отношение A можно рассматривать как множество *упорядоченных пар* (x, y).

Отношения могут обладать некоторыми общими свойствами (например, отношение включения и отношение равенства транзитивны). Определяя эти свойства и комбинируя их, можно выделить важные типы отношений, изучение которых в общем виде заменяет рассмотрение огромного множества частных отношений.

10. Функции как отношения. Функция f, ставящая каждому числу x (аргументу) в соответствие определенное число (значение функции) $y = f(x)$, также является бинарным отношением.

Обобщая это понятие, можно считать *функцией* такое бинарное отношение f, которое каждому элементу x из множества X ставит в соответствие один и только один элемент из множества Y, т. е. xfy. При этом считают, что элементами множеств X и Y могут быть объекты любой природы, а не только числа.

Функцией в таком общем понимании будет, например, соответствие между деталями какого-либо механизма и их массой (каждой детали соответствует ее масса), между человеком и его фамилией и т. п. В то же время такие отношения как неравенство ($<$) или «быть братом» функциями не являются, так как для каждого числа можно указать бесконечные множества превышающих его чисел, а человек может иметь несколько братьев или совсем их не иметь.

Обобщение понятия функции явилось одним из отправных моментов нового важного раздела современной математики — функционального анализа. Это понятие имеет огромное прикладное значение, так как позволяет рассматривать функциональные отношения между объектами любой природы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему?
а) $x \in \{2, a, x\}$; б) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$; в) $x \in \{1, \sin x\}$; г) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$.

2. Равны ли между собой множества A и B (если нет, то почему)?
а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;
б) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$;
в) $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 3\}$;
г) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}, 6\}$;
д) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

3. Связаны ли множества A и B отношением включения (если да, то укажите, какое из них является подмножеством другого)?

а) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, c, d\}$;
б) $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{a, e, c\}$;
в) $A = \{c, d, e\}$, $B = \{c, a\}$.

4. В каких отношениях находятся между собой следующие три множества: $A = \{1, 3\}$; B — множество нечетных положительных чисел; C — множество решений уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$?

5. Образуйте множество праздничных дней 1975 г. Пересекается ли это множество с множеством воскресных дней того же года? Если да, то запишите элементы пересечения этих двух множеств.

6. К каким видам относятся следующие множества: A — множество конденсаторов в радиоприемнике; B — множество квадратов целых чисел; C — множество решений уравнения $2x - 3 = 0$; D — множество деревьев на Луне?

7. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума, запишите следующие его подмножества: A — четных чисел; B — нечетных чисел; C — квадратов чисел; D — простых чисел. В каких отношениях находятся эти подмножества?

8. Запишите множества, получаемые в результате следующих операций над множествами из задачи 7: $A \cup B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $C + \bar{D}$. Сформулируйте определяющие свойства каждого из полученных множеств.

9. Три прибора x, y, z сравнивают по двум показателям, причем выделяют тот из приборов, у которого данный показатель наилучший (случаи одинаковых показателей исключаются).

а) Образуйте множество U всевозможных исходов такого сравнения, обозначив элементы этого множества упорядоченными парами букв для приборов с наилучшими показателями (например, исход yx означает, что по первому показателю лучшим оказался прибор y, а по второму — прибор x).

б) Сколько элементов содержит множество всевозможных исходов сравнения m приборов по n показателям?

в) Перечислите элементы множеств возможных исходов, при которых прибор x оказывается лучшим по первому показателю (A), по второму показателю (B), хотя бы по одному показателю (C), по обоим показателям (D), не является лучшим ни по одному показателю (E).

10. Для множеств A, B, C, D, E из задачи 9в дайте ответы на следующие вопросы:

а) Какие множества выражаются через объединение, дополнение, пересечение других множеств?

б) Какому множеству соответствует разность $A \setminus B$ и каков его смысл?

в) Какие множества связаны между собой отношением включения?

г) Какому множеству соответствует дизъюнктивная сумма $A + B$ и каков его смысл?

11. На примере множеств A и B из задачи 9в покажите справедливость соотношения $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера.

12. Что можно сказать об отношениях между множествами A, B, C, представленными кругами Эйлера на рис. 4? Запишите с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям.

13. Для написания цифр почтового индекса используют множество из девяти элементов, которые обозначены буквами на рис. 5, *а*, а сами цифры изображены на рис. 5, *б*.

а) Сколько различных фигур можно изобразить с помощью всевозможных комбинаций из элементов исходного множества, считая, что в каждой такой комбинации может участвовать от 0 до 9 элементов? Какой процент этих комбинаций используется для начертания цифр?

б) Запишите множества A_k ($\kappa = 0, 1, \ldots, 9$) элементов каждой из десяти цифр (например, $A_7 = \{a, c, f\}$). Имеются ли среди них непересекающиеся множества?

в) Запишите для каждого из элементов s ($s = a, b, \ldots, i$) множество B_s, состоящее из цифр, в написании которых используется элемент s (например, $B_f = \{0, 6, 7, 8\}$). Какие элементы используются наиболее редко и наиболее часто?

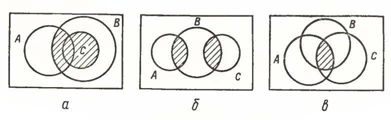


Рис. 4. Круги Эйлера к задаче 12.

г) Считая мерой близости цифр количество общих элементов, укажите цифры, наименее и наиболее близкие цифре 3. Какой операции над множествами A_k соответствует множество, определяющее меру близости цифр?

14. В химическом продукте могут оказаться примеси четырех видов, обозначенных через a, b, c, d. Приняв в качестве исходного множества $A = \{a, b, c, d\}$, образуйте множество всех его подмножеств $\mathscr{P}(A)$. Дайте содержательное истолкование этого множества и его элементов. Каким ситуациям соответствуют, в частности, несобственные подмножества?

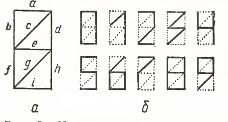


Рис. 5. Начертание цифр почтового индекса:
а — элементы исходного множества; *б* — цифры.

15. Докажите, что для конечного множества, состоящего из n элементов, множество всех его подмножеств содержит 2^n элементов.

16. Проверьте свойство транзитивности отношения включения на примере множеств $X = \{b, c\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{b\}$.

17. Дайте словесное описание каждому из следующих множеств:

а) $\{x \mid x$ — точка плоскости, находящаяся на расстоянии r от начала координат$\}$;

б) $\{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$;

в) $\{x \mid x$ — инженер нашего отдела$\}$;

г) $\{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$; A — множество транзисторов; B — множество деталей радиоприемника;

д) $\{x \in R \mid x = 3\kappa, \kappa \in N\}$; N — множество натуральных чисел;

е) $\{x^2 + 1 \mid x$ — целое число$\}$.

18. Покажите, что для любых множеств A и B справедливо соотношение $\varnothing \subset A \cap B \subset A \cup B$.

19. Покажите, что для любого множества A справедливы соотношения: $A + A = \varnothing$; $A + \varnothing = A$.

20. Покажите, что из соотношения $A \cap B = C$ следует $C \subset A$ и $C \subset B$.

21. Пусть M_1 и M_2 — соответственно множества деталей первого и второго механизмов, а P — множество пластмассовых деталей. Запишите в виде теоретико-множественных соотношений следующие условия.

а) Среди деталей первого механизма имеются все пластмассовые детали.

б) Одинаковые детали, входящие в оба механизма, могут быть только пластмассовыми.

в) Во втором механизме нет пластмассовых деталей.

22. Является ли совокупность полученных в предыдущей задаче соотношений ($P \subset M_1$, $M_1 \cap M_2 \subset P$, $M_2 \cap P = \varnothing$) непротиворечивой? Если да, то можно ли ее упростить? Для ответа на поставленные вопросы проведите сначала логические рассуждения, а затем воспользуйтесь кругами Эйлера. Сформулируйте выводы, соответствующие полученному результату.

23. Запишите множество упорядоченных пар (x, y), выражающих отношение «x — делитель y» на множестве целых чисел от 2 до 10 включительно. Является ли это отношение функцией? Обладает ли оно свойством транзитивности?

24. Запишите отношение между элементами множества цифр из задачи 13, выражающееся как «x имеет больше двух общих элементов с y».

25. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и A — отношение между элементами множеств X и Y, выражаемое соотношением xAy. Укажите, в каких случаях A можно рассматривать как функцию:

а) X — множество студентов, Y — множество учебных дисциплин, xAy — «x изучает y»;

б) X — множество спортсменов, Y — рост в единицах длины, xAy — «x имеет рост y»;

в) X — множество компонентов электрической цепи, Y — множество узлов цепи, xAy — «x связан с y».

3. МАТРИЦЫ

1. Матрица как таблица. *Матрица* — это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде прямоугольной таблицы:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array}\,.$$

Такая таблица, состоящая из m строк и n столбцов, содержит mn клеток (позиций). При этом говорят, что матрица имеет *размер* $m \times n$ и ее называют *$(m \times n)$-матрицей*. Позицию на пересечении i-й строки и j-го столбца будем называть *ij-клеткой*.

Числа или любые другие объекты, расположенные в клетках таблицы, называют *элементами* матрицы. Положение элементов строго фиксировано: в каждой клетке должен располагаться только один элемент и ни одна клетка не должна оставаться свободной.

В общем обозначении элемента a_{ij} первый индекс i всегда указывает номер строки, а второй — номер столбца. Элемент, расположенный в ij-клетке, называют *ij-элементом*.

Матрица обозначается одной буквой (часто буквы, обозначающие матрицы, набирают жирным шрифтом или снабжают какими-либо дополнительными символами). Однако независимо от принятого способа обозначения матрица всегда является совокупностью таблично упорядоченных элементов. Две матрицы равны, если и только если равны их соответствующие элементы, т. е. $A = B$ при условии $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, n$). Ясно, что сравнивать можно только матрицы одного и того же размера, между элементами которых определено отношение равенства.

Матрицы, элементами которых являются вещественные или комплексные числа, называют соответственно *вещественными* или *комплексными*. Пусть A — комплексная ($m \times n$)-матрица с элементами $a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$. Матрица $\bar{A}$ того же размера с элементами $a^*_{ij} = \alpha_{ij} - i\beta_{ij}$ называется *комплексно-сопряженной* с A.

Часто для упрощения нулевые элементы в таблицу не записывают, но при этом имеют в виду, что пустые клетки также содержат числа (нули).

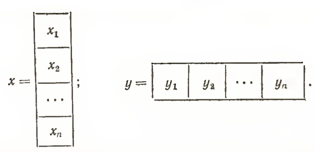
Кроме приведенной выше клеточной записи, используют и другие способы представления матриц, например:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Матрицы впервые появились в середине прошлого столетия в работах английских математиков А. Кэли и У. Гамильтона. Представление совокупностей элементов в виде матриц и разработанные правила операций над ними оказались весьма плодотворными в математике и нашли широкое применение в физике, технике, экономике. Существенный вклад в разработку общей теории матриц и ее приложений внесли советские математики И. А. Лаппо-Данилевский, А. Н. Крылов, Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн.

2. Типы матриц. Матрица может иметь любое количество строк и столбцов (конечное или бесконечное). В дальнейшем при отсутствии оговорок будут рассматриваться конечные матрицы с числовыми элементами.

Если матрица состоит из одного столбца или одной строки, то она соответственно называется *столбцевой* или *строчной* (употребляются также названия *матрица-столбец* и *матрица-строка*). В таких случаях достаточно отмечать элементы одним индексом:

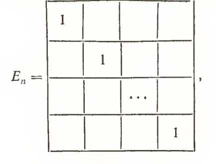


Столбцевую и строчную матрицы называют также *векторами* и сокращенно обозначают как $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Обычно из контекста ясно, идет ли речь о векторе-столбце или о векторе-строке. В противном случае используют приведенные выше обозначения.

Матрица, количество строк и столбцов которой одинаково и равно n, называется *квадратной матрицей* порядка n. Совокупность ii-клеток ($i = 1, 2, ..., n$) образует *главную диагональ* квадратной матрицы. Матрица, все элементы которой вне главной диагонали равны нулю, т. е.

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d_1 & & & \\ \hline & d_2 & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & d_n \\ \hline \end{array},$$

называется *диагональной* и более кратко записывается $D = \mathrm{diag}\,\{d_1, d_2, ..., d_n\}$. Если в диагональной матрице $d_1 = d_2 = ... = d_n = 1$, то имеем *единичную* матрицу n-го порядка



которая часто обозначается также через I_n или просто цифрой 1 (не следует принимать это обозначение за число, равное единице).

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается цифрой 0. Заметим, что нулевая матрица может иметь любой размер $m \times n$, в то время как единичная матрица — всегда квадратная. Матрица, состоящая только из одного элемента, обычно отождествляется с этим элементом.

Квадратная матрица называется *верхней (нижней) треугольной*, если равны нулю все элементы, расположенные под (над) главной диагональю:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline & & & a_{nn} \\ \hline \end{array}; \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b_{11} & & \cdots & \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ \hline \end{array}.$$

Диагональная матрица является частным случаем как верхней (A), так и нижней (B) треугольных матриц.

3. Сложение матриц. Сумма двух матриц A и B одинаковых размеров определяется как матрица C тех же размеров, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц, т. е. $C = A + B$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Пример:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & -7 \\ \hline 1 & 2 & 0{,}5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & -3 & 10 \\ \hline 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3 & 3 \\ \hline 1 & 2{,}5 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Из приведенного определения следует, что операция сложения матриц коммутативна, т. е. $A+B=B+A$, и ассоциативна, т. е. $(A+B)+C = A+(B+C)$. Она естественным образом распространяется на любое число слагаемых. Очевидно также, что матрица A не изменяется при суммировании ее с нулевой матрицей тех же размеров, т. е. $A + 0 = A$.

4. Умножение матрицы на число. По определению произведением матрицы A на число α (в отличие от матриц и векторов, числа часто называют *скалярами*) является матрица $C = \alpha A$, элементы которой получаются умножением соответствующих элементов матрицы A на это число α, т. е. $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Пример:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, справедливы следующие соотношения: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, где A и B — матрицы одинакового размера; α и β — числа (скаляры). Общий множитель элементов можно выносить за знак матрицы, считая его скалярным множителем.

Разность двух матриц одинаковых размеров сводится к уже рассмотренным операциям соотношением $A - B = A + (-1)B$, т. е. $C = A - B$, если $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

5. Умножение матриц. По многим соображениям целесообразно определить эту операцию следующим образом: *произведением* матрицы A размера $(m \times n)$ на матрицу B размера $(n \times r)$ является матрица $C = AB$ размера $(m \times r)$, элемент c_{ij} которой, расположенный в ij-клетке, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Умножение A на B допустимо (произведение AB существует), если число столбцов A равно числу строк B (в таких случаях говорят, что эти две матрицы *согласуются по форме*). Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 3 & 2\cdot 3+0\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 5 \\ 5\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot 3 & 5\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 5 \\ 0\cdot 1+0\cdot 2+4\cdot 4+1\cdot 3 & 0\cdot 3+0\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 15 & 16 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}.$$

Для матриц $A(m \times n)$ и $B(n \times m)$ существует как произведение AB размера $m \times m$, так и произведение BA размера $n \times n$. Ясно, что при $m \neq n$ эти произведения не могут быть равными уже вследствие различных размеров результирующих матриц. Но даже при $m = n$, т. е. в случае квадратных матриц одинакового порядка, произведения AB и BA не обязательно равны между собой. Например, для матриц

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix};$$

имеем:

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 12 \end{Vmatrix}; \quad BA = \begin{Vmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 16 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что вообще операция умножения матриц не подчиняется коммутативному закону ($AB \neq BA$). Если же выполняется соотношение $AB = BA$, то матрицы A и B называют *коммутирующими* или *перестановочными*. Ассоциативный и дистрибутивный законы для матричного умножения выполняются во всех случаях, когда размеры матриц допускают соответствующие операции: $(AB)C = A(BC) = ABC$ (ассоциативность), $A(B + C) = AB + AC$ и $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность умножения слева и справа относительно сложения).

Умножение $(m \times n)$-матрицы A на единичную матрицу m-го порядка слева и на единичную матрицу n-го порядка справа не изменяет этой матрицы, т. е. $E_m A = A E_n = A$. Если хотя бы одна из матриц произведения AB является нулевой, то в результате получим нулевую матрицу.

Отметим, что из $AB = 0$ не обязательно следует, что $A = 0$ или $B = 0$. В этом можно убедиться на следующем примере:

$$\begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0{,}5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

6. Транспонирование матрицы. Преобразование матрицы A, состоящее в замене строк столбцами (или столбцов строками) при

сохранении их нумерации, называется *транспонированием*. Полученная в результате такого преобразования матрица называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^t или A':

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad A^t = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Произвольная $(m \times n)$-матрица при транспонировании становится $(n \times m)$-матрицей, а элемент a_{ij} занимает ji-клетку, т. е. $a_{ij} = a_{ji}^t$.

Если матрица (квадратная) совпадает со своей транспонированной, т. е. $A = A^t$, то она называется *симметричной* и ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = a_{ji}$ (симметрия относительно главной диагонали). Матрица, для которой $A = -A^t$, называется *кососимметричной*, и ее элементы связаны соотношением $a_{ij} = -a_{ji}$. Она, как и симметричная матрица, всегда квадратная, но диагональные элементы равны нулю, т. е. $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ниже приведены примеры симметричной и кососимметричной матриц:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0{,}5 & 3 & -5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & -4 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0{,}1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -0{,}1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ясно, что не все элементы таких матриц могут быть выбраны произвольно. Можно убедиться, что из n^2 элементов для симметричной матрицы независимыми могут быть только $\frac{1}{2}n(n+1)$, а для кососимметричной — $\frac{1}{2}n(n-1)$ элементов.

Комплексно-сопряженная и транспонированная матрица $(\bar{A})^t$ называется *сопряженной* с A и обозначается через A^*. Матрица, равная своей сопряженной, т. е. $A = (\bar{A})^t = A^*$, называется *эрмитовой*. Если $A = -(\bar{A})^t$, то A — *косоэрмитова* матрица.

Легко показать, что транспонирование произведения AB равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке: $(AB)^t = B^t A^t$. Дважды транспонированная матрица равна исходной, т. е. $(A^t)^t = A$.

7. Матричная запись системы линейных уравнений. Первоначально матрицы были введены для упрощения записи систем линейных уравнений, что обусловило и определение основных матричных операций. Система линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

записывается одним матричным равенством

$$\left\|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array}\right\|.$$

Действительно, перемножив в правой части равенства $(m \times n)$-матрицу на столбцевую матрицу, получим

$$\left\|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\|.$$

Из равенства матриц-столбцов следуют равенства для соответствующих элементов, которые совпадают с исходной системой уравнений. Если обозначить

$$y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Vmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

то матричное равенство запишется еще короче

$$y = Ax.$$

Такое представление системы линейных уравнений оказалось возможным благодаря правилу умножения матриц, которое наилучшим образом подходит для этой цели. Однако исторически дело обстояло как раз наоборот: правила действий над матрицами определялись, прежде всего, исходя из удобства представлений систем линейных уравнений.

8. Линейные преобразования. Систему уравнений, записанную в начале предыдущего пункта, можно рассматривать как линейное преобразование совокупности величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в совокупность $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Это преобразование полностью определяется коэффициентами a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. На языке матриц линейное преобразование $y = Ax$ означает преобразование столбца x в столбец y, которое определяется *матрицей преобразования* A.

Пусть величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получаются из некоторой совокупности величин $z_1, z_2, \ldots, z_r$ посредством линейного преобразования $x = Bz$, где x и z — столбцы соответствующих величин; B — матрица их преобразования. Тогда формальной подстановкой x в первое матричное уравнение получаем

$$y = Ax = A(Bz) = (AB)z = Cz,$$

где $C = AB$ — матрица преобразования величин z в y. К этому же результату можно прийти путем подстановки значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из второй системы уравнений в первую с учетом введенного ранее правила умножения прямоугольных матриц.

9. Обратная матрица. В обычной алгебре два числа, произведение которых равно единице, называют взаимно обратными. Число, обратное числу a, обозначается через a^{-1} и по определению $aa^{-1} =$

$= 1$. Аналогично в матричной алгебре две квадратные матрицы, произведение которых равно единичной матрице, т. е. $AA^{-1}=A^{-1}A=1$, называют *взаимно обратными* (A^{-1} обратна A). Однако дальше этого аналогия не проходит.

Выражение $a^{-1}b$, где a и b — числа, можно представить как частное от деления b на a, но для матриц такое представление не имеет смысла и в общем случае $A^{-1}B \neq BA^{-1}$. Поэтому вместо операции деления B на A различают левое частное $A^{-1}B$ и правое частное BA^{-1}, которые сводятся к умножению слева или справа на обратную матрицу A^{-1}.

Способ обращения матрицы проще всего установить, рассматривая решение системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = q_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = q_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = q_n \end{array}\right\}$$

В матричной форме эта система уравнений запишется как $Ax = q$, где A — квадратная матрица n-го порядка, называемая *матрицей системы*; x и q — столбцевые матрицы неизвестных переменных и свободных членов:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}; \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix}; \quad q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{Vmatrix}.$$

Матричное уравнение $Ax = q$ решается умножением обеих его частей слева на обратную матрицу A^{-1}, т. е. $A^{-1}Ax = A^{-1}q$, в результате чего получаем $x = A^{-1}q$.

В соответствии с правилом Крамера неизвестные $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются соотношением:

$$x_k = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1k}q_1 + \Delta_{2k}q_2 + \cdots + \Delta_{nk}q_n) = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{sk}q_s,$$

где Δ — *определитель* системы уравнений и Δ_{sk} — *алгебраические дополнения*.

Определитель Δ представляет собой числовую функцию, которая вычисляется по определенным правилам на основании квадратной таблицы, состоящей из коэффициентов системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Табличное представление определителя Δ по форме совпадает с матрицей системы уравнений, т. е. состоит из тех же элементов и в том же порядке, что и матрица A. В таких случаях его называют *определителем матрицы* A и записывают $\Delta = \det A$.

Алгебраическое дополнение Δ_{sk} вычисляется как определитель матрицы, полученной удалением из матрицы A s-й строки и k-го столбца, причем этот определитель умножается еще на $(-1)^{s+k}$. Величину Δ_{sk} называют также *алгебраическим дополнением элемента* a_{sk} матрицы A. Часто определитель матрицы A обозначается через $|A|$, а алгебраическое дополнение — через A_{sk}.

Записав для всех элементов столбцевой матрицы x выражения по правилам Крамера, получим решение системы уравнений в виде:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\Delta}(\Delta_{11}q_1 + \Delta_{21}q_2 + \cdots + \Delta_{n1}q_n) \\ \frac{1}{\Delta}(\Delta_{12}q_1 + \Delta_{22}q_2 + \cdots + \Delta_{n2}q_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{\Delta}(\Delta_{1n}q_1 + \Delta_{2n}q_2 + \cdots + \Delta_{nn}q_n) \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{Vmatrix},$$

откуда, сравнивая с $x = A^{-1}q$, имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Из полученного выражения следует правило определения обратной матрицы: 1) элементы a_{ij} данной матрицы A n-го порядка заменяются их алгебраическими дополнениями Δ_{ij}; 2) матрица алгебраических дополнений транспонируется, в результате чего получаем *присоединенную* или *взаимную матрицу* к A (она обозначается через $\mathrm{Adj}A$); 3) вычисляется определитель Δ матрицы A и присоединенная матрица $\mathrm{Adj}A$ умножается на величину, обратную этому определителю.

Обратная матрица существует для матрицы A при условии, что $\det A \neq 0$. Такие матрицы называются *неособенными*, в отличие от *особенных (вырожденных)*, определитель которых равен нулю. Ниже вычисление обратной матрицы иллюстрируется примером:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} -28 & -38 & -12 \\ 1 & -2 & -13 \\ 7 & -14 & 3 \end{Vmatrix} \rightarrow$$

$\det A = -94$ (1)

$$\rightarrow \begin{Vmatrix} -28 & 1 & 7 \\ -38 & -2 & -14 \\ -12 & -13 & 3 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} \frac{14}{47} & -\frac{1}{94} & -\frac{7}{94} \\ \frac{19}{47} & \frac{1}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{13}{94} & -\frac{3}{94} \end{Vmatrix} = A^{-1}.$$

(2) (3)

Матрица, обратная произведению двух матриц, равна переставленному произведению матриц, обратных исходным, т. е. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Действительно, умножив обе части этого равенства на AB, приходим к тождеству $E = B^{-1}A^{-1}(AB)$, так как $B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$, где E — единичная матрица n-го порядка.

10. Блочные матрицы. Часто матрицу удобно разбить вертикальными и горизонтальными линиями на *блоки*, которые являются матрицами меньших размеров и при выполнении операций рассматриваются как элементы исходных матриц. Операции над *блочными матрицами* выполняются по сформулированным выше правилам при условии, что эти операции допускаются размерами соответствующих матриц.

Пусть, например, матрицы A и B разбиты на блоки (жирными линиями) так, чтобы для соответствующих блоков имела смысл операция умножения, т. е.

$$A = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right|; \qquad B = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ \hline 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right|.$$

По правилу умножения прямоугольных матриц можно записать:

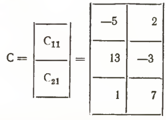
$$C = AB = \left|\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} C_{11} \\ \hline C_{21} \end{array}\right|.$$

Вычислим блоки C_{11} и C_{21} матрицы C:

$$C_{11} = \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -5 & 2 \\ 13 & -3 \end{array}\right|;$$

$$C_{21} = \left|\begin{array}{cc} 3 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 7 \end{array}\right|.$$

В результате имеем



Конечно, тот же результат получается и при непосредственном перемножении матриц. Но разбиение на блоки позволяет оперировать с матрицами меньших размеров (это бывает необходимо, например, когда нехватает места на бумаге или ячеек оперативной памяти машины) и особенно удобно, если можно выделить нулевые блоки.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Любая матрица является прямоугольной таблицей. Справедливо ли обратное утверждение, т. е. можно ли считать всякую прямоугольную таблицу матрицей? Если нет, то какие дополнительные требования выдвигаются с позиций матричной алгебры?

2. Какие из приведенных ниже совокупностей объектов представляют собой матрицы:

$$\text{а)}\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{bmatrix} \sin x \\ x \\ 0 \end{bmatrix};\quad \text{в)}\ \begin{bmatrix} & 12 & \\ 0 & & 3 \\ 2 & & -1 \end{bmatrix};\quad \text{г)}\ \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}.$$

3. Укажите, какие из приведенных ниже матриц являются равными между собой (при $x = 2$):

$$A = \begin{bmatrix} x^2+1 & 2 \\ 2^x & (x-1)^3 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2x-1 \\ 3x-2 & 1 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 2^x+1 & x \\ (4-x)^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. При каком значении x матрицы A и B равны:

$$A = \begin{bmatrix} (x-3)^2 & 3 \\ x^2-1 & 0 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2x+1 \\ (x-1)(x+1) & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Найти сумму $A + B$ и разность $A - B$ матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Найти произведения AB и BA и сравнить полученные результаты для матриц:

$$\text{а)}\ A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

б) $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$.

в) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

7. Проверить дистрибутивность умножения слева $A(B+C)=AB+AC$ и справа $(A+B)C=AC+BC$ относительно сложения для следующих матриц:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

8. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

9. Каким условиям в общем случае должны удовлетворять элементы квадратных матриц A и B второго порядка, чтобы они были перестановочными ($AB = BA$)? Как выглядят эти условия для случая, когда A — симметричная матрица?

10. При каких условиях справедливы матричные соотношения:

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2;\ (A-B)(A+B)=A^2-B^2?$$

11. Каким условиям должны удовлетворять элементы ненулевых квадратных матриц A и B, чтобы $AB = 0$?

12. К каким типам относятся матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}?$$

13. Построить транспонированную A^t, комплексно-сопряженную $\bar{A}$ и сопряженную A^* для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1+2i & 4 & 2-3i\\ -i & 2 & 4+2i\\ 5-3i & 1 & -6i\end{bmatrix}.$$

14. Показать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1+i & 2+3i\\ 1-i & 2 & 3-4i\\ 2-3i & 3+4i & 3\end{bmatrix}$$

является эрмитовой. Что можно сказать о диагональных элементах любой эрмитовой матрицы?

15. Какого типа должна быть квадратная матрица A, чтобы она была перестановочной с диагональной матрицей D того же порядка, т. е. чтобы $AD = DA$?

16. К какому типу относятся треугольные матрицы, если они кроме того: а) симметричные, б) кососимметричные?

17. Показать, что $(\overline{AB}) = \bar{A}\bar{B}$ и $(AB)^* = B^*A^*$.

18. Проверить соотношение $(AB)^*_t = B^*A^*$ для матриц задачи 6в.

19. Показать, что произведение AA^t существует для любой матрицы A и является симметричной матрицей.

20. Для заданных матриц найти обратные и проверить соотношение $AA^{-1} = I$:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

21. Найти матрицы, обратные заданным, и проверить соотношение $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

22. Дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Записать эту систему в матричной форме $Ax = q$, вычислить обратную матрицу A^{-1} и записать решение системы.

23. При изготовлении деталей четырех видов расход материалов, рабочей силы и электроэнергии на одну деталь каждого типа задается таблицей (в условных единицах):

Ресурсы	Расход на одну деталь			
	1	2	3	4
Материалы	1	3	0,5	2
Рабочая сила	1,5	2	3	1
Электроэнергия	2	1	1	0,5

а) Вычислить общую потребность материалов (y_1), рабочей силы (y_2) и электроэнергии (y_3) для изготовления заданного количества x_i деталей каждого вида: $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$.

б) Записать условие задачи как линейное преобразование величин x_1, x_2, x_3, x_4 в величины y_1, y_2, y_3 и получить требуемый результат путем матричных операций.

24. Зависимости между токами и напряжениями четырехполюсника (рис. 6, *а*) можно представить одной из систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}U_2 + a_{22}I_2 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{aligned}\right\}.$$

а) Записать эти уравнения в матричной форме и установить зависимости между элементами матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

б) Показать, что матрица A последовательного соединения четырех полюсников (рис. 6, *б*) равна произведению их матриц A' и A'', т. е. $A = A'A''$ (в порядке следования).

в) Показать, что матрица Y параллельного соединения четырехполюсников (рис. 6, *в*) равна сумме их матриц Y' и Y'', т. е. $Y = Y' + Y''$.

25. Выполнить умножение матриц, воспользовавшись разбиением их на блоки:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Проверить результат непосредственным умножением матриц.

4. ГРАФЫ

1. Происхождение графов. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. При изучении электрических цепей на первый план может выступать характер соединений различных ее компонентов — резисторов, конденсаторов, источников и т. п. Органические молекулы образуют структуры, характерными свойствами которых являются связи между атомами. Интерес могут представлять различные связи и отношения между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами*, а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами*. Множество вершин V, связи между которыми определены множеством ребер E, называют *графом* и обозначают $G = (V, E)$.

Рис 7. К задаче о кенигсбергских мостах: *а* — план города; *б* — граф.

Первая работа по графам была опубликована двадцатилетним Леонардом Эйлером в 1736 г., когда он работал в Российской Академии наук. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах (рис. 7, *а*): можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту? Ясно, что по условию задачи не имеет значения, как проходит путь по частям суши a, b, c, d, на которых расположен г. Кенигсберг (ныне Калининград), поэтому их можно представить вершинами. А так как связи между этими частями осуществляются только через семь мостов, то каждый из них изображается ребром, соединяющим соответствующие вершины. В резуль-

тате получаем граф, изображенный на рис. 7, *б*. Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, он доказал, что подобный маршрут имеется только для такого графа, каждая из вершин которого связана с четным числом ребер.

С тех пор поток задач с применением графов нарастал подобно снежной лавине. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах, рассматривались важные практические проблемы, многие из которых требовали тонких математических методов. Уже в середине прошлого века Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей, а Кэли исследовал важный класс графов для выявления и перечисления изомеров насыщенных углеводородов. Однако теория графов как математическая дисциплина сформировалась только к середине тридцатых годов нашего столетия благодаря работам многих исследователей, наибольшая заслуга среди которых принадлежит Д. Кенигу. Значительный вклад в теорию графов внесли советские ученые Л. С. Понтрягин, А. А. Зыков, В. Г. Визинг и др.

Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации, построение контактных схем и исследование конечных автоматов, сетевое планирование и управление, исследование операций, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, моделирование жизнедеятельности и нервной системы живых организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, математическая логика и теория вероятностей. Во всех этих разделах графы применяют для представления различных математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

2. Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, в соединительных проводах электрической цепи задаются положительные направления токов, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, результаты встреч между командами в спортивных состязаниях, различные отношения между числами (неравенство, делимость).

Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют *дугой*, а граф с ориентированными

ребрами — *ориентированным графом* или короче *орграфом* (рис. 8, *а*).

Если пара вершин соединяется двумя или большим числом дуг, то такие дуги называют *параллельными*. При этом две дуги, одинаково направленные по отношению к данной вершине, называют *строго параллельными*, а различно направленные — *нестрого параллельными*. Ясно, что нестрого параллельные дуги, отображающие ориентацию связи в обоих направлениях, по существу равноценны неориентированной связи и могут быть заменены ребром. Произведя такую замену в орграфе, придем к *смешанному* графу, который содержит ребра и дуги (рис. 8, *б*). Обратно, любой неориентированный или смешанный граф можно преобразовать в ориентированный заменой каждого ребра парой нестрого параллельных дуг.

Изменив направления всех дуг орграфа на противоположные, получаем орграф, *обратный* исходному. Если направления дуг орграфа не учитываются и каждая дуга рассматривается как неориентированное ребро, то он называется *соотнесенным* (неориентированным) графом.

Рис. 8. Ориентированный (*а*) и смешанный (*б*) графы.

3. Взвешенные графы. Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами*. В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), пропускную способность (линии связи), напряжение или ток (электрические цепи), количество набранных очков (турниры), валентность связей (химические формулы), количество рядов движения (автомобильные дороги), цвет проводника (монтажная схема электронного устройства), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель) и т. п.

Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам на карте автомобильных дорог, могут характеризоваться количеством мест в кемпингах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта (атомный вес элемента в структурной формуле, цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и т. п.).

Особое значение для моделирования физических систем приобрели взвешенные ориентированные графы, названные *графами потоков сигналов* или *сигнальными графами*. Вершины сигнального графа отождествляются с некоторыми переменными, характеризующими состояние системы, а вес каждой вершины означает функцию времени или некоторые величины, характеризующие соответствующую переменную *(сигнал вершины)*. Дуги отображают связи между переменными, и вес каждой дуги представляет собой численное или функциональное отношение, характеризующее передачу сигнала от одной вершины к другой *(передача дуги)*. Сигнальные графы находят широкое применение в теории цепей и систем, а также во многих других областях науки и техники.

4. Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом*. В математике рассматриваются и бесконечные графы, но мы заниматься ими не будем, так как в практических приложениях они встречаются редко. Конечный граф $G = (V, E)$, содержащий p вершин и q ребер, называется *(p, q)-графом*.

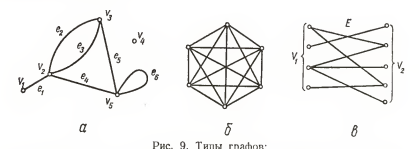


Рис. 9. Типы графов:
а — псевдограф; *б* — полный граф (шестиугольник); *в* — двудольный граф (биграф).

Пусть $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ и $E = \{e_1, e_2, ..., e_q\}$ — соответственно множества вершин и ребер (p, q)-графа. Каждое ребро $e_k \in E$ соединяет пару вершин $v_i, v_j \in V$, являющихся его *концами (граничными вершинами)*. Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину*, из которой дуга исходит, и *конечную вершину*, в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются *кратными*. В общем случае граф может содержать и *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Например, для (5, 6)-графа на рис. 9, *а* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$; ребра e_2 и e_3 параллельны, ребро e_6 является петлей, а v_4 — изолированная вершина.

Число ребер, связанных с вершиной v_i (петля учитывается дважды), называют *степенью вершины* и обозначают через $\delta(v_i)$ или $\deg(v_i)$. Так, для графа на рис. 9, *а* $\delta(v_1) = 1$, $\delta(v_2) = 4$ и т. д. Очевидно, степень изолированной вершины равна нулю ($\delta(v_4) = 0$). Вершина степени единицы называется *концевой* или *висячей вершиной* ($\delta(v_1) = 1$). Легко показать, что в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер, а число вершин нечетной степени всегда четно. В орграфе различают положительные $\delta^+(v_i)$ и отрицательные $\delta^-(v_i)$ степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из v_i и заходящих в v_i дуг. Например, для вершины d орграфа (см. рис. 8, *а*) имеем $\delta^+(d) = 2$ и $\delta^-(d) = 3$. Очевидно, суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны также числу всех дуг.

Граф без петель и кратных ребер называют *простым* или *обыкновенным*. Граф без петель, но с кратными ребрами называют *мультиграфом*. Наиболее общий случай графа, когда допускаются петли и кратные ребра, называют *псевдографом*. Так, граф на рис. 7, *б* — это мультиграф, а на рис. 9, *а* — псевдограф. Если граф не имеет ребер ($E = \varnothing$), то все его вершины изолированы ($V \neq \varnothing$), и он называется *пустым* или *нуль-графом*. Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным* (на рис. 9, *б* приведен пример полного графа с шестью вершинами). Если множество вершин V простого графа допускает такое разбиение на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется *двудольным* или *биграфом* (рис. 9, *в*). Ориентированный граф считается *простым*, если он не имеет строго параллельных дуг и петель.

Граф, степени всех вершин которого одинаковы и равны r, называется *однородным (регулярным)* r*-й степени*. Полный граф с n вершинами всегда однородный степени $n - 1$, а пустой граф — однородный степени 0. Граф третьей степени называют *кубическим*. Он обладает рядом интересных свойств и, в частности, всегда имеет четное число вершин.

5. Смежность. Две вершины v_i и $v_j \in V$ графа $G = (V, E)$ называются *смежными*, если они являются граничными вершинами ребра $e_k \in E$. Отношение смежности на множестве вершин графа можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т. е. $e_k = (v_i, v_j)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Для неориентированных графов такие пары неупорядочены, так что $e_k = (v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, а для орграфов — упорядочены, причем v_i и v_j означают соответственно начальную и конечную вершины дуги e_k. Петля при вершине v_i в обоих случаях представляется неупорядоченной парой (v_i, v_i). Ясно, что множество вершин V вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф.

Граф можно представить также *матрицей смежности*. Строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее (ij)-элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины v_i и v_j (или направленных от вершины v_i к вершине v_j для орграфа). Например, для графов, приведенных на рис. 8, *а* и 9, *а*, имеем соответственно следующие матрицы смежности:

$V_1 =$

	a	b	c	d	e
a		1		1	
b			1	1	
c		1		1	
d			1		1
e	2				

$V_2 =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		1			
v_2	1		2		1
v_3		2			1
v_4					
v_5		1	1		1

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична, а орграфа — в общем случае несимметрична. Неориентированным ребрам соответствуют пары ненулевых элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, дугам — ненулевые элементы матрицы, а петлям — ненулевые элементы главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированным вершинам, все элементы равны нулю. Элементы матрицы простого графа равны 0 или 1, причем все элементы главной диагонали нулевые.

Для взвешенного графа, не содержащего кратных ребер, можно обобщить матрицу смежности так, что каждый ее ненулевой элемент равняется весу соответствующего ребра или дуги. Обратно, любая квадратная матрица n-го порядка может быть представлена орграфом с n вершинами, дуги которого соединяют смежные вершины и имеют веса, равные соответствующим элементам матрицы. Если матрица симметрична, то она представима неориентированным графом.

6. Инцидентность. Если вершина v_i является концом ребра e_k, то говорят, что они *инцидентны*: вершина v_i инцидентна ребру e_k и ребро e_k инцидентно вершине v_i. В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами), инцидентность — это отношение между разнородными объектами (вершинами и ребрами). При рассмотрении орграфов различают *положительную инцидентность* (дуга исходит из вершины) и *отрицательную инцидентность* (дуга заходит в вершину).

Рассматривая инцидентность вершин и ребер (p, q)-графа, можно представить его *матрицей инцидентности* размера $p \times q$, строки которой соответствуют вершинам, а столбы — ребрам. Для неориентированного графа элементы этой матрицы определяются по

следующему правилу: ij-элемент равен 1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и равен нулю, если v_i и e_j не инцидентны. В случае орграфа ненулевой ij-элемент равен 1, если v_i начальная вершина дуги e_j, и равен -1, если v_i — конечная вершина дуги e_j.

Например, матрица инцидентности графа, приведенного на рис. 9, *а*, имеет вид:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{e_1} & \multicolumn{1}{c}{e_2} & \multicolumn{1}{c}{e_3} & \multicolumn{1}{c}{e_4} & \multicolumn{1}{c}{e_5} & \multicolumn{1}{c}{e_6} & \\ \hline 1 & & & & & & v_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & v_2 \\ \hline & 1 & 1 & & 1 & & v_3. \\ \hline & & & & & & v_4 \\ \hline & & & 1 & 1 & & v_5 \\ \hline \end{array}$$

Каждый столбец матрицы инцидентности содержит обязательно два единичных элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки и равны соответственно 1 и -1). Количество единиц в строке равно степени соответствующей вершины (для орграфа количество положительных единиц определяет положительную степень, а количество отрицательных единиц — отрицательную степень). Нулевая строка соответствует изолированной вершине, а нулевой столбец — петле.



Рис. 10. Изоморфные графы.

Следует иметь в виду, что нулевой столбец матрицы инцидентности лишь указывает на наличие петли, но не содержит сведений о том, с какой вершиной эта петля связана (в практических приложениях это может быть несущественно).

7. Изоморфизм. На рис. 10 изображены три графа, которые с геометрической точки зрения совершенно различны (пересечение ребер, если оно не отмечено точкой, не является вершиной). Но по существу они различаются лишь начертанием, а отношения инцидентности (при соответствующем обозначении вершин и ребер) для них одинаковы. Графы, для которых сохраняется отношение инцидентности, называются *изоморфными*.

Ясно, что матрица инцидентности определяет граф без петель с точностью до изоморфизма. Обычно на ее основе можно изобразить различные в геометрическом отношении, но изоморфные между собой графы, каждый из которых называют *геометрической реализацией*. Графы, которые имеют одинаковые начертания и отличаются лишь нумерацией вершин и ребер, не будучи тождественными, являются изоморфными.

Если существенные свойства графа не связаны со способом его изображения на плоскости или нумерацией вершин и ребер, то изоморфные графы, как правило, не различают между собой.

8. **Маршруты.** Нередко задачи на графах требуют выделения различных маршрутов, обладающих определенными свойствами и характеристиками. *Маршрут* длины m определяется как последовательность m ребер графа (не обязательно различных) таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. Маршрут проходит и через все вершины, инцидентные входящим в него ребрам. Примерами маршрутов на графе рис. 9, *а* могут служить последовательности $(e_1, e_3, e_2, e_3, e_5)$, (e_5, e_6, e_4, e_4). Первый маршрут проходит через последовательность вершин $(v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_5)$ и соединяет вершины v_1 и v_5, а второй — через последовательность вершин $(v_3, v_5, v_5, v_2, v_5)$ и соединяет вершины v_3 и v_5. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался.

Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая цепь — *простым циклом*. Так, на графе рис. 9, *а* (e_2, e_5, e_6) — цепь, (e_1, e_2, e_5) — простая цепь, (e_2, e_3, e_4, e_5) — цикл, (e_2, e_4, e_5) — простой цикл.

Цикл, который содержит все ребра графа, называется *эйлеровым циклом* (задача о кенигсбергских мостах сводится к выяснению существования такого цикла), а граф, в котором имеется такой цикл, называется эйлеровым графом. Простой цикл, который проходит через все вершины графа, называют *гамильтоновым*. Если критерий существования эйлерового цикла очень прост (необходимо, чтобы степени всех вершин были четными), то для гамильтоновых циклов никакого общего правила не найдено.

Ориентированные маршруты на орграфе определяются аналогично с той разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в направлениях, указанных стрелками. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин — *простым путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь — *простым контуром*. Граф (орграф) называется *циклическим (контурным)*, если он содержит

хотя бы один цикл (контур), в противном случае он называется *ацикл ическим (бесконтурным)*.

Понятия цепи и цикла применимы и к ориентированным графам. При этом направления дуг не учитываются, т. е. по существу вместо орграфа рассматривают неориентированный соотнесенный ему граф.

9. Части графа. Граф $G' = (V', E')$ является *частью графа* $G = (V, E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$, т. е. граф содержит все вершины и ребра любой его части. Часть, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все инцидентные им вершины, называется *подграфом*. Часть, которая наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит все вершины графа ($V' = V$, $E' \subset E$), называется *суграфом*. Рассмотренные графы показаны на рис. 11.

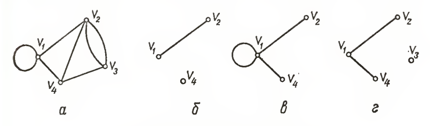


Рис. 11. Граф и его части:
а — граф; *б* — часть графа; *в* — подграф; *г* — суграф.

Исходный граф по отношению к его подграфу называют *надграфом*, а по отношению к суграфу — *сверхграфом*. Совокупность всех ребер графа, не принадлежащих его подграфу (вместе с инцидентными вершинами), образует *дополнение подграфа*. Говорят, что подграфы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ *разделены ребрами*, если они не имеют общих ребер ($E' \cap E'' = \varnothing$) и *разделены вершинами*, если у них нет общих вершин ($V' \cap V'' = \varnothing$).

10. Связность. Две вершины графа называют *связанными*, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называют *связным графом*. Очевидно, в связном графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь, так как из связывающего их маршрута всегда можно удалить циклический участок, проходящий через некоторую вершину более одного раза (рис. 12, где маршрут между вершинами v_i и v_j изображен жирными линиями).

Если граф не связный, то множество его вершин можно единственным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с инцидентными им ребрами образует связный подграф.

Таким образом, несвязный граф представляет собой совокупность отдельных частей (подграфов), называемых *компонентами*. На рис. 13 показан подграф, состоящий из трех компонент (изолированная вершина считается компонентой).

Часто отношение связности усложняется дополнительными условиями. Граф называют *циклически связным*, если любые две различные вершины содержатся в цикле (например, граф на рис. 11, *а* циклически связный, а граф на рис. 12 — нет, так как вершина v_j не содержится ни в каком цикле с другими вершинами). Граф называют *k-связным*, если любая пара различных вершин связана, по крайней мере k цепями, которые не имеют общих вершин (кроме начальной и конечной). Так, граф на рис. 11, *а* двусвязный, а на рис. 12 — односвязный.

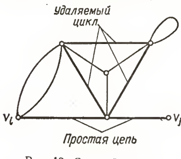


Рис. 12. Связный граф.

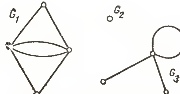


Рис. 13. Несвязный граф, состоящий из трех компонент (G_1, G_2, G_3).

Связность ориентированных графов определяется так же, как и для неориентированных (без учета направлений дуг). Специфичным для орграфа (или смешанного графа) является понятие сильной связности. Орграф называют *сильно связным*, если для любой пары его вершин v_i и v_j существует путь из v_i в v_j и из v_j в v_i (например, граф на рис. 8, *а* сильно связный). Граф, представляющий план города с односторонним движением по некоторым улицам, должен быть сильно связным, так как в противном случае нашлись бы вершины (площади и перекрестки), между которыми нельзя было бы проехать по городу без нарушения правил движения.

11. Разделимость. Связный граф может быть разделен на несвязные подграфы удалением из него некоторых вершин и ребер (при удалении вершин исключаются и все инцидентные им ребра, а при удалении ребер вершины сохраняются). Если существует такая вершина, удаление которой превращает связный граф (или компоненту несвязного графа) в несвязный, то она называется *точкой сочленения* (рис. 14, *а*). Ребро с такими же свойствами называется *мостом* (рис. 14, *б*). Ясно, что при наличии моста в графе имеется, по крайней мере, две точки сочленения.

Граф называется *неразделимым*, если он связный и не имеет точек сочленения (например, граф на рис. 11, *а* неразделим). Граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения, является разделимым и называется *сепарабельным*. Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф (на рис. 14, *в* показаны блоки B_1, B_2, B_3 графа рис. 14, *б*).

Каждое ребро графа, как и каждая вершина (за исключением точек сочленения), принадлежат только одному из его блоков. Более того, только одному блоку принадлежит и каждый простой цикл. Отсюда следует, что совокупность блоков графа представляет собой разбиение множеств ребер и простых циклов на непересекающиеся подмножества.

Рис. 14. Разделимые графы.
а — с точкой сочленения; *б* — с мостом; *в* — блоки B_1 — B_3 графа с мостом

В ряде приложений теории графов блоки можно рассматривать как компоненты. Это обычно допустимо, когда связи блоков посредством точки сочленения несущественны или когда существенные свойства графа связаны только с его простыми циклами (контурами). В таких случаях можно рассматривать несвязный граф как связный разделимый граф, который образуется путем такого объединения компонент, чтобы каждая из них была блоком (это всегда можно сделать, объединив, например, по одной вершине каждого блока в точку сочленения). Подобные операции используются при рассмотрении графов электрических цепей.

12. Деревья и лес. Особый интерес представляют связные ациклические графы, называемые *деревьями*. Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер, т. е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p - 1$ ребер.

При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный граф, компоненты которого являются

деревьями, называется *лесом* (лес из k деревьев, содержащий p вершин, имеет в точности $p - k$ ребер). Сказанное иллюстрируется на примере дерева (рис. 15, *а*), которое превращается в циклический граф добавлением ребра (рис. 15, *б*) и распадается на лес из двух деревьев T_1 и T_2 при удалении ребра e (рис. 15, *в*).

Рис. 15. Дерево (*а*), образование цикла при введении дополнительного ребра (*б*) и лес, который образуется после удаления ребра e (*в*).

Обычно деревья считаются существенно различными, если они не изоморфны. На рис. 16 показаны все возможные различные деревья с шестью вершинами. С увеличением числа вершин количество различных деревьев резко возрастает (например, при $p = 20$ их насчитывается около миллиона). Среди различных деревьев выделяются два важных частных случая: *последовательное дерево*, представляющее собой простую цепь, и *звездное дерево*, в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

Рис. 16. Существенно различные деревья с шестью вершинами.

Рис. 17. Прадерево с корнем v_0.

Рассматриваются также деревья с ориентированными ребрами (дугами). Ориентированное дерево называется *прадеревом* с *корнем* v_0, если существует путь между вершиной v_0 и любой другой его вершиной (рис. 17). Ясно, что прадерево имеет единственный корень.

До сих пор рассматривались деревья как минимальные связные графы на множестве p вершин. Важное значение имеет и другая точка зрения, когда деревья или лес являются частями некоторого графа, т. е. образуются из его ребер. Любая связная совокупность ребер, не содержащая контуров, вместе с инцидентными им вершинами образует *дерево графа* (рис. 18, *а*). Если такое дерево является суграфом (содержит все вершины графа), то оно называется *покрывающим деревом* или *остовом* (рис. 18, *б*). Так как петля пред-

ставляет собой простейший цикл, состоящий из единственного ребра, то она не может входить в состав любого дерева графа.

Ребра графа, которые принадлежат его дереву, называют ***ветвями.*** Если дерево покрывает граф, то множество ребер графа разбивается на два подмножества: подмножество ветвей и подмножество ребер *дополнения дерева*, называемых *хордами*. При этом связный (p, q)-граф содержит $\nu = p - 1$ ветвей и $\sigma = q - p + 1$ хорд. Если граф несвязный, то совокупность остовов k его компонент образует *покрывающий лес*. В этом случае $\nu = p - k$ и $\sigma = q - p + k$.

Рис. 18. Дерево как часть графа (выделено жирными линиями):
а — дерево; *б* — остов (покрывающее дерево).

Деревья играют важную роль в различных прикладных задачах, когда, например, речь идет о связи каких-либо объектов минимальным числом каналов (линий связи, дорог, коммуникаций) с определенными свойствами. С помощью дерева определяется система координат при моделировании цепей и систем различной физической природы. Деревья используются в качестве моделей при рассмотрении иерархических систем объектов, структурных формул органических соединений и т. п.

13. Планарность. Граф называют *плоским (планарным)*, если существует изоморфный ему граф (геометрическая реализация), который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Например, хотя в одном из графов на рис. 10 ребра пересекаются, изоморфные ему не имеют пересечений, следовательно, он плоский.

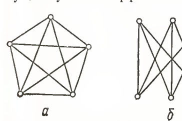


Рис. 19. Графы Понтрягина — Куратовского:
а — полный пятиугольник; *б* — двудольный граф.

На рис. 19 показаны два неплоских графа, играющие фундаментальную роль в теории планарности и называемые *графами Понтрягина—Куратовского*. Полный пятиугольник (рис. 19,*а*) представляет собой простой неплоский граф с минимальным числом вершин (полный граф с четырьмя вершинами — плоский, а удаление из пятиугольника хотя бы одного ребра также превращает его в плоский граф). Двудольный граф (рис. 19, *б*) является моделью известной задачи о трех домах и трех колодцах: можно ли проложить от домов к каждому колодцу дороги так, чтобы они не пересекались (враждующие соседи должны иметь возможность пользоваться всеми колодцами, но не хотят встречаться на дорогах)?

Свойства планарности не нарушаются, если некоторое ребро разбить на два введением новой вершины второй степени или заменить два ребра, инцидентные вершине второй степени, одним ребром, удалив эту вершину. Два графа называют *гомеоморфными* (изоморфными с точностью до вершин второй степени), если после удаления из них вершин второй степени и объединения инцидентных этим вершинам ребер, они оказываются изоморфными (рис. 20). Очевидно, граф, гомеоморфный плоскому графу, также плоский.

Строго доказывается, что граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного одному из графов Понтрягина—Куратовского.

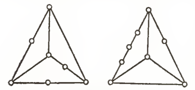


Рис. 20. Гомеоморфные графы.

Планарность является существенным свойством графов, которые моделируют коммуникации и связи между объектами на плоскости (дороги между населенными пунктами, водопроводные и газопроводные сети, линии передач электроэнергии, межсоединения на печатных платах электронных устройств и кристаллах интегральных схем). Плоскими графами представляются различные карты, с которыми, в частности, связана известная *проблема четырех красок*: всегда ли можно раскрасить области, на которые плоский граф делит поверхность, так, чтобы никакие две смежные области не были окрашены в одинаковый цвет и чтобы при этом было использовано не более четырех цветов? Доказано, что для такой раскраски в любом случае достаточно пяти красок, но никто еще не привел примера, когда пять красок действительно необходимы. Проблема остается нерешенной, несмотря на огромные усилия многих выдающихся математиков, которые штурмуют ее более столетия.

14. Графы и отношения. Пусть на множестве X задано бинарное отношение A. Ему соответствует ориентированный граф, вершины которого отображают элементы из X, а дуга (x_i, x_j), где $x_i, x_j \in X$, существует тогда и только тогда, когда $x_i A x_j$. Обратно, множество ориентированных дуг графа (без строго параллельных дуг), заданных упорядоченными парами (x_i, x_j), можно рассматривать как бинарное отношение на множестве X.

Если бинарное отношение xAy устанавливает связь между элементами x из множества X и элементами y из множества Y ($x \in X$, $y \in Y$), то граф такого отношения будет ориентированным биграфом.

Следует заметить, что в общем случае орграф представляет нечто большее, чем бинарное отношение. Любое бинарное отноше-

ние, определенное на некотором множестве, можно представить соответствующим орграфом, вершины которого соответствуют элементам этого множества. Однако орграф с параллельными дугами позволяет отражать более общие связи между объектами, чем бинарные отношения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие части города (см. рис. 7) нужно соединить мостами, чтобы задача о кенигсбергских мостах имела положительное решение? Достаточно ли для этого одного дополнительного моста?

2. Постройте граф отношений между сотрудниками Вашего подразделения: а) x_i связан по работе с x_j; б) x_i подчинен x_j ($x_i, x_j \in X$, где X — множество сотрудников подразделения). Охарактеризуйте полученные графы: что в них общего и чем они различаются? В каких случаях может получиться несвязный граф?

3. Постройте граф района, в котором Вы живете, отметив направления ребер для улиц с односторонним движением. Преобразуйте полученный граф в орграф. Можно ли проложить путь между любыми двумя вершинами, не нарушая установленных направлений движения и не выезжая за пределы района?

4. На графе, построенном в задаче 3, укажите (хотя бы приблизительно) расстояния между смежными вершинами. Найдите кратчайшие маршруты, соединяющие интересующие Вас вершины.

5. Существует ли эйлеров цикл для графа, построенного в задаче 3, и что он означает? Попытайтесь найти для этого графа гамильтонов цикл (если он существует).

6. Пометьте вершины и ребра графа (см. рис. 14, *а*) буквами или цифрами и выполните следующие упражнения:

а) Запишите все ребра как неупорядоченные пары вершин и отметьте кратные ребра и петли.

б) Определите степени всех вершин, а также суммы степеней всех вершин и всех нечетных вершин графа (что можно сказать об этих суммах?).

в) Является ли граф однородным (если нет, то добавлением ребер преобразуйте его в однородный)?

г) К какому типу относится рассматриваемый граф (простой, мультиграф, псевдограф)?

д) Запишите матрицу смежности графа.

7 Пометьте вершины и ребра орграфа (см. рис. 8, *а*) буквами или цифрами и выполните следующие упражнения:

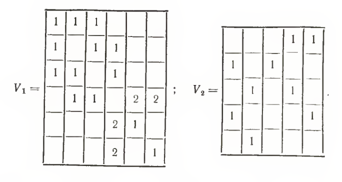
а) Запишите все ребра как упорядоченные пары вершин и отметьте параллельные ребра.

б) Определите положительные и отрицательные степени всех вершин и соответственно их суммы (что можно сказать об этих суммах?).

в) Запишите матрицу инцидентности графа.

8. Докажите, что кубический граф имеет четное число вершин. Обобщается ли свойство четности вершин на однородные графы высших степеней?

9. Постройте графы, соответствующие следующим матрицам смежности:



$$V_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 & & \\ & 1 & 1 & & 2 & 2 \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & & 1 \end{array}\ ; \quad V_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \end{array}\ .$$

Охарактеризуйте полученные графы и запишите для них матрицы инцидентности.

10. Расположите на плоскости четыре вершины, как в графе на рис. 11, *а*, но обозначення вершин v_2 и v_3 взаимно переставьте. На множестве обозначенных таким образом вершин постройте граф, изоморфный исходному.

11. Выполните следующие упражнения с графом (см. рис. 11, *а*):

а) Найдите какие-либо маршруты длины 5 и длины 8 между вершинами v_1 и v_4.

б) Определите все цепи и простые цепи между вершинами v_1 и v_4.

в) Определите все простые циклы графа.

12. Выполните следующие упражнения с орграфом (см. рис. 8, *а*).

а) Найдите все ориентированные маршруты от вершины *a* к вершине *e*.

б) Найдите все пути и простые пути от вершины *a* к вершине *e*.

в) Определите все простые контуры графа.

13. В орграфе (см. рис. 8, *а*) измените направления дуг таким образом, чтобы он преобразовался в ациклический граф. Постарайтесь найти общее правило такого преобразования.

14. Для графа (см. рис. 12) постройте:

а) часть, состоящую из четырех вершин и пяти ребер;

б) суграф с четырьмя, пятью и шестью ребрами.

15. Два графа $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются непересекающимися, если $V' \cap V'' = \varnothing$ и $E' \cap E'' = \varnothing$. Постройте непересекающиеся подграфы графа рис. 12, содержащие по три вершины.

16. Постройте блоки, на которые разбивается сепарабельный граф (см. рис. 14, *а*).

17. Постройте все различные деревья с восьмью вершинами (их должно быть 23).

18. Постройте все покрывающие деревья и их дополнения для графа (см. рис. 11, *а*). Сколько имеется существенно различных деревьев?

19. Постройте покрывающий лес несвязного графа (см. рис. 13).

20. Постройте все прадеревья орграфа (см. рис. 8, *а*) с корнем в вершине *d*.

21. Рассматривая компоненты несвязного графа (см. рис. 13) как блоки, постройте соответствующий сепарабельный граф. Сколько возможно различных вариантов (без учета изолированной вершины G_2)?

22. Покажите, что приведенные на рис. 21 графы неплоские. Какое минимальное число ребер необходимо удалить из графа на рис. 21, *а*, чтобы он превратился в плоский? Сколько имеется различных способов такого превращения с точностью до изоморфизма?

23. Покажите, что графы на рис. 21, *а* и *в* гомеоморфные.

24. Докажите, что при удалении ребра граф остается связным тогда и только тогда, когда это ребро содержится в некотором цикле.

25. Докажите, что $(p, p-k)$-граф при $k \geqslant 2$ всегда является несвязным и состоит не менее, чем из k компонент.

26. Изобразите все неизоморфные простые графы с пятью вершинами (изолированные вершины допускаются), содержащие три, пять, восемь, девять и десять дуг (всего их должно быть 14).

27. Покажите, что число ребер полного графа равно $\frac{1}{2}p(p-1)$, где p — число его вершин.

28. Найдите общее выражение для числа ребер, при котором граф с p вершинами может быть несвязным.

29. Покажите, что любое дерево можно представить как двудольный граф. Какие деревья являются полными двудольными графами?

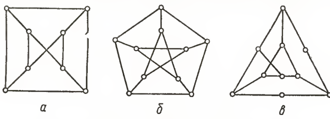


Рис. 21. Неплоские графы.

30. Докажите: а) кубический граф имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда он содержит мост; б) наименьшее число вершин в кубическом графе, имеющем мост, равно 10.

31. Постройте граф, изоморфный графу Понтрягина—Куратовского (см. рис. 19, *б*), в котором внешние ребра образуют шестиугольник. Рассматривая его как подграф полного шестиугольника, нарисуйте дополнение этого подграфа. Укажите характерные свойства полученного дополнения.

32. Покажите, что следующие свойства дерева T равносильны:

а) T связно и не содержит циклов;
б) T не содержит циклов и имеет $p-1$ ребер, где p — число вершин;
в) T связно и имеет $p-1$ ребер;
г) T не содержит циклов, но добавление ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению цикла;
д) T связно, но утрачивает это свойство при удалении любого ребра;
е) всякая пара вершин в T соединена цепью и притом только одной.

5. ЛОГИКА

1. Чем занимается математическая логика? Логика как искусство рассуждений зародилась в глубокой древности. Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в прошлом столетии Джордж Буль и тем самым заложил основы *математической (символической) логики*.

Главная цель применения в логике математической символики заключалась в том, чтобы свести операции с логическими заключениями к формальным действиям над символами. При этом исходные положения записываются формулами, которые преобразуются по определенным законам, а полученные результаты истолковываются в соответствующих понятиях.

Бурное развитие математической логики связано, прежде всего, с задачами обоснования математики, где она используется для доказательства непротиворечивости исходных понятий и правильности рассуждений и выводов математических теорий. Некоторые ученые даже склонны рассматривать логику как одну из наиболее общих наук, частью которой является сама математика.

В последние десятилетия логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке релейно-контактных схем, вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика начинает внедряться в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, лишь бы только они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с такими объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, высокое или низкое напряжение, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и т. п.). Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют *многозначными*. Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом *многозначной логики*.

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача — структурное моделирование таких систем.

2. Булевы функции. Объекты с двумя возможными состояниями характеризуются *булевыми переменными*, которые способны принимать лишь два различных значения. Для обозначения этих двух

значений обычно используются цифры 0 и 1 или буквы Л (ложно) и И (истинно).

Отношения между булевыми переменными представляются *булевыми функциями*, которые подобно числовым функциям могут зависеть от одной, двух и, вообще, n переменных (аргументов). Запись $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает, что y — функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Важнейшая особенность булевых функций состоит в том, что они, как и их аргументы, принимают свои значения из двухэлементного множества $\{0,1\}$, или {И, Л}, т. е. характеризуются одним из двух возможных состояний.

Функции небольшого числа переменных можно задавать с помощью таблиц, подобных таблицам сложения и умножения одноразрядных чисел. Для этого нужно только указать значения функции для каждой комбинации значений ее аргументов. Основными в двузначной логике являются следующие три функции.

Отрицание — функция $y = f(x)$, принимающая значения 1, когда $x = 0$, и значение 0, когда $x = 1$; она обозначается $y = \bar{x}$ (читается «не x»).

Дизъюнкция — функция $y = f(x_1, x_2)$, принимающая значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 0; она обозначается $y = x_1 \vee x_2$ (читается «x_1 или x_2»).

Конъюнкция — функция $y = f(x_1, x_2)$, принимающая значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 1; она обозначается $y = x_1 \wedge x_2$ (читается «x_1 и x_2»).

Таблицы для этих функций имеют вид:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

$x_1 \vee x_2$

x_1	x_2 = 0	x_2 = 1
0	0	1
1	1	1

$x_1 \wedge x_2$

x_1	x_2 = 0	x_2 = 1
0	0	0
1	0	1

3. **Логические операции и формулы.** Булевы функции можно рассматривать как *логические операции* над величинами, принимающими два значения — 0 и 1. Отрицание — это *одноместная* операция, а дизъюнкция и конъюнкция — *двухместные операции*. При этом выражения $\bar{x}, x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2$ являются *логическими формулами*.

Более сложные формулы получаются замещением входящих в них переменных другими логическими формулами, которые обычно заключаются в скобки. Например, положив $x_1 = \bar{a}$ и $x_2 = b \wedge c$ из $x_1 \vee x_2$, имеем $(\bar{a}) \vee (b \wedge c)$. Каждая формула определяет

некоторую булеву функцию. Ее значение при различных значениях переменных определяется на основании таблиц функций, приведенных в (2). Так, при $a = 0$, $b = 1$ и $c = 0$ имеем: $x_1 = \bar{a} = \bar{0} = 1$, $x_2 = b \wedge c = 1 \wedge 0 = 0$ и $x_1 \vee x_2 = \bar{a} \vee (b \wedge c) = 1 \vee 0 = 1$. Аналогично получаем значения функции и при других комбинациях значений аргументов.

Две функции (как и определяющие их формулы) считаются *равносильными*, если при любых значениях аргументов эти функции (формулы) принимают одинаковые значения. Равносильные функции соединяются знаком равенства, например: $(x \wedge y) \vee \bar{z} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z}$ или $((x \vee \bar{x}) \wedge y) \vee (y \vee x) = x \vee y$. Равносильность функций проверяется по таблицам основных операций, причем необходимо сравнить их значения для всех комбинаций значений переменных.

4. Булева алгебра. Множество всех булевых функций вместе с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции образует *булеву алгебру*.

На основе определения основных операций нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств (свойств) булевой алгебры: коммутативность

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

ассоциативность

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

дистрибутивность

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

свойство констант

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x;$$

свойство отрицания

$$x \vee \bar{x} = 1, \quad x \wedge \bar{x} = 0.$$

5. Тождественные преобразования. Приведенные свойства позволяют получить ряд других важных законов и тождеств уже без обращения к таблицам соответствия: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ (*законы де Моргана*), $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$ (*законы поглощения*) $x \vee x = x \wedge x = x$ (*законы идемпотентности*), а также тождества $x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$; $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$; $= (x \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})$; $\bar{\bar{x}} = x$; $\bar{1} = 0$; $\bar{0} = 1$; $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$ и т. д.

Так, законы идемпотентности доказываются следующими преобразованиями: $x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = x \vee (x \wedge \bar{x}) = x \vee 0 = x$; $x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge$

$\wedge (x \vee \bar{x}) = x \wedge 1 = x$. Используя полученные соотношения, имеем: $x \vee 1 = x \vee (x \vee \bar{x}) = (x \vee x) \vee \bar{x} = x \vee \bar{x} = 1$; $x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge \bar{x}) = x \wedge \bar{x} = 0$. Доказательство законов поглощения имеет вид: $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$; $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee (y \wedge 0) = x \vee 0 = x$. Соотношение $\bar{\bar{x}} = x$ доказывается следующим образом: из $x \vee \bar{x} = 1$ по закону коммутативности следует $\bar{x} \vee x = 1$, откуда сравнением с $\bar{x} \vee \bar{\bar{x}} = 1$ имеем $x = \bar{\bar{x}}$.

Интересно доказательство закона де Моргана. На основании свойств отрицания равенство функций $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$ должно означать, что $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ и $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$. Действительно, $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = ((x \vee y) \vee \bar{x}) \wedge ((x \vee y) \vee \bar{y}) = ((x \vee \bar{x}) \vee y)) \wedge (x \vee (y \vee \bar{y})) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$, а также $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) = ((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y}) \vee ((y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x}) = (0 \wedge \bar{y}) \vee (0 \wedge \bar{x}) = (\bar{y} \wedge 0) \vee (\bar{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$. Следовательно, соотношение $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ доказано. Аналогично доказывается и второй закон.

6. Упрощение записи формул. Операции дизъюнкции и конъюнкции удовлетворяют законам коммутативности и ассоциативности. Поэтому если переменные или формулы связаны только посредством одной из этих операций, то их можно выполнять в любом порядке, а формулы записывать без скобок. Например: $((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4)) \vee x_5 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$, а также $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \wedge (x_4 \wedge x_5)) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5$.

Если считать, что операция конъюнкции должна предшествовать операции дизъюнкции (конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции), то можно опустить скобки, в которые заключены формулы со знаком конъюнкции. При наличии скобок в первую очередь должны выполняться операции внутри скобок, независимо от их старшинства. Обычно опускают также скобки, в которые заключены формулы со знаком отрицания.

Еще одно упрощение связано с символикой. Знак конъюнкции в формулах можно опустить и вместо $x \wedge y$ писать xy. Операцию конъюнкции часто называют *логическим умножением*, а операцию дизъюнкции — *логическим сложением*.

С учетом приведенных условий запись существенно упрощается. Например, формуле $(x \wedge (y \wedge \bar{z})) \vee (\overline{(\overline{x \vee y}) \wedge z})$ соответствует запись $xy\bar{z} \vee \overline{\overline{x \vee y}\, z}$.

7. Переключательные схемы. В качестве одной из интерпретаций булевых функций рассмотрим электрическую схему, состоящую из источника напряжения (батареи), лампочки и одного или двух ключей (x_1 и x_2). Ключи управляются кнопками с двумя состояниями: кнопка нажата (1) и кнопка отпущена (0). Если в исходном состоянии ключ разомкнут, то при нажатии кнопки он замыкается.

Ключ может быть сконструирован и так, что в исходном состоянии он замкнут, тогда нажатие кнопки означает его размыкание, т. е. приводит к противоположному результату. Поэтому нормально замкнутые ключи обозначим через $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

При соответствующих состояниях кнопок лампочка принимает одно из двух состояний: горит (1) и не горит (0). Состояния кнопок отождествляются со значениями булевых переменных x_1 и x_2, а состояние лампочки — со значением функций этих переменных

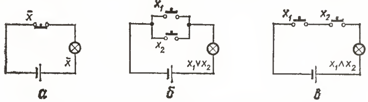


Рис. 22. Переключательные схемы, соответствующие операциям отрицания (*а*), дизъюнкции (*б*) и конъюнкции (*в*).

Операции отрицания соответствует схема с одним нормально замкнутым ключом (рис. 22, *а*). Если кнопка нажата ($x = 1$), ключ разомкнут и лампочка не горит, т. е. $f(x) = 0$; при отпущенной кнопке ($x = 0$) ключ замкнут и лампочка горит, т. е. $f(x) = 1$. Операциям дизъюнкции и конъюнкции соответствуют схемы с двумя нормально разомкнутыми ключами (рис. 22, *б*, *в*). Легко убедиться, что в схеме рис. 22, *б* лампочка горит при нажатии хотя бы одной из кнопок, а в схеме рис. 22, *в* — только при нажатии обеих кнопок одновременно.

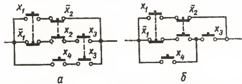


Рис. 23. Переключательная схема, реализующая логическую функцию (*а*), и упрощенная схема (*б*).

Любую сложную булеву функцию можно представить некоторой переключательной схемой. На рис. 23,*а* показана схема, реализующая функцию $y = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_3x_4$. Та же функция представляется равносильной формулой $y = x_1\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1x_2 \vee x_4)x_3$, которой соответствует другая более простая схема (рис. 23, *б*). Следует иметь в виду, что ключи, обозначенные одинаковыми буквами (x или $\bar{x}$), связаны между собой и управляются общей кнопкой.

В реальных устройствах используются ключи различной конструкции и физической природы (механические, электромагнитные, электронные, гидравлические, пневматические и т. д.). Однако при реализации логических функций многие технические особенности не имеют значения. Существенными свойствами контактных схем

являются исходные положения ключей (нормально разомкнуты или нормально замкнуты) и способ их соединения между собой и внешними устройствами. Эта информация полностью отображается графом, ребра которого соответствуют ключам, а вершины — точкам их соединения. Ребра нормально разомкнутых ключей обозначаются соответствующей переменной (x), а нормально замкнутых — отрицанием переменной ($\overline{x}$). Например, контактная схема (рис. 23, *б*) изображается графом, как показано на рис. 24, *а*.

При изображении контактных схем графами принимаются некоторые специфические условия и упрощения. Обычно переменные обозначаются в разрывах линий, изображающих ребра. При этом

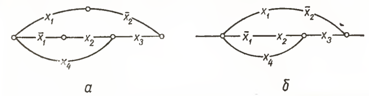


Рис. 24. Граф переключательной схемы (*а*) и его упрощенное изображение (*б*).

ребрами считаются только такие линии, которые обозначены какой-либо переменной или ее отрицанием. Другие линии, не являющиеся ребрами графа, могут изображать входы и выходы схемы, связи с другими схемами и т. п. Кроме того, вершины второй степени могут не изображаться, так как им инцидентны пары последовательно соединенных ребер, из которых каждое обозначено соответствующей переменной. На рис. 24, *б* показана контактная схема в обычно принятом виде.

8. Высказывания. Пусть x_1 и x_2 — некоторые *высказывания*, которые могут быть истинными (1) или ложными (0), например: «Я пойду в театр» (x_1) и «Я встречу друга» (x_2). Дизъюнкцией $x_1 \vee x_2$ является сложное высказывание «Я пойду в театр *или* встречу друга», а конъюнкцией $x_1 \wedge x_2$ — высказывание «Я пойду в театр *и* встречу друга».

Ясно, что если высказывание истинно, то его отрицание ложно. Сложное высказывание, образованное дизъюнкцией двух высказываний, истинно при условии, что истинно хотя бы одно из них. Сложное высказывание, образованное конъюнкцией двух истинных высказываний истинно, если истинны оба эти высказывания одновременно.

Итак, высказывания можно рассматривать как двоичные переменные, а связки «не», «или», «и», с помощью которых образуются сложные высказывания,— как операции над этими переменными. В алгебре высказываний используются еще две операции: *импли-*

кация $x_1 \to x_2$, соответствующая связке «если, то» и *эквиваленция* $x_1 \sim x_2$, соответствующая связке «если и только если». Они задаются следующими таблицами:

$x_1 \to x_2$

x_1	x_2	
	0	1
0	1	1
1	0	1

$x_1 \sim x_2$

x_1	x_2	
	0	1
0	1	0
1	0	1

В нашем примере импликацией будет высказывание: «*Если* я пойду в театр, *то* встречу друга», а эквиваленцией— «Я пойду в театр, *если и только если* встречу друга». Как видно из таблиц, импликация высказываний ложна только в случае, когда первое из простых высказываний истинно, а второе ложно. Эквиваленция является истинным высказыванием, если оба простые высказывания истинны или ложны одновременно.

Обозначив буквами простые высказывания, можно представить сложное высказывание формулой с помощью соответствующих связок. Например, высказыванию «*Если* давление масла на шарик клапана больше усилия его пружины (x_1), *то* масло открывает клапан (x_2) *и* частично перетекает из нагнетательной полости во впускную (x_3)» соответствует формула $x_1 \to x_2x_3$.

9. Предикаты. Обычно высказывания выражают свойства одного или нескольких объектов. Содержательная часть высказывания играет роль определяющего свойства совокупности объектов, для которых это высказывание истинно, и называется *предикатом*. Например, высказывание «Иванов — отличник» истинно или ложно в зависимости от оценок, которые имеет данный студент. В то же время предикат «x — отличник» определяет подмножество отличников на некотором множестве студентов (группа, курс, факультет). Подставив вместо x фамилии студентов, получим множество высказываний. Совокупность истинных высказываний и будет соответствовать подмножеству отличников.

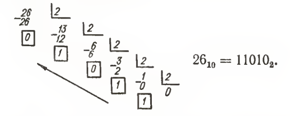
Предикат представляет собой логическую функцию $P(x)$, принимающую, как и булевы функции, значение 0 или 1, но в отличие от них, значения аргумента x выбираются из некоторого множества M объектов ($x \in M$). В общем случае такая функция может зависеть от многих аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающих значения из одного и того же или различных множеств. Ее записывают $P(x_1,$

$x_2, \ldots, x_n$) и называют *n-местным предикатом*. Например: «x — четное число», «x — компонент цепи» — одноместные предикаты $P(x)$; «x брат y», «x меньше y» — двуместные предикаты $P(x, y)$; «x и y — родители z», «x — сумма y и z» — трехместные предикаты $P(x, y, z)$ и т. д. Если аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ замещены конкретными значениями (объектами), то предикат переходит в высказывание, которое рассматривают как *0-местный предикат*.

Так как предикаты способны принимать только значения 0 и 1, то их, как и булевы переменные, можно связывать логическими операциями. В результате получаем формулы, определяющие более сложные предикаты. Так, если $P(x)$ означает «x — инженер», а $Q(x)$ — «x — сотрудник нашего отдела», то $P(x) \wedge Q(x) = R(x)$ есть одноместный предикат «x — инженер и сотрудник нашего отдела» или проще «x — инженер нашего отдела». Очевидно, если P — множество инженеров, а Q — множество сотрудников данного отдела, то этот предикат соответствует пересечению $P \cap Q$. Таким образом, имеет место тесная связь между логикой предикатов и операциями над множествами.

10. Двоичная арифметика. В позиционной системе счисления с основанием m любое целое неотрицательное число a записывается последовательностью различных цифр $x_1x_2 \ldots x_n$, что означает $a = x_1m^{n-1} + x_2m^{n-2} + \ldots + x_nm^0$. Десятичная система использует цифры 0, 1, ..., 9, например: $2907 = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \times 10 + 7 \cdot 10^0$. Для двоичной системы счисления достаточно двух цифр, которые обозначаются 0 и 1. При этом последовательность $x_1x_2 \ldots x_n$ таких цифр является записью двоичного n-разрядного числа $x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + x_n \cdot 2^0$.

Перевод целых десятичных чисел в двоичные осуществляется последовательным делением исходного числа и каждого частного на два. Получаемые при этом остатки (0 или 1), записанные в обратном порядке, и дают представление десятичного числа в двоичной системе счисления. Например:

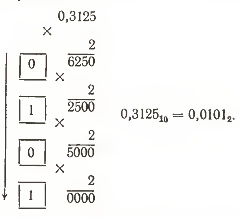


$$26_{10} = 11010_2.$$

Действительно, проверяя полученный результат, получаем $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26$.

Дробное число переводится в двоичную систему счисления методом последовательного умножения на два. При этом каждый раз

после запятой двоичного числа записывается 0 или 1 соответственно целой части результата умножения. Последовательное умножение продолжается до тех пор, пока дробная часть не обратится в нуль или пока не получим требуемое количество двоичных знаков после запятой. Например, двоичное представление числа 0,3125 получается следующим образом:



$$0{,}3125_{10} = 0{,}0101_2.$$

Проверка полученного результата дает: $0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$.

Если число является смешанным, т. е. его целая и дробная части отличны от нуля, то оно переводится в двоичную систему раздельно: целая часть — последовательным делением, а дробная — последовательным умножением.

Арифметические операции над числами сводятся к операциям сложения и умножения одноразрядных чисел. В двоичной системе счисления умножение задается таблицей конъюнкции: $0 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$ и $1 \cdot 1 = 1$. Сложение выполняется по правилу: $0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 1$; $0 + 1 = 1$ и $1 + 1 = 10$ (10 — это двоичное число, соответствующее десятичному числу 2). Операции над двоичными числами выполняются по правилам, аналогичным для десятичных чисел, но эти правила предельно упрощаются (особенно для умножения). Например, десятичные операции $41 + 27 = 68$ и $41 \cdot 5 = 205$ выглядят следующим образом:

$$+\begin{array}{r}101001\\ 11011\\ \hline 1000100\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}101001\\ 101\\ \hline 101001\\ +\;101001\\ \hline 11001101\end{array}.$$

Как видно, умножение двоичных чисел сводится к сложению чисел, образованных сдвигом влево первого сомножителя. Поразрядное сложение осуществляется в соответствии с таблицей

x_1	x_2	
	0	1
0	0	1
1	1	0

причем в случае $x_1 = x_2 = 1$ образуется единица переноса в старший разряд. Операция, задаваемая этой таблицей, называется *сложением по модулю 2*. Если при сложении перенос не учитывается, то эта операция вместе с операцией умножения определяет на множестве двоичных чисел *арифметику по модулю 2*.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Подстановкой в формулу $a \vee b$ переменных запишите новые формулы и упростите их, если это возможно: а) $a = \bar{x}y$, $b = z$, б) $a = xy$, $b = x\bar{y}$; в) $a = x$, $b = xy$; г) $a = x$, $b = \bar{x}y$; д) $a = xy$, $b = c \vee d$, $c = xz$, $d = y\bar{z}$.

2. Запишите таблицы соответствия для следующих формул: а) $x\bar{x}$; б) $xy \vee \bar{x}$; в) $(p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q})$; г) $\overline{x \vee y}$.

3. Проверьте с помощью таблиц соответствия следующие тождества: а) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$; б) $x(x \vee y) = x$; в) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

4. Постройте переключательные схемы для обеих частей приведенных ниже тождеств и убедитесь в том, что эти схемы функционируют одинаково:

а) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} = y \vee \bar{x}\bar{y}$;
б) $(x \vee y)(x \vee z) = x \vee yz$;
в) $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y} = x$.

5. Упростите следующие формулы:

а) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$;
б) $xy \vee z \vee \overline{xy \vee z}\,(zv \vee x)$;
в) $x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz$;
г) $(x \vee y)(\overline{xy} \vee z) \vee \bar{z} \vee (x \vee y)(u \vee v)$.

6. Комитет, состоящий из трех членов, принимает решения большинством голосов. Постройте такую схему, чтобы голосование каждого члена комитета производилось нажатием своей кнопки и чтобы лампочка загоралась, если и только если решение принято. Какое наименьшее количество ключей необходимо?

7. Постройте схему освещения так, чтобы лампочка могла независимо включаться и выключаться двумя выключателями.

8. Преобразуйте формулы к такому виду, чтобы операция отрицания применялась только к логическим переменным:

а) $\overline{xy\vee\bar z}$; б) $x\,(xy\vee\overline{yz}\vee y\overline{\vee zv}$.

9. Убедитесь с помощью таблиц соответствия в справедливости выражений для импликации и эквиваленции: а) $x_1\to x_2=\bar x_1\vee x_2$; б) $x_1\sim x_2=x_1x_2\vee\bar x_1\bar x_2=(x_1\vee\bar x_2)(\bar x_1\vee x_2)$; в) $x_1\sim x_2=(x_1\to x_2)(x_2\to x_1)$.

10. Постройте переключательные схемы для импликации и эквиваленции в соответствии с тождествами, приведенными в задаче 9.

11. Запишите формулу, соответствующую переключательной схеме рис. 25. Упростите эту формулу и постройте более простую схему.

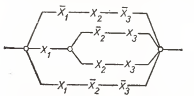


Рис. 25. Граф переключательной схемы к задаче 11.

12. Постройте переключательные схемы по формулам:

а) $(x_1\vee x_2\bar x_3)(x_1x_2\vee x_3x_4)$;

б) $(\bar x_1(x_2\vee\bar x_3)\vee\bar x_4)\,x_1$.

13. Из простых высказываний x_1 — «испытания проведены» и x_2 — «программа выполнена» образуйте сложные высказывания по формулам: а) $x_1\vee\bar x_2$; б) x_1x_2; в) $x_1\to x_2$; г) $x_1\sim x_2$.

14. Запишите формулы для следующих высказываний, обозначив буквами входящие в них простые высказывания:

а) Давление падает и система не работает.

б) Вычисления выполнены точно или конструкция несовершенна.

в) Проект разработал Андрей или Петр, а эксперимент выполнил Иван.

г) Если будет хорошая погода, мы отправимся на стадион или пойдем за грибами.

д) Программа может быть выполнена, если и только если материалы поступят своевременно.

е) Если я поеду на автобусе, то опоздаю на работу, или я воспользуюсь такси.

ж) Андрей помогает Петру или Петр помогает Андрею, или они помогают друг другу.

15. Запишите формулу, соответствующую высказыванию: «Программа будет выполнена тогда и только тогда, когда закончатся испытания и показатели будут удовлетворительны; если программа не будет выполнена, сотрудники не получат премию или будут пересмотрены технические условия».

16. Даны простые высказывания: x_1 — «идет дождь», x_2 — «очень жарко».

а) Запишите формулу сложного высказывания «Неверно, что идет дождь и очень жарко».

б) Преобразуйте формулу по закону де Моргана и составьте соответствующее высказывание.

в) Убедитесь в тождественности исходного и преобразованного высказываний.

17. Путешественник остановился у развилки дорог, ведущих в пункты A и B, и ему нужно выяснить, в какой именно пункт ведет каждая из дорог. Находившиеся у развилки два человека заявили, что они могут ответить только на один вопрос и что один из них всегда правдив, а другой лжец. Какой вопрос должен задать путешественник, чтобы в любом случае ответ на него содержал необходимую информацию?

а) Решите задачу путем непосредственных рассуждений без применения алгебры логики.

б) Представьте ситуацию в виде сложного высказывания, составленного из простых.

в) Запишите соответствующую формулу и таблицу соответствия.

г) По таблице соответствия сформулируйте искомый вопрос.

18. Высказывание является логически истинным, если соответствующая ему формула тождественно равна единице, и логически ложным, если формула равна нулю. Определите с помощью таблиц соответствия, каким высказываниям соответствуют приведенные ниже формулы (истинным, ложным или ни тем и не другим): а) $p \sim p$; б) $p \to \bar{p}$; в) $(p \vee q) \sim pq$; г) $(p \to \bar{q}) \to (q \to \bar{p})$; д) $(p \to q) \to p$; е) $((p \to q) \to p) \to p$; ж) $\overline{p \vee q} \sim pq$.

19. При $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$ найдите значения каждой из следующих функций:

а) $\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 x_4$;

б) $x_1 x_2 \vee x_3 (x_1 \vee x_4) \vee x_4 (x_2 \vee x_3)$;

в) $x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

г) $(x_1 \vee x_2) \sim x_2 x_3$;

д) $x_1 x_2 \to (x_2 \sim x_3)$;

е) $x_1 x_2 \to (x_3 \to x_2 x_4)$.

20. Пусть X — множество сотрудников отдела и на этом множестве определены относительно переменной $x \in X$ одноместные предикаты $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, означающие соответственно: x — занимается спортом, изучает иностранный язык, имеет изобретения. Расшифруйте предикаты, образованные с помощью следующих логических операций: а) $P(x) \vee Q(x)$; б) $P(x) Q(x)$; в) $\overline{P(x)}\, Q(x) \to R(x)$; г) $Q(x) \sim R(x)$; д) $\overline{R(x)} \sim (Q(x) \vee R(x))$.

21. Пусть V — множество вершин и E — множество ребер графа, причем ребро $e \in E$ соединяет вершины x, $y \in V$. Что означают предикаты $P(x, y)$, $Q(e, x, y)$, $R(x, e)$?

22. Каким десятичным числам соответствуют следующие двоичные числа: а) 1011; б) 1000110; в) 110100111?

23. Переведите в двоичную систему счисления десятичные числа: а) 51; б) 64; в) 125; г) 1000.

24. Выполните в двоичной системе следующие операции над десятичными числами: а) $21 + 37$; б) $31 + 105$; в) $25 \cdot 8$; г) $(8 + 19)11$; д) $24 \cdot 8 - 17$. Проверьте полученные результаты в десятичной системе.

25. Переведите в двоичную систему счисления с точностью до пяти двоичных знаков после запятой числа: а) 0,131; б) 0,25; в) 175,26.

26. Дайте обоснование правил перевода десятичных чисел в двоичные.

27. Сложите двоичные числа 11001110 и 11010111 по обычному правилу и по модулю два. Найдите разность полученных результатов и объясните ее смысл.

6. ВЕРОЯТНОСТИ

1. Случайные события. Познание закономерностей объективного мира позволяет выявлять связи между событиями (или явлениями) и условиями, которые определяют их появление. Если можно указать комплекс условий, при каждой реализации которого событие неизбежно происходит, то это событие называется *достоверным*. Событие, которое заведомо не может произойти при реализации данного комплекса условий, называется *невозможным*. Очевидно,

невозможность события равносильна достоверности противоположного события.

Однако предсказать с полной определенностью наступление того или иного события удается далеко не всегда. Это связано с тем, что часто указываемый комплекс условий не отражает всей совокупности причинно-следственных связей между явлениями. Либо вызывающие данное событие причины еще недостаточно изучены, либо учет всей совокупности причин настолько сложен, что практически целесообразно ограничить комплекс условий наиболее существенными и поддающимися контролю. Возникающая при этом неопределенность является признаком *случайных событий*.

Случайное событие относительно некоторого комплекса вполне определенных условий может произойти, а может и не произойти. Примеры случайных событий: перегорание лампочки через 1000 ч работы, попадание в цель при обстреле тремя снарядами, выпадение пяти очков при бросании игральной кости, победа киевского «Динамо» в предстоящем футбольном чемпионате и т. п.

2. Вероятность. Возможность появления случайного события A при реализации комплекса условий S оценивается количественной мерой, которая называется *вероятностью* и обозначается как $P(A/S)$ или короче $P(A)$. Обычно вероятность достоверного события принимается равной единице, а невозможного события — нулю. Тогда для любого события $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, а вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы.

Интуитивно ясно, что событие тем более вероятно, чем чаще оно происходит в рассматриваемых условиях. Таким образом, вероятность $P(A/S)$ непосредственно связана с *частотой* появления события A при многократном повторении комплекса условий S. С увеличением числа таких повторений, называемых *испытаниями*, частота все более точно характеризует значение вероятности.

Закономерности, присущие случайным событиям, имеют массовый характер и называются *вероятностными* или *стохастическими*. Они играют большую роль в науке и технике при исследовании сложных явлений, проектировании и планировании.

Существует много различных подходов к определению вероятности, которые обычно сводятся к описанию практических приемов ее вычисления. Основные из них рассматриваются ниже.

3. Классическое (комбинаторное) определение. Если из общего числа n равновозможных и несовместных исходов (случаев) событию A благоприятствуют m исходов, то вероятность события A

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Например, при подбрасывании монеты возможны два исхода — выпадение герба (Г) и цифры (Ц). Эти исходы можно считать равно-

возможными (никакой из них не имеет преимущества перед другим) и несовместными (они не могут появиться вместе) Поэтому вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$. Такая же вероятность и выпадения цифры. Полученный результат говорит о том, что при многократных подбрасываниях монеты примерно в половине случаев выпадает герб, причем этот результат тем ближе к действительности, чем больше число испытаний. При подбрасывании двух монет число всех исходов равно четырем {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Вероятность выпадения двух гербов (как и двух цифр) равна $\frac{1}{4}$, но герб и цифра будут появляться с вероятностью $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, поскольку этому событию благоприятствуют два исхода (ГЦ, ЦГ).

В более сложных случаях для подсчета числа исходов используются комбинаторные методы. Пусть, например, известно, что в партии из r изделий имеется s бракованных. Найдем вероятность того, что из выбранных наугад v изделий w окажутся бракованными (событие A). Общее число исходов равно количеству сочетаний из r изделий по v, т. е. C_r^v. Благоприятствующие исходы соответствуют сочетаниям из w бракованных и $v-w$ годных изделий. Так как w бракованных изделий можно выбрать C_s^w различными способами, а $v-w$ годных изделий можно выбрать C_{r-s}^{v-w} способами, то число исходов, благоприятствующих событию A, будет $C_s^w C_{r-s}^{v-w}$ и следовательно,

$$P(A) = \frac{C_s^w \, C_{r-s}^{v-w}}{C_r^v}.$$

Комбинаторное определение возникло в самом начале развития теории вероятностей в связи с изучением шансов на выигрыш в азартных играх. Оно удобно в тех случаях, когда заведомо применимо положение о равновозможности исходов наблюдений (подбрасывание монет или игральных костей, извлечение шаров из урны или карт из колоды, случайная выборка объектов из некоторой их совокупности при статистических исследованиях, распределения и взаимодействия физических частиц и т. п.). В то же время изложенный подход нельзя считать определением вероятности в строгом смысле, так как используемое в нем понятие равновозможности по существу означает равновероятность (вероятность определяется через равновероятность). Кроме того, он оказывается практически бесполезным, если неясно, какие исходы следует считать равновозможными.

4. Статистическое (частотное) определение. Статистический подход основан на регистрации появления события при многократных

наблюдениях в одинаковых условиях. Если событие A появляется в m исходах наблюдений из их общего числа n, то вероятность этого события

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Разумеется, бесконечное число наблюдений n можно представить лишь теоретически, а на практике приходится довольствоваться конечным и часто весьма ограниченным числом наблюдений. Получаемое при этом значение для частоты события m/n называют *статистической вероятностью*. При небольшом числе наблюдений частота события может существенно отклоняться в различных сериях экспериментов, но с увеличением числа наблюдений она все более стабилизируется, сосредоточиваясь вблизи истинного значения вероятности. Так, никто не удивится, если при десятикратных бросаниях монеты герб выпадает 3, 7 или 8 раз. Но если бы при 1000 бросаний герб выпал 300, 700 или 800 раз, то это заставило бы полностью пересмотреть предположение о равновозможности выпадений герба и цифры или искать какой-то скрытый изъян в проведении экспериментов (известны, например, следующие результаты выпадения герба в десяти сериях, каждая из которых состояла из 1000 подбрасываний монеты: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529).

Статистические вероятности широко используют на практике. Например, при изучении большого числа данных установлено, что частота рождения девочек равна 0,482. Если известно, что из 10000 конденсаторов бракованных оказалось 116, то в аналогичных условиях следует ожидать появление негодного конденсатора с вероятностью 0,0116 или 1,16%.

5. Множество событий. Совокупность всех возможных исходов при данном комплексе условий образует *множество элементарных событий*. Любое событие рассматривается как подмножество этого основного множества (универсума).

Например, множество всех исходов при бросании двух игральных костей содержит $6 \cdot 6 = 36$ элементов. Каждый из них представляет собой упорядоченную пару (a, b), где a и b — числа очков, выпавших соответственно при бросании первой и второй кости. Событию, заключающемуся в выпадании дубля, соответствует подмножество A (дубль) $= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, а выпаданию в сумме меньше шести очков — подмножество B (меньше 6 очков) $= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$.

Выбор трех из пяти кандидатов $\{a, b, c, d, e\}$ имеет $C_5^3 = 10$ исходов, которые и образуют множество элементарных событий. Выбору кандидата a (среди трех кандидатов) соответствует событие

A (выбор a) $= \{(abc), (abd), (abe), (acd), (ace), (ade)\}$, выбору кандидатов b и d — событие B (выбор b и d) $= \{(abd), (bcd), (bde)\}$, выбору только одного из кандидатов b или d (но не обоих вместе) — событие C (выбор или b, или d) $= (abc), (abe), (acd), (ade), (bce), (cde)\}$.

6. Несовместные события. События A и B называют *несовместными*, если соответствующие им подмножества не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$ (например, выпадение при бросании двух игральных костей дубля и нечетного числа очков). Если из осуществления события A неизбежно следует событие B, то A является подмножеством B, т. е. $A \subset B$ или $A \cap B = A$ (например, из выпадения дубля следует событие, заключающееся в выпадении четного числа очков). Подобные события всегда совместные.

Событие, заключающееся в реализации несовместных событий A или B, соответствует их объединению $A \cup B$ или дизъюнктивной сумме $A + B$ и его вероятность равна сумме вероятностей $P(A)$ и $P(B)$, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Действительно, если m_A и m_B — числа исходов, благоприятствующих событиям A и B, то появлению события A или B будет благоприятствовать $m_A + m_B$ исходов из общего числа n исходов, поэтому

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Этот вывод естественно обобщается на любое число несовместных событий, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Если объединение попарно несовместных событий составляет основное множество, то появление одного из них является достоверным событием, т. е. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$. Говорят, что такие события образуют *полную систему событий*, а их вероятности удовлетворяют *нормирующему условию*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

В частности, $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, откуда следует выражение для вероятности противоположного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Например, при бросании двух игральных костей полную систему образуют несовместные события: выпадение меньше четырех

очков (A), выпадение четырех или пяти очков (B) и выпадение больше пяти очков (C). Число благоприятствующих им элементарных событий $m_A = 3$, $m_B = 7$ и $m_C = 26$, следовательно, имеем:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \quad P(B) = \frac{7}{36}; \quad P(C) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18};$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{12} + \frac{7}{36} + \frac{13}{18} = 1.$$

7. Независимые события. События A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от исхода другого. Так, число выпавших очков при каждом бросании игральной кости не зависит от результатов предыдущих испытаний. Вероятность вынуть белый шар из урны, в которой находится несколько белых и черных шаров, не зависит от цвета шара, вынутого в предыдущем испытании, если каждый раз он возвращается в урну. Однако если ранее вынутый шар не возвращается,то эта вероятность изменяется после каждого испытания и, следовательно, вероятность его исхода будет зависеть от предыдущего исхода. Пусть, например, в урне находится 2 белых и 3 черных шара. Вероятность вынуть белый шар до испытания равна $\frac{2}{5}$, а после него она становится равной $\frac{1}{4}$, если был вынут белый шар, и $\frac{1}{2}$, если был вынут черный шар.

Событие, заключающееся в реализации как события A, так и события B, соответствует пересечению множеств, и его вероятность при независимости событий A и B равна произведению их вероятностей, т. е.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Это соотношение можно доказать на основе классического определения вероятности (3). Пусть $P(A) = \frac{m_1}{n_1}$ и $P(B) = \frac{m_2}{n_2}$. Если события A и B независимы, то при каждом из m_1 исходов, благоприятствующих событию A, будет также m_2 исходов, благоприятствующих событию B. Значит, число исходов, благоприятствующих свершению как события A, так и события B, будет m_1m_2. Аналогично выводим, что общее число возможных исходов равно n_1n_2. Поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A)P(B).$$

Для нескольких независимых событий формула принимает вид:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Пусть, например, устройство состоит из трех блоков, вероятности безотказной работы которых в течение времени t равны соответ-

ственно $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$ и $P(A_3) = 0{,}9$. Отказ в работе хотя бы одного из блоков приводит к отказу всего устройства, причем отказы блоков происходят независимо. Тогда вероятность безотказной работы устройства $P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \times \times 0{,}9 = 0{,}504$.

8. Условная вероятность. Если события A и B зависимы, то как указывалось в (7), после наступления одного из них, например A, вероятность другого будет отличаться от его вероятности $P(B)$, вычисленной без учета наступления события A. Вероятность события B при условии, что уже произошло событие A, называют *условной вероятностью* и обозначают через $P_A(B)$ или $P(B/A)$. Поэтому формула для вероятности одновременного наступления двух зависимых событий должна быть записана в виде:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B).$$

Например, вероятность вынуть два белых шара из урны, в которой находятся 2 белых и 3 черных шара (предполагается, что вынутый шар не возвращается в урну) равна произведению вероятности вынуть белый шар первый раз (событие A) на вероятность вынуть белый шар второй раз (событие B) при условии, что первым был белый шар (произошло событие A), т. е. $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. Если вынутый шар возвращается в урну, то A и B независимы и $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Из приведенной выше формулы следует выражение

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

которое часто рассматривается как определение условной вероятности, если каким-либо способом определены $P(A \cap B)$ и $P(A)$. Ясно, что для независимых событий $P_A(B)$ совпадает с $P(B)$.

Вероятность одновременного наступления нескольких зависимых событий выражается формулой

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3) \ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

которая получается по индукции из формулы для двух событий. Здесь $P_{A_1A_2\ldots A_{i-1}}(A_i)$ — условная вероятность события A_i, вычисленная при условии, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

9. Объединение событий. Простая формула для вероятности появления одного из несовместных событий (6) нуждается в обобщении, если события совместны. Пусть из n равновозможных исходов событию A благоприятствуют m_A исходов, а событию B — m_B исходов. Так как множества совместных событий пересекаются, то сумма $m_A + m_B$, кроме исходов, благоприятствующих появлению

одного из событий A или B, дважды учитывает m_{AB} исходов, благоприятствующих одновременному появлению A и B. Поэтому из общего числа исходов n появлению событий A или B (или обоих вместе) будут благоприятствовать $m_A + m_B - m_{AB}$ исходов, на основании чего имеем

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B - m_{AB}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n} = $$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Эта формула получена без каких-либо ограничений относительно характера событий A и B:

для зависимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B),$$

для независимых событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

10. Независимость и несовместность. При использовании приведенных соотношений необходимо четко понимать смысл таких свойств событий, как *независимость и несовместность*. Условиями независимости событий можно рассматривать каждое из соотношений

$$P(A \cap B) = P(A)P(B); \quad P_A(B) = P(B).$$

Так, при бросании двух игральных костей вероятности событий A (дубль) и B (меньше 6 очков) равны соответственно $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Одновременному появлению этих событий соответствует подмножество $A \cap B = \{(1,1), (2,2)\}$, и его вероятность $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Так как $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, то рассматриваемые события являются зависимыми. С другой стороны, событие B при условии наступления события A определяется как подмножество $\{(1,1), (2,2)\}$ основного множества $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, и $P_A(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, т. е. не совпадает с $P(B) = \frac{5}{18}$. По соответствующим формулам имеем:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P_A(B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

Очевидно, те же результаты получим, если примем B в качестве дополнительного условия для A. Так как множество $\{(1,1), (1,2),$

$(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$, соответствующее событию B, служит основным для события A, то

$$P_B(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

и, следовательно, получаем:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P_B(A) = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{18};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B)\, P_B(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{18}.$$

Общее условие несовместности событий выражается как

$$P(A \cap B) = 0,$$

что соответствует $A \cap B = \varnothing$. Так, в рассматриваемом примере $A \cap B = \{(1,1), (2,2)\} \neq \varnothing$, следовательно, события A и B совместны.

Независимые события A и B при ненулевых вероятностях $P(A)$ и $P(B)$ всегда совместны. Действительно, из соотношения $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ имеем $P(A \cap B) \neq 0$, а значит, и $A \cap B \neq \varnothing$, что свидетельствует о совместности независимых событий. Однако совместность событий не обязательно влечет их независимость. Из условия $A \cap B \neq \varnothing$ при $P(A) \neq 0$ следует лишь, что $P(A \cap B) \neq 0$ и условная вероятность $P_A(B) \neq 0$. Но может иметь место неравенство $P_A(B) = P(B)$, что означает зависимость рассматриваемых совместных событий.

Зависимые события A и B при ненулевых вероятностях $P(A)$ и $P(B)$ могут быть как совместными, так и несовместными. В первом случае $A \cap B \neq \varnothing$, и поэтому условные вероятности $P_A(B)$ и $P_B(A)$ не равны нулю, т. е. одно из событий может наступить при условии, что произошло другое событие. Во втором случае $A \cap B = \varnothing$, следовательно, условные вероятности зависимых и несовместных событий $P_A(B) = P_B(A) = 0$. Это значит, что при наступлении события A событие B произойти уже не может, а при наступлении события B не может произойти событие A. В то же время из несовместности событий ($A \cap B = \varnothing$) следует их зависимость, что выражается равенством нулю условных вероятностей $P_A(B)$ и $P_B(A)$. Иначе говоря, если события A и B несовместны, то при наступлении одного из них другое произойти не может, т. е. несовместные события не могут быть независимыми.

Несовместность совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует из их попарной несовместности, т. е. из условия

$$A_i \cap A_j = \varnothing \; (i, j = 1, 2, \ldots, n;\; i \neq j).$$

Однако полная независимость совокупности событий, вообще говоря, еще не определяется их попарной независимостью. Кроме условий

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \ (i, j = 1, 2, \dots, n; \ i \neq j),$$

должны выполняться также аналогичные условия для любых сочетаний по 3, 4, ..., n событий. Например, для трех событий условие полной независимости выражается системой соотношений:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2);$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3);$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3);$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Невыполнение хотя бы одного из этих соотношений свидетельствовало бы о том, что события A_1, A_2 и A_3 в совокупности зависимы. На практике, однако, попарная независимость обычно влечет за собой и независимость в совокупности.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какова вероятность угадать все шесть номеров (из 49) в спортлото?
2. Из урны, содержащей 8 белых и 12 черных шаров, вынимают один шар. Какова вероятность того, что он будет белым; что он будет черным?
3. Найдите на основе рассмотрения множества событий при бросании двух игральных костей (каждая кость имеет шесть равноправных граней, пронумерованных от 1 до 6) вероятности следующих событий:

а) на одной кости четыре очка, а на другой — меньше четырех;
б) на одной кости число очков вдвое больше, чем на другой;
в) сумма очков меньше пяти;
г) сумма очков больше восьми.

4. Какова вероятность открыть замок автоматической камеры хранения при случайном наборе цифр (замок открывается только при определенных значениях четырех десятичных цифр)?
5. Оцените вероятность того, что в группе из 23 студентов, по крайней мере, у двух студентов дни рождения совпадают.
6. Партия из 10 телевизоров принимается в магазине при условии, что случайно выбранные два из них окажутся исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных телевизора?
7. Два стрелка производят по одному выстрелу, причем вероятности попадания в цель для них равны соответственно 0,8 и 0,9. Найдите вероятность поражения цели обоими стрелками и вероятность поражения цели хотя бы одним из них.
8. Исследуйте на независимость события A и B при следующих испытаниях:

а) из колоды в 52 карты выбирают одну: A — «туз»; B — «бубна»;
б) бросают две игральные кости: A — «одно очко на первой кости»; B — «четное число очков на второй кости»;
в) бросают три монеты: A — «выпало два герба»; B — «выпало три герба».

9. Исследуйте на несовместность события A и B при бросании игральной кости, если:

а) A — «четыре очка»; B — «четное число очков»;

б) A — «четное число очков»; B — «нечетное число очков».

10. Пять карточек, помеченные цифрами от 1 до 5, тщательно перетасовывают. Какова вероятность того, что:

а) трехзначное число, определяемое номерами трех извлеченных наугад карточек, окажется четным;

б) при случайной раскладке всех карт на пять мест с номерами от 1 до 5 ни одна карточка не займет места, отмеченного ее номером;

в) при поочередном выборе всех карточек их номера будут появляться в возрастающем порядке.

11. Из 30 выстрелов по цели отмечено 25 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

Литература

Великолепный обзор основных идей и методов современной математики дан в трехтомной монографии «Математика, ее содержание, методы и значение», написанной выдающимися советскими математиками и вышедшей в издательстве АН СССР в 1956 г. под ред. академиков А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова и М. А. Лаврентьева. Эта книга является, пожалуй, лучшим образцом сочетания глубины, строгости и доступности изложения. Можно только пожалеть, что изданная сравнительно небольшим тиражом она стала библиографической редкостью.

Аналогичным по содержанию, но более популярным и кратким является сборник статей видных американских ученых «Математика в современном мире» (М., «Мир», 1967). Обращают на себя внимание прекрасно выполненные иллюстрации, которые помогают уяснить смысл сложных математических понятий. Живо и доступно написана книга Дж. Кемени, Дж.Снелла и Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» (М., Изд. иностр. лит., 1963), в которой изложение идей и методов современной математики переплетается с большим количеством примеров из жизни, техники, экономики, биологии. Большое удовольствие может доставить читателю увлекательная и остроумная книга У. У. Сойера «Прелюдия к математике» (М., «Просвещение», 1965), которая аннотирована автором как «рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики».

Интересна и полезна для инженеров книга французских математиков Р. Фора, А. Кофмана и М. Дени-Папена «Современная математика» (М., «Мир», 1966). По словам акад. А. Н. Колмогорова, под редакцией которого издан перевод этой книги, особенно ценной в ней является «достаточно стройная и в то же время простая система основных понятий». Сами авторы представляют ее как справочник по современной математике. Специально на инженеров рассчитаны книга Т. Кармана и М. Био «Математические методы в инженерном деле» (М., Гостехиздат, 1946), коллективная работа под ред. Э. Ф. Беккенбаха «Современная математика для инженеров» (М., Изд. иностр. лит., 1958), А. Анго «Математика для электро- и радиоинженеров» (М., «Наука», 1965). Математические теории и методы в этих книгах рассматриваются в тесной связи с конкретными прикладными задачами.

Имеется много фундаментальных монографий, содержание которых выходит за пределы программы высших технических учебных заведений по математике, но весьма полезных для инженеров. Среди них, прежде всего, необходимо назвать вышедший многими изданиями пятитомный «Курс высшей математики» В. И. Смирнова. Следует также обратить внимание на

трехтомное пособие Г. Джеффриса и Б. Свирлс «Методы математической физики» (М., «Мир», 1969/70).

Из общих курсов прикладной математики можно указать: Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис «Элементы прикладной математики» (М., «Наука», 1972); В. А. Иванов, Б. К. Чемоданов, В. С. Медведев «Математические основы теории автоматического регулирования» (М., «Высшая школа», 1971); И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович «Математические основы современной радиоэлектроники» (М., «Советское радио», 1968); Г. Т. Марков, Е. Н. Васильев «Математические методы прикладной электродинамики» (М., «Советское радио», 1970); Ю. М. Коршунов «Математические основы кибернетики» (М., «Энергия», 1972); В. Г. Лапа «Математические основы кибернетики» (Киев, «Вища школа», 1971); Н. Бейли «Математика в биологии и медицине» (М., «Мир», 1970).

Вопросы математического образования инженеров в современных условиях обсуждаются в сборнике статей видных советских математиков «Математическое образование сегодня» (М., «Знание», 1974).

Среди справочников, пожалуй, наиболее близок к современным потребностям инженера «Справочник по математике для научных работников и инженеров» Г. Корна и Т. Корн (М., «Наука», 1968). Он широко охватывает материал классических и новых разделов математики, являющихся необходимым орудием для инженеров-исследователей. Много внимания уделяется связи рассматриваемых математических вопросов с прикладными задачами. Разумеется, не нуждаются в рекомендации «Справочник по высшей математике» М. Я. Выгодского и «Справочник по математике» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева, выдержавшие по несколько изданий и широко используемые инженерами и учащимися.

Глава 2

МНОЖЕСТВА

Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, атомы, числа, функции, точки, углы и т. д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к очень многим областям знания.

Н. Н. Лузин

Одной из характерных черт современной математики и ее приложений является господство теоретико-множественной точки зрения. Язык теории множеств, включающий большое число различных понятий и связей между ними, все глубже проникает в техническую литературу. Поэтому инженер должен понимать этот язык и уметь им пользоваться.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются с применением кругов Эйлера и диаграмм Венна, а бинарные отношения иллюстрируются на матрицах и графах. Благодаря этому основные понятия теории множеств получают наглядное представление в привычной для инженера графической или табличной форме.

Центральное место в этой главе занимает теория отношений, которая оказалась простым и удобным аппаратом для самых разнообразных задач. На ее основе обобщается понятие функции, применимое не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы. Особо выделяются три типа бинарных отношений: эквивалентность, упорядоченность и толерантность, которые наиболее часто встречаются в практике.

Большое значение в математике имеют отношения, называемые законами композиции, которые ставят в соответствие паре каких-либо элементов третий элемент из одного и того же или из различных множеств. Определяя на некотором множестве один или два таких закона и наделяя их некоторыми свойствами, получаем различные алгебраические системы: группы, кольца, поля, тела и т. д. Эти и подобные им абстрактные понятия являются обобщениями самых разнообразных объектов исследования как в самой математике, так и в специальных областях науки и техники. В качестве примеров рассматриваются наиболее интересные с прикладной точки зрения алгебраические системы (группы подстановок, кольцо многочленов, тело кватернионов, поле комплексных чисел и др.).

Результатом далеко идущих обобщений обычного трехмерного пространства явилось понятие абстрактного пространства, которое в самом общем виде определяется как некоторое множество с заданными на нем отношениями или законами композиции. Конкретизация множеств, свойств отношений и законов композиции приводит к различным типам пространств: метрическим и топологическим, линейным и евклидовым и т. д.

В заключительном параграфе настоящей главы излагаются основные понятия и методы комбинаторики. Ее основная задача состоит в исследовании расположения, упорядочения или выборки элементов конечных множеств в соответствии со специальными правилами и нахождении числа способов, которыми это может быть сделано. Комбинаторные методы находят все более широкое применение в инженерном деле, например, при решении транспортных задач, составлении расписаний, планировании производства, организации снабжения и сбыта, статистических методах контроля, составлении и декодировании шифров для передачи сообщений и т. п.

Восприятие и использование абстрактного языка теории множеств и других разделов современной математики позволяют объединять и исследовать с единых позиций такие понятия и явления, которые ранее казались далекими и различными. При этом важно уметь применять к реальным явлениям те математические понятия и методы, которые наиболее близки к ним, и научиться за общими абстрактными понятиями видеть конкретные образы окружающего мира.

1. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

1. Свойства операций над множествами. Операции над множествами, сформулированные в (1. 2. 7), как и операции над числами, обладают некоторыми свойствами (табл. 1). Эти свойства выражаются совокупностью тождеств, справедливых независимо от конкретного содержания входящих в них множеств, являющихся подмножествами некоторого универсума U.

Тождества (1 а)—(3 а) выражают соответственно *коммутативный*, *ассоциативный* и *дистрибутивный* законы для объединения, а тождества (1 б)—(3 б) — те же законы для пересечения. Соотношения (4 а)—(7 а) определяют свойства пустого множества $\varnothing$ и универсума U относительно объединения, а соотношения (4 б)—(7 б) — относительно пересечения.

Выражения (8 а) и (8 б), называемые *законами идемпотентности*, позволяют записывать формулы с множествами без коэффициентов и показателей степени. Зависимости (9 а) и (9 б) представляют *законы поглощения*, а (10 а) и (10 б) — *теоремы де Моргана*.

Таблица 1

Основные свойства операций над множествами

1а) $A \cup B = B \cup A$	1б) $A \cap B = B \cap A$
2а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	2б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4а) $A \cup \varnothing = A$	4б) $A \cap U = A$
5а) $A \cup \overline{A} = U$	5б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
6а) $A \cup U = U$	6б) $A \cap \varnothing = \varnothing$
7а) $\overline{\varnothing} = U$	7б) $\overline{U} = \varnothing$
8а) $A \cup A = A$	8б) $A \cap A = A$
9а) $A \cup (A \cap B) = A$	9б) $A \cap (A \cup B) = A$
10а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	10б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

11) если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$

12) $\overline{A} = U \setminus A$

13) $\overline{\overline{A}} = A$

14) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

15) $A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

16) $A + B = B + A$

17) $(A + B) + C = A + (B + C)$

18) $A + \varnothing = \varnothing + A = A$

19) $A \subset B$, если и только если $A \cap B = A$ или $A \cup B = B$ или $A \cap \overline{B} = \varnothing$

20) $A = B$, если и только если $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

Соотношения (11)—(20) отражают свойства дополнения, разности, дизъюнктивной суммы, включения и равенства.

2. Принцип двойственности. Первые десять свойств в табл. 1 представлены парами *двойственных (дуальных)* соотношений, одно из которых получается заменой в другом символов: $\cup$ на $\cap$ и $\cap$ на $\cup$, а также $\varnothing$ на U и U на $\varnothing$. Соответствующие пары символов $\cup$, $\cap$ и $\varnothing$, U называются *двойственными (дуальными) символами.*

При замене в любой теореме входящих в нее символов дуальными получим новое предложение, которое также является теоремой *(принцип двойственности или дуальности)*. Тождества (11) и (12) не изменяются при замене символов дуальными, поэтому их называют *самодвойственными.*

Принцип дуальности можно распространить на разность и дизъюнктивную сумму, если использовать тождества (14) и (15). Анало-

гично в соответствии с соотношением (19) можно заменить $A \subset B$ на $A \cap B = A$ или $A \cup B = B$. Но поскольку дуальным $A \cap B = A$ есть $A \cup B = A$, то дуальным $A \subset B$ следует считать $B \subset A$. Поэтому, расширяя принцип дуальности на выражения, в которые входит символ включения, необходимо при переходе к дуальному выражению все знаки $\subset$ заменить на $\supset$ и обратно.

3. Метод доказательства. Доказательство тождеств (табл. 1) основано на отношении принадлежности. Чтобы убедиться, например, в справедливости тождества (3 а), положим $x \in A \cup (B \cap C)$, тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то x принадлежит объединению A с любым множеством, т. е. $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, следовательно, x есть элемент пересечения множеств $A \cup B$ и $A \cup C$, т. е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$, следовательно, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, т. е. и в этом случае x есть элемент пересечения тех же множеств. Таким образом, доказано $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Аналогично доказывается и соотношение $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. В соответствии с определением равенства множеств приходим к требуемому тождеству $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Важно отметить, что любая теорема алгебры множеств и, в частности, соотношения, приведенные в табл. 1, выводимы из первых пяти свойств, которые в свою очередь доказываются только в терминах отношения принадлежности. Это можно рассматривать как иллюстрацию аксиоматического подхода к алгебре множеств. Например, соотношение (8 *а*) доказывается следующими преобразованиями с использованием тождеств (4 б), (5 а), (3 а), (5 б) и (4 а): $A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup (A \cap \bar{A}) = A \cup \varnothing = A$.

4. Обобщение операций над множествами. Из коммутативности и ассоциативности операции объединения следует, что объединение нескольких множеств можно выполнить последовательно объединяя эти множества, причем порядок следования множеств не влияет на результат. Так, если A, B и C — множества, то $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$ и т. д. Следовательно, *объединение совокупности множеств* можно выразить соотношением

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

которое представляет собой множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_i.

Аналогично обобщается и операция пересечения, обладающая теми же законами, что и объединение. *Пересечение совокупности множеств* выражается соотношением

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

которое представляет собой множество элементов, принадлежащих одновременно всем множествам A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ данной совокупности.

Используя приведенные соотношения, можно обобщить любые другие соотношения, в которые входят операции объединения и пересечения. Так, формулы де Моргана для совокупности множеств запишем следующим образом:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

Более того, подобные соотношения можно использовать и в случаях, когда совокупность содержит бесконечное число множеств. При этом обычно вместо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ пишут $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ или проще $\bigcup_{i} A_i$.

5. Тождественные преобразования. Алгебра множеств представляет собой теоретико-множественный аналог обычной алгебры действительных чисел и основана на свойствах операций над множествами. Одним из разделов алгебры множеств являются *тождественные преобразования*, с помощью которых можно упрощать или преобразовывать к удобному виду различные выражения, содержащие множества. Такие преобразования осуществляются последовательным применением соответствующих свойств операций над множествами. Примеры:

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C] =$$
$$= [(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})] \cap C = [(A \cap B) \cup \overline{(A \cap B)}] \cap C = U \cap C = C;$$
$$(M \setminus N) \cap (N \setminus M) = (M \cap \overline{N}) \cap (N \cap \overline{M}) = M \cap (\overline{N} \cap N) \cap \overline{M} =$$
$$= M \cap \varnothing \cap \overline{M} = \varnothing.$$

Второй пример, в частности, иллюстрирует высказанное в (1. 2. 2) положение о роли пустого множества. Совсем не очевидно, что множество, заданное выражением $(M \setminus N) \cap (N \setminus M)$, пустое. Это становится ясным только после выполнения соответствующих преобразований. Если бы пустое множество не было введено, то подобные выражения не имели бы смысла.

6. Уравнения с множествами. Наряду с тождествами, справедливыми при любых значениях входящих в них множеств (подмножеств универсума U), алгебра множеств рассматривает уравнения, которые содержат фиксированные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и подлежащие определению подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_m$. В простейшем случае в уравнение входит одно такое подмножество X. Требуется ответить на вопрос, при каких условиях уравнение имеет решение и, если эти условия соблюдаются, найти все такие решения, т. е. определить X.

Решение уравнения с одним подмножеством X, подлежащим определению, основывается на последовательности тождественных преобразований:

1. В соответствии со свойством 20 (табл. 1) равенство преобразуется в дизъюнктивную сумму его левой и правой частей, которая приравнивается пустому множеству.

2. Полученное уравнение преобразуется к виду $(M \cap X) \cup \cup (N \cap \overline{X}) = \varnothing$, где M и N — некоторые множества, не содержащие X (можно показать, что любое уравнение с правой частью $\varnothing$ приводится к такому виду).

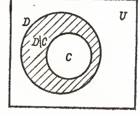
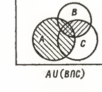


Рис. 26. Круги Эйлера, иллюстрирующие условие существования решения уравнения $X \cup C = D$.



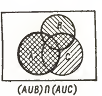


Рис. 27. Круги Эйлера для доказательства тождества $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Так как объединение множеств пусто только при условии, что каждое из них также пустое множество, преобразованное уравнение запишем зависимой системой двух уравнений: $M \cap X = \varnothing$ и $N \cap \overline{X} = \varnothing$.

4. Пара уравнений (а следовательно, и исходное уравнение) имеет смысл тогда и только тогда, когда $N \subset X$ и $X \subset \overline{M}$ (свойство 19 табл. 1). Это значит, что условием существования решения является $N \subset \overline{M}$ (свойство транзитивности отношения включения), а решением уравнения — любое множество X такое, что $N \subset X \subset \overline{M}$.

Пример: $X \cup C = D$.

1) $(X \cup C) + D = \varnothing$;

2) $[(X \cup C) \cap \overline{D}] \cup [\overline{(X \cup C)} \cap D] = [(X \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D})] \cup$
$\cup [\overline{X} \cap \overline{C} \cap D] = (X \cap \overline{D}) \cup [(C \cap \overline{D}) \cap (X \cup \overline{X})] \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$
$= (\overline{D} \cap X) \cup (C \cap \overline{D} \cap X) \cup (C \cap \overline{D} \cap \overline{X}) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$
$= \{ [\overline{D} \cup (C \cap \overline{D})] \cap X \} \cup \{ [(C \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{C})] \cap \overline{X} \} =$
$= (\overline{D} \cap X) \cup [(C + D) \cap \overline{X}] = \varnothing$;

3) $\overline{D} \cap X = \varnothing$ и $(C + D) \cap \overline{X} = \varnothing$;

4) Условие существования решения $C + D \subset D$ или $C \subset D$, причем уравнению удовлетворяет множество X такое, что $C +$

$+ D \subset X \subset D$. Если $C \subset D$, то $C \cap \bar{D} = \varnothing$ и $C + D = \varnothing \cup$ $\cup (\bar{C} \cap D) = D \cap \bar{C} = D \setminus C$, поэтому $D \setminus C \subset X \subset D$. Следовательно, любое X, которое входит в D и содержит дополнение множества C до D, является решением уравнения $X \cup C = D$ (на рис. 26 X обязательно содержит заштрнхованную область и может включать любое подмножество множества C).

7. Круги Эйлера в алгебре множеств. До сих пор круги Эйлера использовалнсь в качестве наглядной иллюстрации операций над множествамн и теоретико-множественных соотношений. Но их можно нспользовать н для доказательства этих соотношеннй. Так, желая доказать свойство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \cap (A \cup C)$, рассмотренное в (3), можно было построить области, соответствующие левой н правой частн этого выражения (рис. 27), и выяснить совпадают они или нет. При совпаденин областей тождество справедливо, а при несовпадении оно не имеет места.

Круги Эйлера часто нспользуют также для графнческого выполнения тождественных преобразований. Так, преобразованне соотношения $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C)$ из (5) можно представить, как показано на рис. 28, где наклонная штрнховка соответствует $A \cap B \cap C$, вертнкальная — $\bar{A} \cap C$ и горизонтальная — $\bar{B} \cap C$. Объединение этих областей, как и следовало ожидать, совпадает с C.

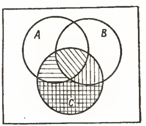


Рис. 28. Круги Эйлера для тождественного преобразования $(A \cap B \cap C) \cup \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) = C$.

Однако прн решении уравнений применение кругов Эйлера связано с прннцнпиальнымн трудностями. Так, решая уравнение $X \cup C = D$, нужно построить кругн для X и C так, чтобы их объеднением было D. Даже прнняв во вниманне, что $C \subset D$, н выполнив построения (см. рис. 26), необходимо объяснить, как образуются областн, соответствующие значениям X. Таким образом, круги Эйлера не содержат полной информации о решении уравнения и его свойствах.

8. Диаграммы Венна. Графнческие методы алгебры множеств основаны также на *диаграммах Венна*. Построенне диаграммы начннается с разбиения плоскостн на 2^n ячеек с помощью n фнгур (замкнутых лнннй), где n — чнсло различных множеств, участвующнх в данной совокупности соотношеннй. При этом каждая последующая фнгура должна иметь одну и только одну общую область с каждой из ранее построенных фигур. Такое разбнение называют *символом Венна*. На рис. 29 показан снмвол Венна для $n = 3$, разбивающнй плоскость на 8 ячеек (внешняя область также считается

ячейкой). Для определенного количества n переменных символ Венна имеет стандартный вид.

Замкнутые области символа Венна, как и круги Эйлера, соответствуют переменным (множествам $A_1, A_2, ..., A_n$), а каждая ее область — пересечению $\prod_{i=1}^{n} \tilde{A}_i$, где символ $\sim$ указывает, что под знаком пересечения стоит соответствующая переменная A_i или ее дополнение $\bar{A}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. При этом внешняя область соответствует пересечению дополнений всех переменных $\prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cap \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_n$. Универсум отождествляется с плоскостью, которая может ограничиваться замкнутой линией, образующей какую-нибудь фигуру (прямоугольник, круг или овал).

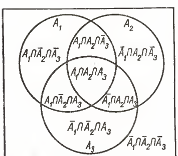


Рис. 29. Символ Венна при $n=3$.

Система теоретико-множественных соотношений отображается на символ Венна выделением (штриховкой) тех ячеек, которые соответствуют пустым подмножествам. В результате и получаем диаграмму Венна. Объединение любой совокупности заштрихованных ячеек соответствует пустому множеству $\varnothing$, а объединение всех незаштрихованных ячеек дает универсум U.

Для отображения уравнения с правой частью, равной $\varnothing$, достаточно заштриховать области, соответствующие левой части уравнения. Уравнение $A = B$ преобразуется в соответствии с формулой (20) (табл. 1) к виду $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \varnothing$. Это значит, что следует заштриховать все те области в B, которые не входят в A, и те области в A, которые не входят в B.

Включению $A \subset B$ на основании свойства 19 (табл. 1) соответствует уравнение $A \cap \bar{B} = \varnothing$. Его отображение на диаграмме осуществляется штриховкой ячейки, соответствующей пересечению A с дополнением B.

9. Применение диаграмм Венна. Построим, например, диаграмму Венна (рис. 30) для системы уравнений: $A = B \cup C$; $B = \bar{C} \cup \bar{D}$; $\bar{C} \cap \bar{D} = \varnothing$; $A \cap D = B \cap C \cap D$. Отображение $A = B \cup C$ осуществляется штриховкой всех тех ячеек в B и C, которые не входят в A, а также всех ячеек в A, которые не входят ни в B, ни в C. Так как $B = \bar{C} \cup \bar{D}$, то в B следует заштриховать все, что входит одновременно в C и D, а в $\bar{C}$ и $\bar{D}$ — все, что не входит в B.

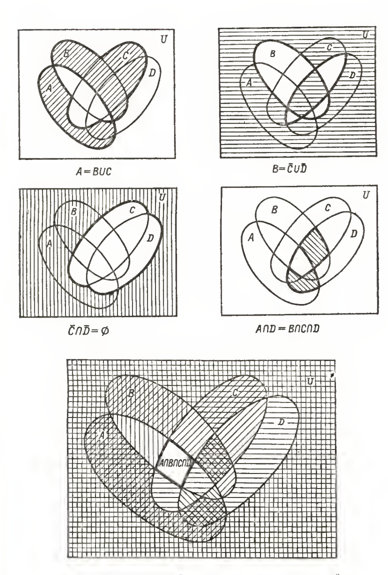


Рис. 30. Диаграмма Венна для системы уравнений.

В силу $\bar{C} \cap \bar{D} = \varnothing$ штрихуется вся общая часть $\bar{C}$ и $\bar{D}$. Наконец, из $A \cap D = B \cap C \cap D$ следует, что $A \cap D$ есть общая часть B, C и D, и значит $A \cap D \subset B$ и $A \cap D \subset C$; $A \cap D$ входит и в B, и в C, поэтому ячейки $A \cap \bar{B} \cap D$ и $A \cap \bar{C} \cap D$ должны быть заштрихованы. Кроме того, поскольку $B \cap C \cap D$ есть общая часть A и D, то $B \cap C \cap D \subset A$, и, следовательно, должна быть заштрихована ячейка $\bar{A} \cap B \cap C \cap D$. Последовательные этапы построения диаграммы Венна на рис. 30 отмечены штриховкой, наклоненной вправо, горизонтальной, вертикальной и наклоненной влево.

Как видно, единственная незаштрихованная ячейка соответствует $A \cap B \cap C \cap \bar{D} = U$, так как ею исчерпывается универсум U. Это возможно только в случае, когда $A = B = C = U$ и $D = \varnothing$, что и представляет собой решение системы уравнений.

Покажем также, как решается уравнение $X \cup C = D$, рассмотренное в (6). Его отображение на диаграмму Венна осуществляется штриховкой ячеек в X и C, которые не входят в D, а также всех ячеек в D, которые не входят ни в X, ни в C (рис. 31). Из диаграммы Венна (заштрихованную часть не учитываем) получаем $D \setminus C \subset X \subset D$. Важно отметить, что этот результат содержится в диаграмме Венна и не требуется никакой дополнительной информации, чтобы судить о свойствах решения уравнения.

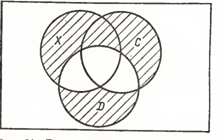


Рис. 31. Диаграмма Венна для уравнения $X \cup C = D$.

Этот пример наглядно иллюстрирует различие между диаграммами Венна и кругами Эйлера, которые в литературе часто необоснованно называют диаграммами Эйлера—Венна. Иногда особенность диаграмм Венна видят только в том, что в них используются не круги, а овалы или другие замкнутые фигуры. Однако главное отличие не в этом (Эйлер тоже допускал применение фигур, не являющихся кругами). Диаграмма Венна отображает систему соотношений на стандартном символе для n переменных путем «деформации» этого символа выделением (штриховкой) области пустых подмножеств.

10. Произведение множеств. Пусть имеются два множества A и B (не обязательно различных). *Произведение множеств* (его также называют *декартовым произведением*) $A \times B$ есть множество всех упорядоченных пар элементов (a, b), из которых первый a принадлежит множеству A, а второй b — множеству B. Пусть, например,

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{b_1, b_2\}$. Тогда $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}$. Порядок следования пар может быть любым, но расположение элементов в каждой паре определяется порядком следования перемножаемых множеств. Поэтому $A \times B \neq B \times A$, если $B \neq A$.

Операция произведения множеств обобщается на любое их количество $A_1, A_2, \dots, A_n$ и записывается

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

В результате получаем множество упорядоченных совокупностей элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых употребляются названия: *кортеж*, *последовательность*, *вектор* или просто *n-ка* (читается «энка»). Произведение множеств не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, но для него выполняются законы дистрибутивности относительно операций объединения, пересечения и разности:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B);$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B);$$
$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B).$$

Для произведения n одинаковых множеств A используется обозначение через степень $A^n = A \times A \times \dots \times A$, где A повторяется n раз. В этом случае n-ки содержат элементы множества A, среди которых могут быть одинаковые элементы. Так, если $A = \{a_1, a_2\}$, то $A^3 = \{(a_1, a_1, a_1), (a_1, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_2), (a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_1), (a_2, a_2, a_2)\}$.

Следует обратить внимание на существенное отличие произведения множеств от введенных ранее (1. 2. 7) операций над множествами. В результате таких операций как объединение, пересечение и т. п. всегда получается множество, элементы которого (если оно не пустое) принадлежат исходным множествам. Элементы произведения множеств существенно отличаются от элементов сомножителей и представляют собой объекты другой категории. Пусть N — множество натуральных чисел. Тогда $N \times N$ будет множество пар натуральных чисел (p, q), каждая из которых определяет самые различные объекты, например: дроби p/q, суммы $p + q$, номера домов p и квартир q (пара p, q определяет часть адреса), пары участников шахматного турнира в соответствии с жеребьевкой (p играет белыми, а q — черными) и т. п. При этом, как указывалось, $(p, q) \neq (q, p)$. Если бы это правило не соблюдалось, то числители могли бы стать знаменателями, номера домов — номерами квартир и т. п.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. С помощью кругов Эйлера покажите, что:

а) $\varnothing \subset A \cap B \subset A \cup B$;

б) $A + A = \varnothing$;

в) если $A \cap B = C$, то $C \subset A$ и $C \subset B$;

г) $(M \setminus N) \cap (N \setminus M) = \varnothing$.

2. Докажите с помощью тождествеииых преобразоваиий соотиошеиия:

а) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Результат проверьте с помощью кругов Эйлера.

3. Определите объедииеиие $A \cup B$, пересечеиие $A \cap B$ и разиость $A \setminus B$ через следующие операции:

а) дизъюнктивиую сумму и объедииеиие;

б) дизъюиктивиую сумму и пересечеиие;

в) дизъюнктивиую сумму и разиость.

4. В каком отиошеиии иаходятся миожества A и B, если $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$?

5. Определите пересечение миожеств A и B через разиость.

6. Докажите, что $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, если и только если $C \subset A$. Запишите двойствениое соотиошеиие. Является ли оио самодвойствеииым?

7. Покажите справедливость тождеств:

а) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$;

б) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$;

в) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X) = C$.

8. Исходя из отиошеиия прииадлежиости, докажите справедливость следующих выражений:

а) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;

б) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

в) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;

г) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

е) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

ж) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

9. Пусть $X = (A \setminus B) \setminus C$ и $Y = A \setminus (B \setminus C)$. Покажите, что $X \subset Y$, а также $Y \setminus X = A \cap C$.

10. Исходя из определеиия дизъюиктивиой суммы $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, покажите ее свойства:

а) коммутативиость $A + B = B + A$;

б) ассоциативиость $A + (B + C) = (A + B) + C$;

в) дистрибутивиость пересечеиия отиосительио дизъюиктивиой суммы $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$;

г) $A + \varnothing = A$;

д) $A + A = \varnothing$;

е) если $A + B = C$, то $B = A + C$ и $A = B + C$ (операция дизъюиктивиой суммы имеет обратиую и этой обратиой операцией является оиа сама).

11. Что общего и различиого в операциях дизъюиктивиой суммы и объедииеиия? При каком условии дизъюиктивиая сумма и объедииеиие совпадают?

12. Докажите тождества:

а) $\overline{(A \cap \overline{X}) \cup (B \cap \overline{X})} = (\overline{A} \cup X) \cap (\overline{B} \cup X)$;

б) $((A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})) \cup ((C \cap X) \cup (D \cap \overline{X})) = ((A \cup C) \cap X) \cup ((B \cup D) \cap \overline{X})$.

2. ОТНОШЕНИЯ

1. Бинарные отношения. Многие задачи математики, техники и других областей человеческой деятельности получают удобную интерпретацию на языке теории отношений. Все арифметические операции — это по существу некоторые отношения между числовыми множествами. Множество деталей остается складским имуществом до тех пор, пока между ними не реализуются определенные отношения, превращающие эти детали в какой-нибудь механизм или устройство (телевизор, станок, здание, мост и т. п.). Разнообразные отношения складываются между людьми — родители и дети, начальники и подчиненные, учителя и ученики.

Отношения между элементами двух множеств, т. е. *бинарные отношения* устанавливают соответствие элементов одного множества X элементам другого множества Y. Ясно, что такое отношение может быть задано некоторой совокупностью *упорядоченных пар* (x, y), которые являются элементами множества $X \times Y$. Это вовсе не значит, что всегда нужно перечислять все такие пары. Часто отношение задается некоторым свойством, выраженным в словесной или символической форме.

Если A — отношение, то *соотношение* xAy можно записать также в виде $(x, y) \in A$, где $A \subset X \times Y$. Например, выражение $3 < 7$ и $(3,7) \in <$ обозначают одно и тоже, но первое из них привычнее. В то же время $(7,3) \in <$ означало бы $7 < 3$, что неверно. Таким образом, в общем случае переставлять элементы в паре (x, y) нельзя, что и подчеркивается названием этой пары — упорядоченной. Элемент x называют *первой координатой*, а элемент y — *второй координатой* упорядоченной пары.

2. Области определения и значений. Множество первых координат x является *областью определения (левой областью)* $D_о(A)$, а множество вторых координат — *областью значений (правой областью)* $D_з(A)$ отношения A. Если $x \in X$ и $y \in Y$, то $D_о(A) \subset X$ и $D_з(A) \subset Y$. В таких случаях говорят, что A есть *отношение от X к Y*. Его называют также *соответствием* и обозначают $X \to Y$. Если $Y = X$, то любое отношение xAy является подмножеством множества $X \times X$ и называется *отношением в X*.

Пусть, например, $X = \{2, 3\}$ и $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. Произведение этих множеств $X \times Y = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$. Отношение «быть делителем» есть множество $A = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$, отношение $=$ есть множество $B = \{(3, 3)\}$, а отношение $>$ есть пустое множество $\varnothing$. Области определения и значений отношения A — это соответственно множества $D_о(A) = \{2, 3\} = X$ и $D_з(A) = \{3, 4, 6\} \subset Y$.

Если область определения отношения совпадает с некоторым множеством X, то говорят, что отношение *определено на X*. Подобный

случай имеет место в приведенном выше примере отношения A «быть делителем». Очевидно, для отношения включения $\subset$ подмножеств универсума U областью определения и областью значений служит множество подмножеств $P(U)$ этого универсума.

Заслуживают внимания три частных случая отношений в X: 1) *полное (универсальное) отношение* $P = X \times X$, которое имеет место для каждой пары (x_1, x_2) элементов из X (например, отношение «работать в одном отделе» на множестве сотрудников данного отдела); 2) *тождественное (диагональное) отношение* E, равносильное $x = x$ (например, равенство на множестве действительных чисел); 3) *пустое отношение*, которому не удовлетворяет ни одна пара элементов из X (например, отношение «быть братом» на множестве женщин). Очевидно, для любого отношения A в X справедливо $\varnothing \subset A \subset P$.

3. Сечения. Рассмотрим отношение $A \subset X \times Y$; если $x_i \in X$, то *сечение* по x_i отношения A, обозначаемое $A(x_i)$, есть множество $y \in Y$ таких, что $(x_i, y) \in A$. Множество всех сечений отношения A называют *фактор-множеством* множества Y по отношению A и обозначают Y/A. Оно полностью определяет отношение A.

Пусть, например, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и $A = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$. Очевидно, $A(x_1) = \{y_1, y_3\}$; $A(x_2) = \{y_1, y_3, y_4\}$ и т. п. Если записать под каждым элементом из X соответствующее сечение отношения A, то элементы второй строки образуют фактор-множество Y/A:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x & x_4 & x_5 \\ \{y_1, y_3\} & \{y_1, y_3, y_4\} & \{y_1, y_2, y_4\} & \{y_3\} & \{y_2, y_4\} \end{pmatrix}.$$

Объединение сечений по элементам некоторого подмножества $B \subset X$ является сечением $A(B)$ этого подмножества, т. е. $A(B) = \bigcup_{x \in B} A(x)$. Так, $A(x_2, x_3) = A(x_2) \bigcup A(x_3) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

4. Матрица отношения. Из предыдущего ясно, что конечное отношение можно представить с помощью фактор-множества. Другой способ — *матричный* — основан на представлении отношения соответствующей ему прямоугольной таблицей (матрицей). Ее столбцы соответствуют первым координатам, а строки — вторым координатам. На пересечении i-го столбца и j-й строки ставится единица, если выполнено соотношение $x_i A y_j$, и нуль, если это соотношение не выполняется (нулевые клетки можно оставлять пустыми). Эта матрица содержит всю информацию об отношении A. Например, для отношения, рассмотренного в (3), матрица имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	1		
y_2			1		1
y_3	1	1		1	
y_4		1	1		1

.

Ненулевые элементы i-го столбца указывают на совокупность элементов $y \in Y$, представляющую собой сечение $A(x_i)$, например, $A(x_5) = \{y_2, y_4\}$.

Полному отношению соответствует матрица, все клетки которой заполнены единицами, тождественному — единичная матрица, а пустому — нулевая матрица.

5. Граф отношения. Отношения можно также задавать (или изображать) с помощью *ориентированного графа*. Вершины графа соответствуют элементам множеств X и Y, а дуга, направленная из вершины x_i к y_j, означает, что x_iAy_j. Граф отношения из (3) показан на рис. 32.

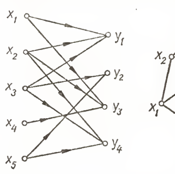


Рис. 32. Граф отношения от X к Y (биграф).

Рис. 33. Граф отношения в множестве X.

Отношение в X отображается графом с вершинами, соответствующими элементам этого множества. При этом, если имеют место соотношения x_iAx_j и x_jAx_i, то вершины связываются двумя противоположно направленными дугами, которые можно условно заменять одной ненаправленной дугой (или указывать противоположные направления на одной дуге). Соотношению x_iAx_i ссответствует петля, выходящая из x_i и входящая в эту же вершину. На рис. 33 показан граф отношения в X, заданного множеством $A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_5), (x_6, x_2)\}$.

Графы полного, тождественного и пустого отношений изображены на рис. 34 (для пустого отношения граф состоит из изолированных вершин).

6. Симметричное отношение. Так как отношение — это множества, то над ними можно выполнять все теоретико-множественные операции. Кроме этого, определяются специфические для отношений операции: *обращение (симметризация)* и *композиция*.

Отношение, *симметричное (обратное)* некоторому отношению $A \subset X \times Y$, обозначается через A^{-1} и представляет собой подмножество множества $Y \times X$, образованное теми парами $(y, x) \in Y \times X$,

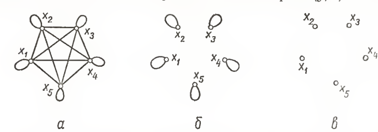


Рис. 34. Граф полного (*а*), тождественного (*б*) и пустого (*в*) отношений.

для которых $(x, y) \in A$. Переход от A к A^{-1} осуществляется взаимной перестановкой координат каждой упорядоченной пары. Так, обратное отношение для «x есть делитель y» будет «y делится на x» и для приведенного в (2) примера выражается множеством $\{(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3)\}$.

При переходе от A к A^{-1} область определения становится областью значений, и наоборот. Матрица обратного отношения получается транспонированием исходной матрицы. Граф обратного отношения находится из исходного графа заменой направлений всех дуг на противоположные.

7. Композиция отношений. Пусть даны три множества X, Y, Z и два отношения $A \subset X \times Y$ и $B \subset Y \times Z$. *Композиция отношений* A и B есть отношение C, состоящее из всех тех пар $(x, z) \subset \subset X \times Z$, для которых существует такое $y \in Y$, что $(x, y) \in A$ и $(y, z) \in B$.

Сечение отношения C по x совпадает с сечением отношения B по подмножеству $A(x) \subset Y$, т. е. $C(x) = B(A(x))$.

Рассмотрим, например, два отношения: A из примера (3) и $B = \{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3), (y_4, z_3)\}$. Очевидно, $C = \{(x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3), (x_4, z_3), (x_5, z_1), (x_5, z_2), (x_5, z_3)\}$. Сечение $C(x_3) = \{z_1, z_2, z_3\}$. С другой стороны, $B(A(x_3)) = B(\{y_1, y_2, y_4\}) = \{z_2\} \cup \{z_1, z_2\} \cup \{z_3\} = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Теперь нужно решить вопрос, как записать композицию отношений A и B. Если исходить из соотношений xAy и yBz, то естественно записать $xCz = xABz$, т. е. $C = AB$. Но при этом соотношение $C(x) = B(A(x))$ приняло бы неудобную форму $(AB)(x) = B(A(x))$. Поэтому композицию C отношений A и B обычно записывают как $C = BA$ (или $C = B \circ A$), тогда $(BA)(x) = B(A(x))$. Как увидим дальше, такая запись имеет и другие преимущества.

Композиция отношений обладает ассоциативным законом, т. е. $D(BA) = (DB)A = DBA$, но не коммутативна ($BA \neq AB$). Можно также показать, что $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

8. Представление композиции отношений матрицами и графами. Композиция отношений $A \subset X \times Y$ и $B \subset Y \times Z$ наглядно представляется с помощью графов. Прежде всего необходимо к графу отношения A достроить граф отношения B. Граф отношения $C = BA$ получим, исключив вершины, соответствующие элементам множества Y. При исключении вершины y_i каждый проходящий через нее путь от вершин x к вершинам z заменяется одной дугой с тем же направлением. Параллельные ветви с одинаковыми направлениями соответствуют одинаковым парам в C и рассматриваются как одна ветвь. Граф композиции отношений из (7) показан на рис. 35.

Аналогично можно получить матрицу композиции $C = BA$ как произведение матриц отношений B и A (в порядке их следования), которое выполняется по обычному правилу умножения прямоугольных матриц с последующей заменой отличного от нуля элемента результирующей матрицы единицей. Так, для рассматриваемого примера имеем:

	y_1	y_2	y_3	y_4
z_1		1		
z_2	1	1		
z_3			1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	1		
y_2			1		1
y_3	1	1		1	
y_4		1	1		1

=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z_1			1		1
z_2	1	1	2		1
z_3	1	2	1	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z_1			1		1
z_2	1	1	1		1
z_3	1	1	1	1	1

Приведенное выше правило легко доказывается на основе выражения для элемента $c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + \cdots + b_{in}a_{nk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk}$ произведения матриц, соответствующих отношениям

B и A. В этом выражении слагаемое $b_{ij}a_{jk}$ равно единице при условии, что $a_{ij} = b_{jk} = 1$, а это возможно только, если имеют место соотношения x_iAy_j и y_jBz_k, т. е. x_iBAz_k. Если в выражении для c_{ik} не одно, а несколько единичных слагаемых, то каждое из них соответствует одному и тому же соотношению x_iBAz_k и их сумма должна быть заменена единицей (это соответствует замене нескольких одинаково направленных дуг графа одной дугой).

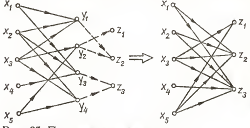


Рис. 35. Построение графа композиции отношений xAy и yBz.

Если A и B — отношения в X, то графы этих отношений и граф композиции $C = BA$ строится на множестве вершин, соответствующих $x_i \in X$, по тому же правилу, что и в общем случае. В приведенном на рис. 36 примере сплошные дуги соответствуют отношению A, а пунктирные — отношению B (справа показан граф композиции $C = BA$).

9. Общие свойства отношений. Пусть A — бинарное отношение в множестве X. Определим общие свойства таких отношений, которые должны выполняться для всех $(x_i, x_j) \in A$. Говорят, что $A \subset X \times X$:

1) *рефлексивно*, если $A \supset E$ (E — тождественное отношение), т. е. оно всегда выполняется между объектом и им самим: xAx (равенство, самообслуживание);

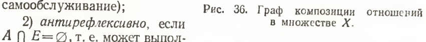


Рис. 36. Граф композиции отношений в множестве X.

2) *антирефлексивно*, если $A \cap E = \varnothing$, т. е. может выполняться только для несовпадающих объектов: из x_iAx_j следует $x_i \neq x_j$ (строгое неравенство, «быть старше»);

3) *симметрично*, если $A = A^{-1}$, т. е. при выполнении соотношения x_iAx_j выполняется и соотношение x_jAx_i (расстояние между двумя точками, «быть братом»);

4) *асимметрично*, если $A \cap A^{-1} = \varnothing$, т. е. из двух соотношений x_iAx_j и x_jAx_i по меньшей мере одно не выполняется (строгое включение, «быть отцом»); если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно;

5) *антисимметрично*, если $A \cap A^{-1} \subset E$, т. е. оба соотноше-

ния $x_i A x_j$ и $x_j A x_i$ выполняются одновременно только тогда, когда $x_i = x_j$ (нестрогое неравенство $\leqslant$, включение);

6) *транзитивно*, если $AA \subset A$, т. е. из $x_i A x_j$ и $x_j A x_k$ следует $x_i A x_k$ («быть делителем», «быть родственником»).

Для рефлексивного отношения все элементы матрицы на главной диагонали — единицы, а для антирефлексивного — нули. Симметричность отношения влечет и симметричность матрицы, асимметричность отношения — несимметричность матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, антисимметричность отношения — только несимметричность матриц. В матрице транзитивного отношения для каждой пары единичных элементов, один из которых расположен в i-м столбце и j-й строке, а другой в j-м столбце и k-й строке, обязательно существует единичный элемент, расположенный в клетке на пересечении i-го столбца и k-й строки (наличие единичных элементов на главной диагонали не нарушает транзитивности).

Рис. 37. Граф транзитивного отношения (a) и его упрощенное изображение ($б$).

Граф рефлексивного отношения содержит петли у всех вершин, антирефлексивного — не содержит ни одной петли. Для симметричного отношения вершины графа могут быть связаны только парами противоположно направленных дуг (ненаправленными дугами). В графе асимметричного отношения петли отсутствуют, а вершины могут быть связаны только одной направленной дугой. В случае антисимметричного отношения могут быть петли, но связь между вершинами, если она имеется, также отображается только одной направленной дугой. Наглядно проявляется на графе и свойство транзитивности: если через некоторую совокупность вершин графа проходит путь, то существуют дуги, соединяющие любую пару вершин из этой совокупности (рис. 37, a).

Обычно в графе транзитивного отношения изображают только этот путь, а обусловленные транзитивностью дуги опускают (рис. 37, $б$). Такой упрощенный граф называют *графом редукции*.

10. Многоместные отношения. Отношение может быть определено не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т. д. Отношение n объектов (*n-местное отношение*) определяется как множество n-мерных векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющееся подмножеством произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, причем $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\ldots$, $x_n \in X_n$.

Многомерные векторы можно определить в терминах упорядоченных пар, например тройка (x_1, x_2, x_3) рассматривается как упорядоченная пара $((x_1, x_2), x_3)$, где первая координата (x_1, x_2) сама

является упорядоченной парой, причем $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Вообще, n-мерный вектор выражается как упорядоченная пара через $((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, если определено $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Примером трехместных (тернарных) отношений являются: арифметические операции над числами, отношение между родителями и детьми (отец, мать, ребенок) и т. п. Пропорция $x : y = z : u$ иллюстрирует четырехместное отношение. Множество, задаваемое с помощью общего свойства элементов из некоторого универсума, можно рассматривать как *одноместное (унарное)* отношение в этом универсуме.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны два множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и определено бинарное отношение $A = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_1), (x_5, y_3)\}$. Для данного отношения A:

а) записать область определения и область значений;

б) определить сечения по каждому элементу из X;

в) определить сечения по подмножествам $X' = \{x_1, x_4\}$ и $X'' = \{x_2, x_3, x_5\}$ множества X;

г) записать матрицу и нарисовать граф;

д) определить симметричное отношение A^{-1}.

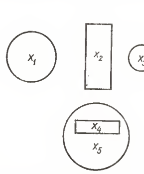


Рис. 38. Геометрический образ к задаче 4.

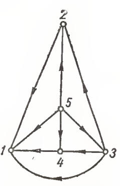


Рис. 39. Граф бинарного отношения.

2. Пусть X — множество студентов; Y — множество дисциплин и соотношение xAy, где $x \in X$ и $y \in Y$, означает «студент x изучает дисциплину y». Дайте словесное описание областей определения и значений, сечений и обратного отношения, полученных в задаче 1.

3. По результатам задачи 1 определите множества $A(x_2) \cap A(x_4)$, $A(x_2) \setminus A(x_4)$ и $A(x_2) + A(x_4)$. Дайте им словесное описание в соответствии с условием задачи 2.

4. Дайте описание геометрического образа (рис. 38), представляющего собой множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ фигур на плоскости посредством отношений:

а) унарных: «x_i — окружность», «x_j — прямоугольник»;

б) бинарных: «x_i больше x_j», «x_i правее x_j», «x_i над x_j», «x_i внутри x_j», «x_i шире x_j»;

в) тернарных: «x_i между x_j и x_k», «x_i ближе к x_j, чем к x_k».

5. Представьте бинарное отношение, заданное графом (рис. 39), как множество упорядоченных пар и запишите его матрицу. Какими свойствами характеризуется данное отношение?

6. Приведите примеры рефлексивных, антирефлексивных, симметричных, асимметричных, антисимметричных и транзитивных отношений.

7. Какими общими свойствами обладают бинарные отношения, заданные в некотором множестве людей X и выражающиеся соотношениями (x_i, $x_j \in X$):

а) «x_i похож на x_j»;

б) «x_i знаком с x_j»;

в) «x_i родственник x_j»;

г) «x_i сосед x_j»;

д) «x_i живет в одном доме с x_j»;

е) «x_i весит больше, чем x_j»;

ж) «x_i подчинен x_j».

8. Пусть $A = \{а, б, в, г, д, е, ж\}$ — множество бинарных отношений в X из задачи 7 и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — множество шести общих свойств отношений, представленных их номерами, как в (9). На основе результатов задачи 7 постройте граф отношения $A \to B$, устанавливающего соответствие между бинарными отношениями из A и их общими свойствами из B.

9. Записать композицию $C = BA$ отношений $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 3)\}$ и $B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Проверить результат с помощью операций над матрицами и графами заданных отношений.

10. Пусть отношение A задано в множестве действительных чисел R. Тогда на плоскости каждой упорядоченной паре будет соответствовать точка с координатами x и y, если $(x, y) \in A$. Отношение A изобразится графиком, представляющим собой подмножество точек плоскости (области, линии или отдельные точки). При этом отношение записывается как $A = \{(x, y) \in R \times R \mid P(x, y)\}$, где $P(x, y)$ — определяющее свойство отношения A, выражаемое обычно алгебраическими уравнениями и неравенствами.

Постройте графики для следующих отношений (в тех случаях, когда график является частью плоскости, эта часть штрихуется):

а) $\{(x, y) \in R \times R \mid x = y\}$;
б) $\{(x, y) \in R \times R \mid y \geqslant x\}$;
в) $\{(x, y) \in R \times R \mid y \geqslant x \text{ и } x \geqslant 0\}$;
г) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
д) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + 2|y| = 1\}$;
е) $\{(x, y) \in R \times R \mid y \geqslant 0 \text{ и } y \leqslant x \text{ и } x + y \leqslant 1\}$.

12. Запишите отношения, графики которых показаны на рис. 40.

13. Покажите, что график, приведенный на рис. 41, *а* соответствует пересечению, а на рис. 41, *б* — объединению бинарных отношений $\{(x, y) \in R \times R \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ и $\{(x, y) \in R \times R \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Запишите отношение для каждого из этих графиков одним соотношением.

14. Докажите следующие свойства симметризации и композиции отношений:

а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
б) $(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$;
в) $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$;
г) $(A^{-1})^{-1} = A$.

15. Докажите, что $(X \times Y)^{-1} = Y \times X$.

16. Покажите, что при симметризации отношения все его свойства сохраняются (имеются в виду свойства, перечисленные в задаче 6).

17. Докажите следующие утверждения:

а) если отношения A и B рефлексивны, то рефлексивны и отношения $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, AB;

б) если отношения A и B антирефлексивны, то антирефлексивны и отношения $A \bigcup B$, $A \bigcap B$;

в) если отношения A и B симметричны, то симметричны и отношения $A \bigcup B$, $A \bigcap B$;

г) если отношение A асимметрично, то пересечение $A \bigcap B$ асимметрично при любом B;

д) если отношения A и B антисимметричны, то антисимметрично и отношение $A \bigcap B$;

е) если отношения A и B транзитивны, то транзитивно и отношение $A \bigcap B$.

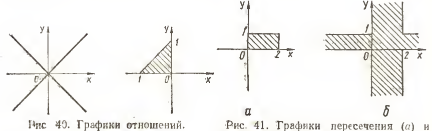


Рис. 40. Графики отношений.

Рис. 41. Графики пересечения (а) и объединения (б) бинарных отношений.

18. Покажите, что:

а) композиция BA антирефлексивных отношений A и B тогда и только тогда антирефлексивна, когда $A \bigcap B^{-1} = \varnothing$;

б) объединение $A \bigcup B$ асимметричных отношений A и B тогда и только тогда асимметрично, когда $A \bigcap B^{-1} = \varnothing$;

в) объединение $A \bigcup B$ антисимметричных отношений A и B тогда и только тогда антисимметрично, когда $A \bigcap B^{-1} \subset E$ (E — тождественное отношение).

3. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

1. Функциональные отношения. Отношение $A \subset X \times Y$ называется *функциональным*, если все его элементы (упорядоченные пары) имеют различные первые координаты. Иначе говоря, каждому элементу x из X такому, что $(x, y) \in A$ соответствует один и только один элемент y из Y.

Очевидно, для функционального отношения A каждое сечение по x из X содержит не более одного элемента. Если x не входит в область определения $D_0(A)$ этого отношения, то сечение по x пусто. Если сечение по любому элементу из X содержит один и только один элемент, то функциональное отношение является *всюду определенным*.

Матрица функционального отношения содержит в каждом столбце не больше одного единичного элемента, а его граф характеризуется тем, что из каждой вершины может выходить только одна дуга (считая и петли). Элементам $x \in X$, не входящим в область определения, соответствует нулевой столбец в матрице и изолированная вершина в графе функционального отношения.

Пусть, например, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Функциональное отношение $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_5, y_3), (x_6, y_1)\}$ представляется матрицей, в которой четвертый столбец нулевой, а его граф содержит изолированную вершину x_4.

2. Функции и отображения. Всякое функциональное отношение можно рассматривать как *функцию*. При этом первая координата x упорядоченной пары $(x, y) \in A$ является *аргументом (переменной)*, а вторая y — *образом (значением)* функции. Обычная запись $y = f(x)$ соответствует соотношению xfy, или $(x, y) \in f$. Следует различать функцию f как множество упорядоченных пар (отношение) и значение функции $y = f(x)$ как вторую координату одной из таких пар.

Для всякого функционального отношения A можно определить связанную с этим отношением функцию f. Но симметричное к нему отношение A^{-1} может и не быть функцией. Так, отношение $A^{-1} = \{(y_1, x_1), (y_1, x_3), (y_1, x_6), (y_2, x_2), (y_3, x_5)\}$, обратное рассмотренному в (1), не является функцией.

Если функциональное отношение $A \subset X \times Y$ всюду определено на X, т. е. его область определения $D_o(A)$ совпадает с множеством X, то его называют *отображением множества X в Y* и записывают $X \overset{A}{\to} Y$. Отображение можно также рассматривать как функцию f, определенную на множестве X и принимающую значения в множестве Y.

Как видно, различие между отображением и функцией сводится к способу определения этих отношений на множестве X, причем отображение следует рассматривать как частный случай функции. Однако большинство авторов не различают понятия отображения и функции, оставляя открытым вопрос об области определения. Если f — отображение или функция, то пишут $f : X \to Y$ или проще $x \to f(x)$.

3. Типы отображений. При *отображении X в Y* каждый элемент x из X имеет один и только один образ $y = f(x)$ из Y. Однако вовсе не обязательно, чтобы и всякий элемент из Y был образом некоторого элемента из X (рис. 42, *а*). Если же любой элемент из Y есть образ, по крайней мере, одного элемента из X (рис. 42, *б*), то говорят, что имеет место *отображение X на Y* (*сюрьекция* или *накрытие*).

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то отображение f называется *инъекцией* (рис. 40, *в*). Отображение, которое является одновременно сюрьективным и инъективным (рис. 40, *г*), называется *биекцией (наложением)*. В этом случае говорят, что $f : X \to Y$ *есть взаимно-однозначное* отображение, а между элементами X и Y имеется взаимно-однозначное соответствие. При этом обратное отношение f^{-1} также взаимно-однозначное отображение, $x = f^{-1}(y)$ равносильно $y = f(x)$ и $(f^{-1})^{-1}$ совпадает с f.

Любое отображение f из X в Y есть элемент множества $\mathcal{P}(X \times Y)$, которое обозначается также через Y^X (напомним, что $\mathcal{P}(X \times Y)$ — это множество всех подмножеств прямого произведения $X \times Y$,



Рис. 42. Типы отображений:
а — отображение X в Y; *б* — отображение X на Y (сюрьекция); *в* — взаимно-однозначное отображение X в Y (инъекция); *г* — взаимно-однозначное отображение X на Y (биекция).

а элементами последнего являются упорядоченные пары (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Если f — взаимно-однозначное отображение, а множества X и Y совпадают $(X = Y)$, то $f : X \to X$ называют *отображением множества* X *на себя*. Элементы $(x, x) \in X \times X$ образуют *тождественное отображение* e, причем $ff^{-1} = f^{-1}f = e$.

4. Мощность множества. Два множества, между элементами которых имеет место биективное (взаимно-однозначное) отображение, называют *равномощными*.

Мощность конечного множества выражается количеством его элементов, которое называют *кардинальным числом*. Подсчет элементов *конечного множества* состоит в установлении взаимно-однозначного соответствия между этими элементами и некоторой последовательностью натуральных чисел, начиная с единицы.

Бесконечные множества также могут различаться по мощности. Наименьшую мощность имеют *счетные* множества, т. е. такие множества, которые равномощны множеству натуральных чисел. К ним относятся, например, множество всех четных чисел, множество квадратов целых чисел и т. п. Мощность множества действительных

чисел отрезка [0, 1], называемая *мощностью континуума*, превышает мощность счетного множества.

Можно указать множества, мощность которых больше мощности континуума. Но множества с наибольшей мощностью не существует (подобно тому, как не существует наибольшего натурального числа). Это является следствием того, что мощность множества M всегда строго меньше мощности множества $\mathcal{P}(M)$ всех его подмножеств. Иначе говоря, какой бы мощности не было данное множество, всегда можно образовать множество его подмножеств, которое будет иметь бо́льшую мощность. Так, $\mathcal{P}(N)$, где N — множество натуральных чисел, несчетно: его мощность равна мощности континуума.

5. Образы и прообразы. В общем случае при отображении $f: X \to Y$ элемент из Y может быть образом не одного, а нескольких элементов множества X. Так, для рассмотренного в (1) отношения элемент y_1 является образом элементов x_1, x_3 и x_6. Совокупность всех элементов, образом которых является данный элемент y из Y, называется *полным прообразом* элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$. В нашем примере $f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_3, x_6\}$.

Пусть Q — некоторое подмножество множества X, на котором определено отображение f. Совокупность элементов $f(q)$, являющихся образами всех элементов множества Q, называется *образом этого множества* и обозначается $f(Q)$. В свою очередь, для каждого множества R из Y определяется его полный прообраз $f^{-1}(R)$ как совокупность всех тех элементов из X, образы которых принадлежат R.

Основные свойства отображений выражаются соотношениями: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов. Но можно показать, что $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

6. Сужение и продолжение функции. Пусть функция $f: X \to Y$ определена на множестве X, а f_1 — на множестве $Q \subset X$, причем для каждого $x \in Q$ значения функций f и f_1 совпадают. Тогда f_1 называют *ограничением (сужением) функции* f на Q, а f — *продолжением функции f_1 на X*.

Например, функция $f(x) = x^3$ (другая запись $x \to x^3$), определенная на множестве действительных чисел R, отображает это множество на себя. Если ограничить область определения этой функции множеством целых чисел Z, то получим сужение $f_1(x)$ функции $f(x)$ на Z, причем $f_1(x)$ отображает множество Z в Z (а не на Z), так как не всякое число является кубом целого числа.

7. Композиция отображений. Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то их композиция $(g \circ f): X \to Z$, причем $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Пусть, например, $f = \sin$, $g = \ln$; тогда $(g \circ f)(x) = (\ln \circ \sin)x = \ln \sin x$.

Для наглядности представления соотношений, где встречаются несколько отображений, пользуются диаграммами, например:

$$A \xrightarrow{f} B,\quad B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{i} E,\quad B \xrightarrow{h} D \xrightarrow{j} E$$

Такая диаграмма называется *коммутативной*, если в любом случае, когда можно пройти от одного множества к другому по различным последовательностям стрелок, соответствующие композиции совпадают (в приведенном выше примере условие коммутативности $i \circ g = j \circ h$).

8. Числовые функции. Проиллюстрируем введенные понятия на функциях, определенных на числовых множествах, элементами которых являются действительные числа. Такая функция каждому числу x из области определения ставит в соответствие число $y = f(x)$ из области ее значений. Иначе говоря, числовая функция f определяется множеством упорядоченных пар чисел $(x, y) \in f$.

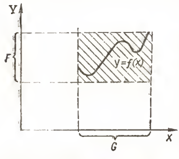


Рис. 43. График числовой функции $y = f(x)$ (G — область определения; F — область значений).

На геометрическом языке множеству действительных чисел соответствует множество *точек прямой* (*числовой оси*). Пары чисел (x, y) представляются в декартовой системе координат *точками плоскости* с координатами $x \in X$ и $y \in Y$, причем первая координата x — *абсцисса*, а вторая y — *ордината* точки. Числовые оси, соответствующие множествам X и Y, являются *осями координат*, а декартово произведение $X \times Y$, представляет собой множество точек плоскости. Таким образом, между элементами множества $X \times Y$ и точками плоскости устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Различные подмножества действительных чисел, на которых определяется функция, соответствуют подмножествам точек прямой. В качестве таких подмножеств часто используют следующие: *отрезок* (*замкнутый интервал*) $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$; *полуинтервал, открытый слева* $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$; *полуинтервал, открытый справа* $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$, и *открытый интервал* (или просто *интервал*) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$. Область определения функции может быть задана и отдельными точками числовой прямой.

Множество точек плоскости, соответствующих множеству упорядоченных пар $(x, y) \in f$, называют *графиком функции* f. На рис. 43

показан график функции $y = f(x)$, определенной на множестве G с областью значений F.

9. Подстановки как отображения. Взаимно-однозначное отображение множества $N = \{1, 2, ..., n\}$ на себя называется *подстановкой* n чисел (или подстановкой n-й степени). Обычно принято записывать подстановку двумя строками, заключенными в скобки. Первая строка содержит аргументы (первые координаты) подстановки, а вторая — соответствующие им образы (вторые координаты). Например, взаимно-однозначное соответствие четырех чисел, заданное множеством упорядоченных пар $\{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ запишется как подстановка a четвертой степени

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

в которой 1 переходит в 2, 2 — в 4, 3 — в 3 и 4 — в 1.

Так как безразлично, в каком порядке следуют упорядоченные пары отображения, то одна и та же подстановка допускает различные представления:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Каждая строка в записи подстановки n-й степени содержит n различных чисел, расположенных в определенном порядке, т. е. представляет собой некоторую *перестановку* n чисел $1, 2, ..., n$. Если обозначить i-е элементы перестановок через α_i и β_i ($i = 1, 2, ..., n$), причем $\alpha_i, \beta_i \in N$, то подстановку n-й степени можно представить как

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку число всех перестановок из n чисел равно $n!$, то число всех различных подстановок n-й степени, как и число всевозможных способов записи любой из таких подстановок, также равно $n!$

Тождественная подстановка n-й степени e_n переводит каждое число в себя. Очевидно, одной из записей e_n является следующая:

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Если в подстановке a поменяем местами ее перестановки, то получим подстановку a^{-1}, *симметричную* a. Например

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Композицией подстановок n-й степени a и b называется подстановка n-й степени $c = ab$, являющаяся результатом последовательного выполнения сначала a, затем b. Например:

$$c = ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

так как 1 переходит в 2 и 2 — в 4, т. е. в результате 1 переходит в 4 и т. д.

Очевидно, если a — подстановка n-й степени, то $ae_n = e_n a = a$, $aa^{-1} = a^{-1}a = e_n$.

Подстановка называется *четной*, если общее число инверсий в ее строках (перестановках) четно, и *нечетной* — в противном случае. Как известно, *инверсию* образуют два числа в перестановке, когда меньшее из них расположено правее большего. Каждой перестановке можно сопоставить число инверсий в ней, которое подсчитывается следующим образом: для каждого из чисел определяется количество стоящих правее его меньших чисел, и полученные результаты складываются. Например, подстановка

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

нечетная, так как количество инверсий в верхней перестановке $3 + 1 + 2 + 0 + 0 + 0 = 6$ и в нижней перестановке $4 + 2 + + 0 + 1 + 0 + 0 = 7$, т. е. общее число инверсий $6 + 7 = 13$.

10. Разложение подстановки в циклы. Всякую подстановку можно разложить в *произведение циклов*, множества элементов которых попарно не пересекаются. *Цикл* — это такая подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{k-1}, & \alpha_k, & \alpha_{k+1}, & \dots, & \alpha_n \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \dots, & \alpha_k, & \alpha_1, & \alpha_{k+1}, & \dots, & \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

которая переводит α_1 в α_2, α_2 в α_3, ..., α_{k-1} в α_k и α_k в α_1, а остальные элементы $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ переходят в самих себя. Сокращенная запись цикла $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ сводится к перечислению множества элементов, которые циклически переходят друг в друга, а количество этих элементов k определяет *длину (порядок) цикла*. Так,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1, 4, 5)(2, 3)(6).$$

Цикл длины 1 представляет собой тождественную подстановку и часто не записывается. Подстановка, все n элементов которой образуют цикл, называется *круговой* или *циклической*. Цикл длины 2 называют *транспозицией* (это подстановка, переставляющая только

два элемента). Всякая подстановка представляется произведением транспозиций, например:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3&4&5\\2&5&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&3&4&1\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}2&5&4&3&1\\2&5&4&1&3\end{pmatrix}=(1,\ 2)(1,\ 5)(3,\ 4)(1,\ 3).$$

Заметим, что подобное разложение может содержать циклы с общими элементами и при этом оно не является единственным. В то же время разложение подстановки на *независимые циклы* (без общих элементов) всегда можно осуществить только единственным способом.

Разность между числом всех элементов подстановки n и количеством ее циклов m (с учетом циклов длины 1) называется *декрементом* подстановки $d = n - m$. Четность подстановки совпадает с четностью ее декремента.

Наглядное представление о подстановках дают их графы, построенные на множестве n вершин, соответствующих числам 1, 2, ..., n. На рис. 44, *а* показаны графы подстановок a (сплошными линиями) и b (штриховыми) и на рис. 44, *б* — граф их композиции $c = ab$:

Рис. 44. Графы подстановок (*а*) и композиции подстановок (*б*).

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&5&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1,&2,&3,&4,&5,&6\\1,&2,&4,&3,&6,&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,&2,&3,&4,&5,&6\\4,&1,&2,&6,&3,&5\end{pmatrix}.$$

Циклам подстановок соответствуют простые циклы графа (циклы длины 1 изображаются петлями), причем граф состоит исключительно из таких циклов. Композиция подстановок на рис. 44, *б* содержит только один цикл, которому соответствует единственный цикл графа, т. е. является циклической.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В множестве $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ заданы отношения:
а) $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (5, 1)\}$;
б) $\{(2, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$;
в) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (5, 1)\}$;
г) $\{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 5), (5, 5)\}$;
д) $\{(1, 5), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}$.

Какие из этих отношений являются функциями и какие — отображениями?

2. К какому типу относятся отображения из задачи 1?

3. Какие из приведенных ниже отношений в множестве действительных чисел R являются функциями?

а) $\{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 2x + 1\}$;

б) $\{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2\}$;

в) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$;

г) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1$ и $y > 0\}$.

4. Какие из отношений $\{(x, y) \in R \times R \mid P(x, y)\}$, заданные графиками на рис. 45, являются функциями? Какие из функций взаимно-однозначны?

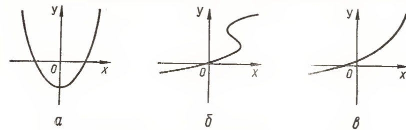


Рис. 45. Графики отношений к задаче 4.

5. Пусть X — множество столиц союзных республик и Y — множество букв русского алфавита. Отображение $f: X \to Y$ ставит каждой столице в соответствие первую букву ее названия, так что $f = \{$(Москва, М), (Киев, К), (Минск, М), (Баку, Б), (Тбилиси, Т), (Ереван, Е), (Алма-Ата, А), (Фрунзе, Ф), (Ташкент, Т), (Ашхабад, А), (Душанбе, Д), (Рига, Р), (Вильнюс, В), (Таллин, Т), (Кишинев, К)$\}$. Для данного отображения определить:

а) область значений $D_з(f)$;

б) образ множества $X' = \{$Москва, Киев, Тбилиси, Кишинев$\} \subset X$;

в) полные прообразы для всех элементов из области значений;

г) полный прообраз множества $Y' = \{A, M, T\} \subset D_з(f)$.

6. Пусть X — множество неупорядоченных троек (a, b, c) натуральных чисел и N — множество натуральных чисел. Отображение $f: X \to N$ ставит в соответствие каждой тройке $(a, в, c)$ сумму $a + b + c$. Записать прообраз для каждого из первых шести натуральных чисел.

7. Показать, что каждая из следующих функций имеет обратную (R — множество действительных чисел):

а) $f: R \to R$, где $f(x) = 2x + 1$;

б) $\{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2,\ x \geqslant 0\}$;

в) $\{(x, \sqrt{1 - x^2}) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

г) $\left\{\left(x, \dfrac{x}{x-1}\right) \middle| -2 \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

Найти области определения и значений обратных функций и начертить их графики.

8. Представить в виде композиции функций следующие функции:

а) $f(x) = \left(1 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $f(x) = (1 - e^{2x})^3$.

9. Определите множество действительных чисел, на котором функции $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = 2x^2 - x - 3$ равны.

10. Пусть A — множество жителей нашей страны. Указать, какие из $f(x)$ можно считать функциями, если они означают:

а) $f(x)$ = отец x;

б) $f(x)$ = сын x;

в) $f(x)$ = брат x;

г) $f(x)$ = муж x.

11. Даны две подстановки пятой степени:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}:$$

а) определите четность подстановок;

б) разложите подстановки в циклы;

в) запишите композиции подстановок ab и ba;

г) постройте графы подстановок и их композиций.

12. Для 10 студентов приготовлено 10 различных задач, причем каждый студент получает одну задачу. Определить число вариантов распределения задач между студентами. Что из себя представляет каждое такое распределение?

4. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1. Эквивалентность. *Отношение эквивалентности* представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких обыденных слов как «одинаковость», «неразличимость», «взаимозаменяемость».

Эквивалентность удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается знаком $\sim$. При этом $x \sim y$ означает, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $A \subset M \times M$, являющимся отношением эквивалентности в множестве M.

Свойства эквивалентности записываются следующим образом: 1) $x \sim x$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

2. Классы эквивалентности. Важнейшее значение эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет признак, который допускает *разбиение* множества M на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*. Наоборот, всякое разбиение множества M на непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности.

Например, отношение «проживать в одном доме» в множестве жителей города является эквивалентностью и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества людей, являющихся соседями по дому. Примерами отношений эквивалентности могут служить подобие или равенство треугольников на плоскости, параллельность прямых, утверждение «быть таким же» и т. п.

3. Система представителей. Все элементы, принадлежащие некоторому классу M_i разбиения $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M, связаны отношением эквивалентности. Они взаимозаменяемые в том смысле, что любой из этих элементов определяет данный класс, т. е. может служить его *представителем (эталоном)*. Подмножество из M, содержащее по одному и только по одному элементу из каждого класса некоторого разбиения, называют *системой представителей* соответствующего отношения эквивалентности. Множество всех классов разбиения множества M, определяемого отношением эквивалентности A, образует фактор-множество M/A.

Например, отношение параллельности определяет разбиение множества прямых на плоскости на классы, каждый из которых образован множеством параллельных между собой прямых и характеризуется некоторым направлением (следует также считать, что прямая параллельна самой себе). Любая из параллельных прямых может служить представителем данного класса, а само направление есть класс эквивалентности. Множество всех направлений составляет фактор-множество множества всех прямых по отношению параллельности.

4. Классы вычетов по модулю m. Рассмотрим отношение сравнения по модулю m на множестве натуральных чисел, что записывается как $x = y \pmod m$ и означает: x сравнимо с y по модулю m (m — целое положительное число, не равное нулю), если $x - y$ делится на m. Целые числа, сравнимые по модулю m, связаны соотношением $x = y + km$ (k — целое число) и образуют подмножество целых чисел, имеющих одинаковый остаток j при делении на m. Так как эти подмножества не пересекаются, они являются классами эквивалентности, а в качестве представителя каждого из них естественно выбрать остаток $j = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Таким образом, *отношение сравнения по модулю m* определяет разбиение множества натуральных чисел на m классов $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$, где $M_j = \{j, j + m, j + 2m, \ldots\}$ — счетное множество, называемое *классом вычетов по модулю m*.

Например, при $m = 4$ имеем $M_0 = \{0, 4, 8, 12, \ldots\}$; $M_1 = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$; $M_2 = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$; $M_3 = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$. Представителями классов эквивалентности являются числа 0, 1, 2 и 3, так как $0 = 4 (\mathrm{mod} 4) = 8 (\mathrm{mod} 4) = \ldots$; $1 = 5 (\mathrm{mod} 4) = 9 (\mathrm{mod}\ 4) = \ldots$; $2 = 6 (\mathrm{mod}\ 4) = 10 (\mathrm{mod}\ 4) = \ldots$ и $3 = 7 (\mathrm{mod}\ 4) = 11 (\mathrm{mod}\ 4) = \ldots$. Таким образом, множество целых чисел разбивается отношением сравнения по модулю 4 на четыре класса эквивалентности. Внутри каждого класса эти числа неразличимы ($4 \sim 0$, $5 \sim 1$, $6 \sim 2$, $7 \sim 3$ и т. д.).

При $m = 1$ разбиение состоит из единственного класса, который совпадает с исходным множеством, т. е. имеем *полное отношение эквивалентности*, при котором любые два элемента эквивалентны

(все целые числа делятся на единицу). Отношение $x = y (\mathrm{mod}\, 2)$ разбивает множество целых чисел на классы четных и нечетных чисел.

Значение рассмотренного примера столь велико, что многие авторы принимают для отношения эквивалентности A обозначение $a = b (\mathrm{mod}\, A)$.

5. Идентификация элементов. Произвольное отношение эквивалентности определяет на некотором множестве обобщенную форму равенства. Классы эквивалентности состоят из всех тех элементов, которые неразличимы с точки зрения данного отношения эквивалентности. Разбиение множества на классы означает *идентификацию* эквивалентных между собой элементов. При этом каждый класс определяется его представителем (эталоном) и отождествляется с некоторым общим свойством или совокупностью свойств (параметров) входящих в него элементов (направление по отношению параллельности, остаток относительно сравнения по модулю m и т. п.).

Предельным случаем отношения эквивалентности является *тождественное равенство*. Единственный элемент, равный какому-либо данному элементу, есть этот самый элемент. Следовательно, имеем самое полное разбиение, при котором классы эквивалентности содержат только по одному элементу исходного множества.

6. Классы номинальных значений. В условиях массового производства стандартной детали (или компонента) определяется *ряд номинальных значений* характеризующей ее величины (емкость конденсатора, диаметр и твердость шарикоподшипника, чистота поверхности детали, содержание примесей вещества и т. п.). Например, для постоянных резисторов с допустимым отклонением сопротивления $\pm 20\%$ задается ряд: 1,0; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8 (ГОСТ 2825—67). Величины номинальных сопротивлений должны соответствовать числам, получаемым умножением этих значений на 10^k, где k — целое положительное или отрицательное число (1,5 кОм; 4,7 Ом; 0,68 Ом; 1,0 МОм и т. п.). Этими указаниями руководствуются при проектировании изделий с резисторами и при их сортировке в процессе производства.

Задание ряда номинальных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с допустимым отклонением Δx можно рассматривать как определение отношения эквивалентности в множестве M значений параметров x некоторых объектов. Неравенства $(x_i - \Delta x) \leqslant x < (x_i + \Delta x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ определяют n классов эквивалентности в множестве возможных значений x. Семейство представителей образуется совокупностью всех номинальных значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Объекты, параметры которых принимают эти значения, взаимозаменяемы (возможность замены любого объекта эквивалентным) и неразличимы (все эквивалентные объекты маркируются номинальным значением).

7. Матрица отношения эквивалентности. Элементы, принадлежащие некоторому классу эквивалентности, попарно эквивалентны между собой, а их сечения совпадают. Следовательно, столбцы матрицы отношения эквивалентности для элементов одного класса одинаковы и содержат единицы во всех строках, которые соответствуют этим элементам. Так как классы эквивалентности не пересекаются, то в столбцах различных классов не будет единиц в одинаковых строках.

Расположим элементы множества так, чтобы в каждом классе эквивалентности принадлежащие ему элементы стояли рядом. Тогда единичные элементы матрицы отношения эквивалентности образуют непересекающиеся квадраты, диагонали которых располагаются по главной диагонали матрицы. Например, для разбиения на классы эквивалентности $M_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; $M_2 = \{x_4\}$; $M_3 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$ имеем:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	1					
x_2	1	1	1					
x_3	1	1	1					
x_4				1				
x_5					1	1	1	1
x_6					1	1	1	1
x_7					1	1	1	1
x_8					1	1	1	1

.

8. Граф отношения эквивалентности. На рис. 46 изображен граф отношения эквивалентности, матрица которого приведена в (7). Каждому классу эквивалентности соответствует отдельная часть графа, которая представляет собой *полный направленный граф* на множестве ее вершин.

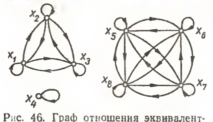


Рис. 46. Граф отношения эквивалентности на множестве X.

Как видно, матрицы и графы отношения эквивалентности содержат избыточную информацию и полностью определяются заданием классов эквивалентности.

9. Разбиение и отображение. Разбиение множества на классы можно связать с отображением $f: X \to Y$, ставящим каждому элементу из X в соответствие один и только один элемент из Y (рис. 47). Собирая в один класс все те элементы из X, образы которых в Y совпадают, приходим к некоторому разбиению на непере-

секающиеся подмножества $\{X_1, X_2, \ldots\}$. Каждое подмножество X_i характеризуется соответствующим ему образом $y_i \in Y$ и является классом эквивалентности. Обратно, если задана некоторая совокупность классов эквивалентности $\{X_1, X_2, \ldots\}$ множества X, то каждому элементу $x \in X$ можно поставить в соответствие тот класс X_i, к которому принадлежит x. В результате получаем отображение множества X *на* множество классов $\{X_1, X_2, \ldots\}$.

Пусть, например, задано отображение $\{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_2), (x_5, y_1), (x_6, y_3)\}$. Тогда классы эквивалентности, соответствующие образам y_1, y_2 и y_3, будут: $X_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$; $X_2 = \{x_4\}$ и $X_3 = \{x_2, x_6\}$. Отображение X на $\{X_1, X_2, X_3\}$ выразится множеством упорядоченных пар $\{(x_1, X_1), (x_2, X_3), (x_3, X_1), (x_4, X_2), (x_5, X_1), (x_6, X_3)\}$.

Итак, любое отображение $f: X \to Y$ порождает отношение эквивалентности на множестве X, причем $x_i \sim x_j$, если и только если $f(x_i) = f(x_j)$. Образы y_i классов эквивалентности $X_1, X_2, \ldots$ могут служить эталонами и образуют в совокупности систему представителей.

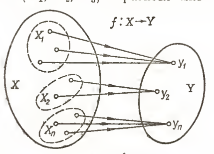


Рис. 47. Отображение $f: X \to Y$, порождающее отношение эквивалентности на X.

10. Измерения. Измерительный прибор можно рассматривать как устройство, отображающее множества возможных значений измеряемых величин x в множество элементов *функциональной шкалы* прибора. При использовании цифровых измерительных приборов *результат измерения* получается в виде некоторого n-разрядного числа $\alpha \in Y$, которое соответствует измеряемой величине x, заключенной в интервале $(\alpha_i - 0{,}5) \leqslant x < (\alpha_i + 0{,}5)$. Множество возможных значений x разбивается на 10^n классов эквивалентности, каждый из которых характеризуется соответствующим ему образом α_i из множества чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$.

В аналоговых приборах функциональная шкала значений α_i обычно наносится в виде меток на отрезок дуги или прямой, а результат измерения α_i определяется положением подвижного указателя относительно шкалы (иногда таким указателем является сам объект измерения, например, при измерении длины с помощью линейки или рулетки). Множество классов эквивалентности определяется соотношениями $(\alpha_i - \Delta\alpha) \leqslant x < (\alpha_i + \Delta\alpha)$, где $\Delta\alpha$ равно половине расстояния между соседними метками шкалы (предполагается, что шкала равномерная).

При различных измерениях, а также для градуировки приборов используют также *натуральные шкалы*. Например, шкала твердости

минералов задается системой неравенства $x < \beta_0$; $\beta_0 \leqslant x < \beta_1$; ...; $\beta_9 \leqslant x < \beta_{10}$; $\beta_{10} \leqslant x$, соответствующих 0, 1, 2, ..., 9, 10 баллам, причем β_i — твердости некоторых минералов (тальк, гипс, известковый шпат, ..., корунд, алмаз). Каждое неравенство определяет класс эквивалентности для твердости, а представителями этих классов являются твердость β_i, выраженная в баллах ($\beta_i = 0, 1, \ldots, 10$). Аналогично строятся натуральные шкалы температур, двенадцатибалльная шкала скорости ветра, шкала чувствительности фотопленок и т. п.

Следует отметить, что изложенное выше является идеализированной моделью, не учитывающей различных погрешностей, неизбежно сопровождающих процесс измерения в реальных условиях.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что каждое из следующих отношений является эквивалентностью:

а) подобие в множестве всех треугольников на плоскости;
б) принадлежность к одной группе в множестве студентов факультета;
в) равенство веса в множестве разновесов;
г) равномощность в произвольной системе множеств;
д) взаимозаменяемость на множестве деталей;
е) концентричность в множестве окружностей на плоскости.

2. Опишите характерные свойства графика отношения в множестве действительных чисел, если это отношение: а) рефлексивно, б) симметрично, в) транзитивно. Что можно сказать о графике отношения эквивалентности?

3. Отношение эквивалентности на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задано разбиением на классы: $M_1 = \{1, 4\}$; $M_2 = \{2, 3, 7\}$; $M_3 = \{5, 6\}$. Представьте это отношение множеством упорядоченных пар, матрицей и графом.

4. Укажите свойства, которыми обладают приведенные ниже отношения и объясните, почему они не являются эквивалентностями:

а) «x кратно y» в множестве целых чисел;
б) «x имеет общие точки с y» в множестве прямых на плоскости;
в) «x касается y» в множестве окружностей на плоскости;
г) «x знаком с y» в множестве людей.

5. Пусть $S = \{x(t) \mid P(x)\}$ — множество сигналов $x(t)$, характеризующихся свойством $P(x)$. Один из способов различения принимаемых сигналов состоит в подсчете числа пересечений с нулевым уровнем за определенный промежуток времени (рис. 48), что соответствует разбиению множества S на непересекающиеся подмножества:
$S_k = \{x(t) \mid x(t)$ имеет k несовпадающих пересечений на заданном интервале времени$\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

а) Охарактеризуйте отношение, задаваемое этим разбиением, как отношение эквивалентности.
б) Укажите систему представителей данного разбиения.
в) Как следует определить классы эквивалентности, чтобы их число не превышало величины n?

6. Охарактеризуйте отношения эквивалентности, порождаемые следующими отображениями:

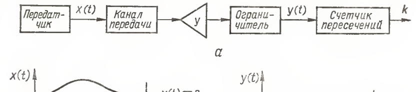
а) $f(x)$ — отец x;
б) $f(x)$ — рост x;

в) $f(x)$ — начальная буква имени x;
г) $f(x)$ — взаимно-однозначное отображение;
д) $f(x) = a$ (a — постоянная величина).

7. Покажите, что если A и B — отношения эквивалентности, то их пересечение $A \cap B$ также является эквивалентностью.

8. Покажите, что отношение A^{-1}, симметричное отношению эквивалентности A, также является эквивалентностью.

9. В общем случае объединение $A \cup B$ отношений эквивалентности A и B не является эквивалентностью. Приведите пример, подтверждающий это положение



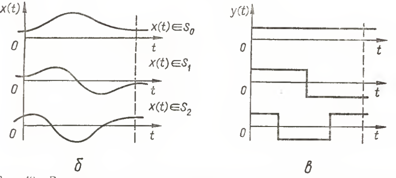


Рис. 48. Различение сигналов на основе числа пересечений нулевого уровня:

а — система передачи сигналов; *б* — передаваемые сигналы; *в* — принятые сигналы (после ограничителя).

10. Для того чтобы композиция AB отношений эквивалентности A и B была эквивалентностью, необходимо и достаточно, чтобы A и B коммутировали, т. е. $AB = BA$. Докажите это утверждение.

5. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Упорядоченность. *Отношение порядка* обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Его принято обозначать символом $\leqslant$. Запись $x \leqslant y$ означает, что пара (x, y) принадлежит множеству $A \subset M \times M$, являющемуся отношением порядка в множестве M, причем x *предшествует* y (или y *следует за* x). В принятых обозначениях свойства отношения порядка запишутся следующим образом: 1) $x \leqslant x$ (рефлексивность); 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность); 3) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует $x = y$ (антисимметричность).

Множество, на котором определено отношение порядка, называют *упорядоченным*, и говорят, что *порядок введен* этим отношением. Множество *совершенно (линейно, просто), упорядочено*, если для любых двух его элементов имеет место, по крайней мере, $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (его называют также *цепью*). Например, множество натуральных или действительных чисел с естественным отношением порядка $\leqslant$, множество значений длин волн на шкале радиоприемника и т п.

В общем случае может оказаться, что для некоторых пар (x, y) ни одно из соотношений $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ не имеет места (такие элементы называют *несравнимыми*). Тогда говорят, что множество *частично упорядочено*. Типичными примерами частичного порядка являются включение, отношение «быть делителем» и т. п. Так, отношение включения на множестве подмножеств некоторого универсума рефлексивно ($X \subset X$), транзитивно (если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$) и антисимметрично (из $X \subset Y$ и $Y \subset X$ следует $X = Y$), но среди всевозможных подмножеств имеются такие, что ни одно из соотношений $X \subset Y$ и $Y \subset X$ для них не имеет места. Аналогично не все пары элементов из множества целых чисел находятся в отношении «быть делителем».

2. Отношение строгого порядка. Отношение, наделенное свойствами транзитивности и антирефлексивности (следствиями этих двух свойств являются также асимметричность и антисимметричность), называют *отношением строгого порядка* и обозначают символом $<$. Свойство антирефлексивности означает, что элемент множества не может сравниваться сам с собой (как в случае строгого неравенства или строгого включения). В отличие от него введенное в (1) отношение называют *нестрогим порядком*. Между отношениями строгого и нестрогого порядка имеют место соотношения: $(\leqslant) = (<) \cup E$ и $(<) = (\leqslant) \setminus E$, где E — тождественное отношение.

Отношение строгого порядка характерно для различного рода *иерархий* с подчинением одного объекта другому (или другим). Если для некоторой совокупности элементов из M справедливо соотношение $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то в соответствии со свойством транзитивности $x_i < x_j$ $(i < j \leqslant n)$, т. е. отношение строгого порядка обусловливает как прямое, так и косвенное подчинение по старшинству. Говорят, что x_{i+l} покрывает x_i, если $x_i < x_j$, и не существует такого промежуточного элемента x, что $x_i < x < x_j$.

3. Последовательности. Элементы любого конечного множества M можно пронумеровать порядковыми числами 1, 2, 3, ..., n. Для счетного множества нумерацию следует понимать как взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел N на M, которое каждому числу i ставит в соответствие некоторый элемент x_i из M. Упорядоченное таким отображением множество $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ называется *последовательностью* (конечной или

бесконечной). Элемент x_i из M называют *членом последовательности* с индексом i.

Если отношение строгого порядка на конечном множестве совершенно, то на этом множестве всегда можно выбрать такую последовательность всех его элементов $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, что соотношение $x_i < x_j$ будет выполняться в том и только в том случае, когда $i < j \leqslant n$. Другими словами, любой совершенно строгий порядок на конечном множестве равносилен естественному порядку следования натуральных чисел. Если же порядок на конечном множестве не является совершенным, то элементы этого множества нельзя пронумеровать так, чтобы большим номерам соответствовали старшие элементы.

Нумерация элементов множества устанавливает совершенно строгий порядок на этом множестве. Например, на спортивных соревнованиях жеребьевкой каждому спортсмену ставится в соответствие номер; термины в предметном указателе располагаются в соответствии с порядком следования букв алфавита (здесь предполагается соответствие между последовательностью букв и отрезком натурального ряда чисел).

4. Весовые функции. Пусть на множестве M определено отображение $f : M \to R$ (R — множество действительных чисел), ставящее в соответствие каждому объекту x из M некоторое действительное число $f(x)$. Это число называют *весом*, а отображение f — *весовой функцией*. Иногда понятие веса совпадает с буквальным смыслом этого слова (вес детали какого-либо механизма, атомный вес химического элемента, полезный груз автомашины в колонне и т. п.). Но весом может служить любая числовая характеристика объекта (сопротивление резистора, объем тела, площадь участка, число баллов спортсмена и т. п.).

Если отображение f взаимно-однозначно, то на множестве M можно определить совершенно строгий порядок условием: $x < y$, если $f(x) < f(y)$. Действительно, поскольку не существует объектов с равными весовыми функциями, то для любой пары (x, y) справедливо либо $f(x) < f(y)$, либо $f(y) < f(x)$, т. е. все элементы сравнимы, и отношение антирефлексивно. В то же время оно транзитивно, так как для элементов $x, y, z \in M$ из $f(x) < f(y)$ и $f(y) < f(z)$ следует $f(x) < f(z)$.

Примерами совершенно строгого упорядочения множества, на котором определено инъективное отображение (весовая функция) являются: периодическая система Менделеева, расположение спортсменов по совокупности полученных баллов при условии, что нет одинаковых результатов и т. п.

5. Квазипорядок. Если отображение $f : M \to R$ не инъективно, т. е. два различных объекта x и y из M могут иметь равные веса $f(x) = f(y)$, то отношение между ними не является антисим-

метричным и, следовательно, не удовлетворяет определению порядка. В то же время, как показано в (4.9), с отображением f можно связать разбиение множества M на классы эквивалентности $\{M_1, M_2, \ldots, M_j, \ldots\}$. Каждый из них объединяет различные элементы из M с равными весами, причем этот вес служит представителем соответствующего класса.

Теперь можно говорить об упорядочении совокупности классов эквивалентности $\{M_1, M_2, \ldots\}$ некоторого множества M по их представителям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Так как система представителей $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ не содержит одинаковых элементов (в противном случае соответствующие им классы объединились бы в общий класс эквивалентности), то на этой системе как на множестве можно определить строгий порядок. Такое упорядочение отождествляет элементы множества M, принадлежащие к одному и тому же классу эквивалентности, и определяет на этом множестве *квазипорядок (предпорядок)*. Говорят также, что строгий порядок на множестве классов эквивалентности $\{M_1, M_2, \ldots\}$ множества M *индуцируется* квазипорядком.

Квазипорядок удовлетворяет условиям рефлексивности и транзитивности. Он является обобщением эквивалентности (в определение не входит свойство симметричности) и нестрогого порядка (не обязательно свойство антисимметричности). Отношение, являющееся одновременно эквивалентностью и нестрогим порядком, есть *тождественное равенство*. Можно также показать, что если A — квазипорядок, то $A \cap A^{-1}$ — эквивалентность. Совершенный квазипорядок индуцирует и совершенно строгий порядок на множестве классов эквивалентности.

Рассмотренный в (4. 6) ряд номинальных значений можно рассматривать как строго упорядоченное множество, а упорядоченное множество объектов, приведенных в соответствие этому ряду, вводится квазипорядком. Аналогично можно говорить, что квазипорядок на множестве возможных значений измеряемых величин индуцирует строгий порядок на функциональной шкале (множестве реперных точек) измерительного прибора (4. 10).

6. Области уровня. Классы эквивалентности множества M с квазипорядком, представляющие собой такие множества, где весовая функция f принимает фиксированные значения, обычно называются *областями уровня*. Например, в множестве конденсаторов, характеризуемых номинальными значениями емкости, области уровня — это подмножества конденсаторов с одинаковыми номинальными емкостями. Другим примером служит квазипорядок A на множестве комплексных чисел $z = a + bi$ такой, что $z_i A z_k$, если $a_i \leqslant a_k$. При этом различные комплексные числа с одинаковыми действительными частями объединяются в классы эквивалентности, множество которых может быть упорядочено по их представителям.

Пусть M — множество точек на топографической карте и $h(a)$ высота точки a над уровнем моря. Отношение $a \leqslant b$, если $h(a) \leqslant h(b)$, определяет квазипорядок на множестве M. Областями уровня служат *горизонтали (изолинии)* — геометрические места (различных) точек, высота которых над уровнем моря одинакова. Обычно такие горизонтали строят для некоторых фиксированных уровней $h_1, h_2, \ldots, h_n$ и по ним судят о характере изображаемого рельефа (рис. 49).

Аналогичный прием используется для представления на плоскости функций двух переменных $\varphi(x, y) = z$. Полагая $z = h_1, h_2, \ldots, h_n$, строят кривые (изолинии), соответствующие $\varphi_i(x, y) = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. На практике в такой форме обычно представляют рассчитанные или полученные экспериментально значения различных величин, характеризующих точки плоскости (или земной поверхности), температуры (изотермы), потенциала (эквипотенциальные линии) и т. п.

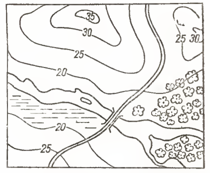


Рис. 49. Линии уровня (горизонтали) на топографической карте.

7. Комплексный показатель качества. Сравнение различных изделий (или любых объектов) по некоторой числовой характеристике сводится, как об этом говорилось в (4), к упорядочению множества соответствующих им весов, которые можно рассматривать как некоторый показатель качества. Сложное изделие характеризуется несколькими показателями качества $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (стоимость, надежность, габаритные размеры, масса и т. п.).

Для оценки различных типов изделий одинакового назначения используется *комплексный показатель качества*, который выражается некоторым числом $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Простейший способ определения этого числа основан на соотношении $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, где α_i — *коэффициент весомости* показателя x_i. Обычно под $x_1, x_2, \ldots, x_n$ понимают *относительные показатели* по сравнению с соответствующими показателями некоторого изделия, принятого в качестве базисного. Коэффициенты весомости α_i являются численными выражениями значимости показателей и их определение находится в компетенции специалистов конкретной отрасли промышленности.

Определив комплексные показатели качества некоторой совокупности изделий одинакового назначения и упорядочив множество этих показателей, можно судить о качестве изделий и сравнивать их

между собой. Изделия с одинаковыми показателями качества являются в этом отношении эквивалентными. Следует, однако, отметить, что порядок или квазипорядок на множестве изделий зависит от того, как определены коэффициенты весомости α_i, что составляет основную трудность при оценке качества.

8. Структура упорядоченных множеств. Приведем несколько определений, относящихся к структуре множества M, упорядоченного некоторым отношением порядка A. *Мажорантой (верхней границей)* подмножества $Q \subset M$ называют такой элемент $m \in M$,

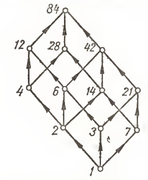
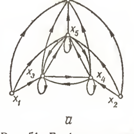


Рис. 50. Упрощенный граф отношения «быть делителем».



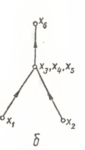


Рис. 51. Граф отношения квазипорядка (*а*) и его упрощенное изображение (*б*).

что для всех $q \in Q$ справедливо соотношение qAm. *Минорантой (нижней границей)* подмножества $Q \subset M$ называют такой элемент $n \in M$, что для всех $q \in Q$ справедливо соотношение nAq.

Если мажоранта m (миноранта n) принадлежит Q, то m называется *максимумом* (n называется *минимумом*) множества Q и обозначается $\max Q$ ($\min Q$). Максимум, как и минимум, если он существует, единственен; поэтому, когда говорят о минимуме или максимуме множества Q, имеют в виду вполне определенный элемент.

Множество $Q \subset M$ может иметь много мажорант и минорант. Если множество мажорант (минорант) имеет минимум (максимум), то этот элемент единственен. Его называют *верхней (нижней) гранью* или *супремумом (инфинумом)* множества Q и обозначают $\sup Q$ ($\inf Q$).

9. Матрицы отношений порядка. Отношению порядка соответствует матрица, у которой главная диагональ заполнена единицами (рефлексивность). Для каждой пары единичных элементов, один из которых расположен в i-м столбце и j-й строке, а второй — в j-м столбце и k-й строке, обязательно существует единичный элемент в i-м столбце и k-й строке (транзитивность). Кроме того, ни один единичный элемент не имеет симметричного относительно главной

диагонали (антисимметричность). Например, матрица отношения «быть делителем» на множестве {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84} имеет вид:

	1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84
1	1											
2	1	1										
3	1		1									
4	1	1		1								
6	1	1	1		1							
7	1					1						
12	1	1	1	1	1		1					
14	1	1				1		1				
21	1		1			1			1			
28	1	1		1		1		1		1		
42	1	1	1		1	1		1	1		1	
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Матрица отношения строгого порядка отличается тем, что все элементы главной диагонали нулевые (антирефлексивность), а квазипорядка — допустимостью симметричных единичных элементов.

10. Графы отношений порядка. Граф нестрогого порядка не содержит параллельных и противоположно направленных дуг, с каждой вершиной связана петля, а также все вершины любого пути попарно связаны между собой дугами в направлении этого пути. Граф строгого порядка отличается тем, что отсутствуют петли, а граф квазипорядка — тем, что допускает параллельные и противоположно направленные дуги.

Так как отношение порядка транзитивно, то его граф обычно заменяется графом редукции, причем в графе нестрогого порядка петли не изображаются. Граф квазипорядка можно упростить, заменив его графом строгого порядка на множестве вершин, соответствующих классам эквивалентности. При этом каждая такая вершина изображает все множество элементов данного класса.

На рис. 50 показан упрощенный граф отношения «быть делителем» из (5. 9). На графе наглядно прослеживается структура упорядоченного множества. Так, для подмножества $Q = \{4, 6, 14, 28, 42\}$ мажорантой является элемент 84, а минорантами — элементы 1 и 2. Максимума и минимума Q не имеет, но $\sup Q = 84$, а $\inf Q = 2$. Для всего множества единственная мажоранта 84 явля-

ется одновременно максимальным элементом, а миноранта 1 — минимальным элементом.

На рис. 51, *а* показан граф отношения квазипорядка, а на рис. 51, *б* — упрощенный граф отношения порядка на множестве классов эквивалентности $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$ и $\{x_6\}$, индуцированного этим квазипорядком.

Совершенный порядок всегда представляется связным графом, в то время как граф частичного порядка может быть несвязным.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что приведенные ниже отношения являются отношениями порядка и определить тип упорядоченности:

а) «x тяжелее y» в множестве деталей;
б) «x подчинен y» в множестве должностей;
в) «x длиннее y» в множестве отрезков на плоскости;
г) «x старше y» в множестве людей;
д) «x не превосходит y» в множестве номеров домов на улице;
е) «из x следует y» в множестве высказываний;
ж) «x находится внутри y» в множестве окружностей на плоскости.

2. В множестве комплексных чисел задано отношение A такое, что для любых x, $y \in Z$ имеет место соотношение xAy, если действительная часть числа x меньше действительной части числа y. Покажите, что A — квазипорядок, и опишите множество классов эквивалентности, в котором этот квазипорядок индуцирует строгий порядок.

3. Пять приборов оценивают по четырем показателям в десятибалльной системе с коэффициентом весомости α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Определите на основании приведенной таблицы комплексные показатели качества приборов и упорядочите в соответствии с этими показателями множество приборов. К какому типу относится полученное упорядочение?

Показатели качества	Коэффициенты весомости	Оценка приборов (в баллах)				
		1	2	3	4	5
x_1	0,2	5	4	7	8	6
x_2	0,1	6	6	4	9	3
x_3	0,5	4	6	3	5	7
x_4	0,3	9	5	10	7	8

4. На рис. 52 показан граф организационной структуры, определяемой соотношением «x начальник y» со свойствами: 1) никто не является собственным начальником; 2) никто не может быть одновременно начальником и подчиненным другого лица; 3) начальник начальника некоторого лица является начальником этого лица.

а) Определите тип упорядоченности такой организации.
б) Покажите, что необходимым и достаточным условием такой организации является отсутствие контуров в соответствующей ей графе.

5. Вес (значимость) каждого лица в организации (задача 4) можно оценивать целым числом $m(x)$, которое определяется по формуле

$$m(x) = \sum_k k n_k,$$

где n_i — число подчиненных уровня k. Уровень подчинения равен длине кратчайшего пути от вышестоящего лица x к подчиненному y, т. е. числу дуг графа в самом коротком пути от вершины x к вершине y. Если x не имеет подчиненных, то $m(x) = 0$.

а) Определите веса всех лиц в организации, заданной графом на рис. 52.

б) Упорядочите множество всех лиц данной организации по их весам и укажите, к какому типу относится эта упорядоченность.

6. Может ли оказаться (при определении понятия уровня, как это сделано в задаче 5), что некоторое лицо в организации характеризуется меньшим весом, чем его подчиненный? Приведите пример.

7. Если уровень подчинения k определить как самый длинный путь от вышестоящего лица к подчиненному, то ситуация, описанная в задаче 6, не может иметь места. Докажите это положение. Определите значимость всех лиц в организации (рис. 52), приняв приведенное здесь определение уровня k.

Директор

Заместители директора

Начальники отделов

Референты

Рис. 52. Граф организационной структуры к задаче 4.

8. Пусть A —подмножество действительных чисел, состоящее из числа -1 и из чисел $0 \leqslant x < 1$. Покажите, что:

а) любое число, большее или равное 1, является мажорантой множества A, а любое число, меньшее или равное -1, — минорантой этого множества;

б) верхняя грань (супремум) равна 1, а нижняя грань (инфинум) равна -1.

9. Покажите, что если отношение A — строгий порядок (нестрогий порядок, квазипорядок), то симметричное ему A^{-1} также является строгим порядком (нестрогим порядком, квазипорядком).

10. Покажите, что если A и B — строгие порядки, то пересечение $A \cap B$ является строгим порядком. Распространите это положение на нестрогий порядок и квазипорядок.

11. Объединение порядков в общем случае не является порядком. Если A и B — строгие порядки, то объединение $A \cup B$ является строгим порядком, если и только если $BA \cup AB \subset A \cup B$. Для того чтобы объединение $A \cup B$ нестрогих порядков было также нестрогим порядком, необходимо и достаточно выполнение условий $BA \cup AB \subset A \cup B$ и $A \cup B^{-1} \subset E$. Приведите примеры.

6. ОТНОШЕНИЕ ТОЛЕРАНТНОСТИ

1. Толерантность. *Отношение толерантности* τ на множестве M удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Упорядоченная пара (x, y) принадлежит множеству $\tau \subset M \times M$, если: 1) $x\tau x$ и 2) из $x\tau y$ следует $y\tau x$. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и значит эквивалентность есть частный случай толерантности.

Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждый объект неразличим сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время, если один объект сходен с другим, а другой сходен с третьим, то это вовсе не означает, что все они обязательно сходны между собой, т. е. свойство транзитивности может не выполняться.

Например, толерантность на множестве точек плоскости может быть задана свойством: расстояние между любой парой точек не превышает величины a. С этим свойством обычно связывается моделирование зрительного органа. Очевидно, толерантностью может быть острота зрения, т. е. условие того, что любые пары точек неразличимы для глаза в его поле зрения.

Развлекательным примером толерантности является популярная задача «превращение мухи в слона» (муха—мура—тура—тара—кара—каре—кафе—кафр—каюр—каюк—крюк—крок—срок—сток—— стон — слон). Здесь отношение толерантности определяется сходством между четырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой. Если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кроссворда.

2. Толерантность кортежей. На множестве кортежей (векторов) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ толерантность можно задать различными способами, например, обусловить наличие в паре кортежей хотя бы одной общей компоненты x_i.

Компонентами кортежа могут быть любые объекты. Если они принимают целочисленные значения от 0 до $m - 1$, то кортеж можно рассматривать как n-разрядное число, записанное в позиционной системе счисления с основанием m. Например, кортеж $x = (7, 0, 4, 9, 2)$ соответствует десятичному числу 70492. Количество всех таких кортежей, очевидно, равно m^n.

При $m = 2$ имеем двоичный кортеж, его компоненты принимают значения 0 или 1. Для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует только один не толерантный к нему кортеж $x' = (1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n)$.

Двоичный кортеж можно трактовать также как содержимое n-разрядного регистра вычислительной машины. Состояние машины определяется содержимым всех его регистров, т. е. множеством двоичных кортежей. Если два состояния машины различаются содержимым некоторого ограниченного числа регистров, то говорят, что эти состояния толерантны, а машину называют *толерантным автоматом*.

3. Толерантность числовых функций. Каждый кортеж $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которого — некоторые действительные

числа x_i, можно считать числовой функцией, заданной на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Каждому числу i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ эта функция сопоставляет число x_i. Толерантность двух функций означает, что хотя бы в одной точке они принимают одинаковые значения (точка A на рис. 53).

Если функции определены на некотором отрезке действительных чисел, то толерантность на множестве таких функций означает совпадение хотя бы одного из значений двух функций, соответствующих одному и тому же аргументу. Другими словами, толерантными являются функции, графики которых пересекаются (точки пересечения A и B на рис. 53).

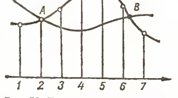


Рис. 53. Толерантность функций.

4. Многомерный симплекс. Рассмотрим совокупность S_q всех непустых подмножеств множества $q + 1$ натуральных чисел $H = \{1, 2, \ldots, q + 1\}$. Определим на этой совокупности отношение толерантности: два подмножества толерантны, если они содержат хотя бы один общий элемент.

При $q = 0, 1, 2, 3$ множество S_q можно представить соответственно точкой, отрезком, треугольником и тетра́эдром (рис. 54), отображая одноэлементные подмножества вершинами, двухэлементные — ребрами, трехэлементные — гранями и четырехэлементные — геометрическим телом (тетраэдром). Если $q > 3$, то геометрическое представление множества S_q в обычном трехмерном пространстве теряет наглядность, но может быть формально продолжено в абстрактном пространстве, имеющем q измерений.

Рис. 54. Многомерные симплексы ($q = 0, 1, 2, 3$).

Множество S_q называют *q-мерным симплексом*. Симплекс обобщает понятия отрезка, треугольника и тетраэдра на многомерный случай. Подмножества, содержащие $k + 1$ элемент, рассматриваются как *k-мерные грани*. Толерантность граней симплекса (наличие общих вершин) означает их *геометрическую инцидентность*.

5. Толерантность в множестве подмножеств. Пусть H — произвольное конечное множество, элементами которого могут быть объекты любой природы (предметы, числа, фигуры, свойства и т. п.), и S_H — множество всех его непустых подмножеств. Если H содержит

q элементов, количество элементов в $S_н$ равно $2^q - 1$ (вычитаемая единица соответствует пустому подмножеству универсума H).

Толерантность в множестве $S_н$ можно задать условием: два подмножества X, $Y \in S_н$ ($X \subset H$ и $Y \subset H$) толерантны, если они содержат хотя бы один общий элемент. Это значит, что $X \tau Y$ при условии $X \cap Y \neq \varnothing$.

Пусть, например, $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ и заданы подмножества $X = \{\alpha_1, \alpha_2\}$; $Y = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$; $Z = \{\alpha_4\}$; в соответствии с определением $X \tau Y$ и $Y \tau Z$, но X и Z не толерантны, так как ни один из элементов из X не содержится в Z.

6. Сходство как толерантность. Сходство между различными объектами имеет точный смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта считаются *сходными (толерантными)*, если они обладают хотя бы одним общим признаком.

Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ множество объектов и $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — множество признаков. Каждому элементу x_i из M соответствует некоторое подмножество H_i признаков ($H_i \subset H$). Следовательно, сходство между объектами x_i и x_j определяется толерантностью соответствующих им подмножеств H_i и H_j из H, т. е. условием $H_i \cap H_j \neq \varnothing$.

Если рассматривать соответствие между объектами и признаками как бинарное отношение A между множеством объектов M и множеством признаков H, то элементами A будут упорядоченные пары $(x, \alpha) \in A$, в каждой из которых первая координата является объектом, а вторая — признаком. Очевидно, множество H_i признаков объекта x_i является сечением $A(x_i)$ этого отношения, т. е. $H_i = A(x_i)$. Как было показано в (2. 3), все такие сечения полностью определяют бинарное отношение A.

Итак, толерантность τ на множестве объектов M можно задать с помощью некоторого всюду определенного бинарного отношения A от M к H следующим образом: для любой пары объектов x_i и x_j из M имеет место $x_i \tau x_j$, если и только если $A(x_i) \cap A(x_j) \neq \varnothing$.

Действительно, отношение τ симметрично, ибо из $x_i \tau x_j$ следует $A(x_i) \cap A(x_j) \neq \varnothing$, но $A(x_i) \cap A(x_j) = A(x_j) \cap A(x_i)$, следовательно, $x_j \tau x_i$. Оно также рефлексивно, поскольку отношение A определено на всем M. В этом и только в этом случае множество $A(x_i) \cap A(x_i) = A(x_i)$ не пусто для любого $x_i \in M$. Следовательно, τ — отношение толерантности.

7. Классы толерантности. Множество $L \subset M$, любые два элемента которого толерантны, называют *предклассом толерантности*.

Если толерантность связана с отношением A, то обратное отношение A^{-1} устанавливает соответствие между признаками и объектами. Каждому признаку $\alpha_i \in H$ соответствует некоторая сово-

купность объектов из M, которые обладают этим признаком. Такая совокупность определяется сечением $A^{-1}(\alpha_i)$ и является предклассом. Следовательно, множество всех различных сечений $A^{-1}(\alpha_i) = L_i$ образует некоторое множество предклассов, причем каждый объект из M входит хотя бы в один предкласс.

Некоторые из предклассов могут быть связаны отношением включения $L_i \subset L_j$. Если некоторый предкласс не является подмножеством никакого другого предкласса, то он является максимальным предклассом и называется *классом толерантности*.

Чтобы выделить из множества предклассов L_i классы толерантности, необходимо попарно сравнить все предклассы относительно включения. При этом, если $L_i \subset L_j$, то L_i отбрасывается и продолжается сравнение L_j с другими предклассами до тех пор, пока не останутся только предклассы, которые не связаны отношением включения. Они и образуют совокупность классов толерантности $\{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$.

Различные классы толерантности могут содержать одинаковые элементы и, следовательно, являются пересекающимися множествами. В то же время их объединение равно множеству M, т. е. $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_p = M$. Говорят, что классы толерантности образуют *покрытие* множества M.

Пусть, например, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ и $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, причем объект x_1 наделен признаками α_3 и α_5, т. е. $H_1 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$ и аналогично $H_2 = \{\alpha_2, \alpha_4\}$; $H_3 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$; $H_4 = \{\alpha_2, \alpha_4\}$; $H_5 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$; $H_6 = \{\alpha_3, \alpha_5\}$; $H_7 = \{\alpha_4\}$. Соответствующее отношение выражается матрицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
α_1					1		
α_2		1		1	1		
α_3	1		1		1	1	
α_4		1		1	1		1
α_5	1		1			1	

Отсюда определяем предклассы как сечения обратного отношения: $L_1 = \{x_5\}$; $L_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$; $L_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$; $L_4 = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}$; $L_5 = \{x_1, x_3, x_6\}$. Так как $L_1 \subset L_2 \subset L_4$ и $L_5 \subset L_3$, то классами толерантности являются L_3 и L_4, т. е. $K_1 = L_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$ и $K_2 = L_4 = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}$.

8. Толерантность и эквивалентность. Изложенный способ образования классов толерантности подсказывает связь между толерантностью и эквивалентностью.

В частном случае, когда каждый объект характеризуется только одним признаком (отношение A от M к H есть отображение или функция), классы толерантности объединяют только те объекты, которые обладают данным признаком. При этом толерантность переходит в эквивалентность, а классы толерантности — в классы эквивалентности. Другая формулировка условия совпадения толерантности с эквивалентностью требует, чтобы классы толерантности не пересекались друг с другом.

Более глубокая связь между отношениями толерантности и эквивалентности устанавливается при рассмотрении подмножеств

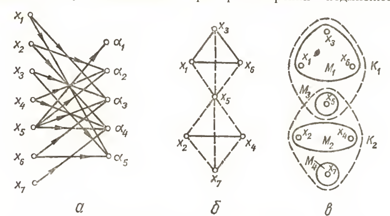


Рис. 55. Отношение толерантности:
а — граф отношения $M \to H$; *б* — граф толерантности; *в* — карта отношения толерантности.

$H_i = A(x_i)$ признаков, соответствующих объекту $x_i \in M$. Разобьем M на непересекающиеся классы, поместив в каждый класс все объекты x_i из M, для которых H_i совпадают. Тогда это разбиение $\{M_1, M_2, \ldots\}$ определит на множестве M отношение эквивалентности. Так, для примера из (7) имеем $M_1 = \{x_1, x_3, x_6\}$; $M_2 = \{x_2, x_4\}$; $M_3 = \{x_5\}$, $M_4 = \{x_7\}$.

Так как эквивалентность является частным случаем толерантности, то каждый класс эквивалентности является подмножеством какого-либо класса толерантности либо совпадает с ним. Значит классы эквивалентности являются предклассами или классами толерантности (в нашем примере $M_1 \subset K_1$, $M_2 \subset K_2$, $M_3 \subset K_1$, $M_3 \subset K_2$, $M_4 \subset K_2$). Отсюда также следует, что класс эквивалентности связан отношением включения с пересечением классов толерантности, подмножествами которых он является $(M_3 \subset K_1 \cap K_2)$. Если классы толерантности не пересекаются, то толерантность переходит в эквивалентность. Ясно также, что класс толерантности

выражается через объединение входящих в него классов эквивалентности ($K_1 = M_1 \cup M_3$; $K_2 = M_2 \cup M_3 \cup M_4$).

9. Матрица толерантности. Пусть толерантность определена как совокупность классов толерантности $\{K_1, K_2, \ldots\}$. Внутри каждого такого класса любые два элемента толерантны, следовательно, кроме рефлексивности и симметричности имеет место и транзитивность. Поэтому подобно эквивалентности, классу толерантности соответствует заполненный единичными элементами квадрат, диагональ которого располагается по главной диагонали матрицы. Но в отличие от эквивалентности эти квадраты пересекаются, так что в целом толерантность не транзитивна.

Если при записи матрицы расположить элементы множества совокупностями, соответствующими классам эквивалентности и толерантности, то для примера из (7) имеем:

	x_1	x_3	x_6	x_5	x_2	x_4	x_7		
x_1	1	1	1	1				M_1	K_1
x_3	1	1	1	1					
x_6	1	1	1	1					
x_5	1	1	1	1	1	1	1	M_3	K_1, K_2
x_2				1	1	1	1	M_2	K_2
x_4				1	1	1	1		
x_7				1	1	1	1	M_4	

10. Граф толерантности. Подграф, определяемый разбиением $\{M_1, M_2, \ldots\}$, состоит из отдельных частей, которые в графе толерантности объединяются за счет пересечения классов толерантности $\{K_1, K_2, \ldots\}$. Для упрощения петли на графе не изображаются, а параллельные и противоположно направленные дуги заменяются ненаправленной дугой.

На рис. 55, *а* показан граф бинарного отношения $M \to H$, а на рис. 55, *б* — граф толерантности для примера из (7). Отношение толерантности полностью определяется его *картой*, на которой изображаются классы эквивалентности (или любое другое покрытие) и классы толерантности (рис. 55, *в*).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из приведенных ниже отношений являются толерантностями?
а) «x перпендикулярно y» в множестве прямых;
б) «x знаком с y» в множестве людей;
в) «x имеет общие точки с y» в множестве геометрических фигур;
г) «x рядом с y» в множестве книг на полке.

2. Пусть $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ — множество объектов и $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ — множество признаков. Бинарное отношение задано матрицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
α_1		1	1	1	1			
α_2		1	1					
α_3	1					1		
α_4			1		1			
α_5		1	1		1		1	1
α_6	1	1				1		

а) определить предклассы и классы толерантности;
б) определить классы эквивалентности, связанные с отношением;
в) начертить граф данного отношения;
г) начертить граф и карту толерантности.

3. Два ребра графа считаются смежными, если они имеют общую вершину (каждое ребро смежно с самим собой):
а) показать, что смежность ребер графа является толерантностью, которая задается отношением инцидентности ребер и вершин;
б) записать матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис. 56, и на ее основании определить предклассы и классы толерантности;
в) изобразить граф и карту данного отношения толерантности.

Рис. 56. Граф к задаче 3.

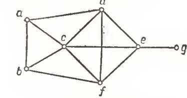


Рис. 57. Граф к задаче 5.

4. Пусть толерантность определена как отношение смежности на множестве ребер графа. Покажите, что:
а) для простого графа без концевых вершин классы толерантности — это множества ребер, инцидентных вершинам, и число таких классов равно числу вершин;
б) для произвольного мультиграфа классы эквивалентности объединяют кратные ребра.

5. Пусть на множестве вершин графа определена толерантность как отношение соседства: две вершины считаются соседними, если они имеют общее ребро, причем каждая вершина соседняя с самой собой. Определить классы толерантности на множестве вершин графа, показанного на рис. 57. Имеет ли эта задача другие решения?

6. Совокупность классов толерантности $K = \{K_1, K_2, \ldots\}$ в множестве M образует базис, если: 1) для всякой толерантной пары $x, y \in M$ существует класс толерантности из K, который содержит эти элементы; 2) удаление из K хотя бы одного класса приводит к потере этого свойства. Иначе говоря, для всякого $K_i \in K$ существует толерантная пара x, y, для которой K_i — единственный общий класс толерантности в K. Покажите, что:

а) отношение соседства на множестве вершин графа (рис. 58) имеет базис, состоящий из классов толерантности, которые объединяют вершины заштрихованных треугольников;

б) для рассматриваемого примера существует только два базиса (найдите другой базис).

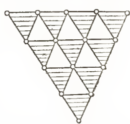


Рис. 58. Базис толерантности на множестве вершин графа к задаче 6.

7. Пусть M — множество n-разрядных десятичных чисел и K_{ij} — подмножества этого множества ($K_{ij} \subset M$), состоящие из всех тех чисел, которые в i-м разряде содержат цифру j ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, 9$).

а) Покажите, что K_{ij} — классы толерантности, образующие базис;

б) Сколько элементов содержит каждый из классов толерантности K_{ij} и сколько всего имеется таких классов?

8. Покажите, что для любого рефлексивного отношения A отношения $A \cup A^{-1}$ и $A \cap A^{-1}$ являются толерантностями.

7. ЗАКОНЫ КОМПОЗИЦИИ

1. Композиция объектов. В математике и ее приложениях большое значение имеют отношения, ставящие в соответствие паре каких-либо объектов (a, b) третий объект c. Примерами таких отношений являются действия над числами. В общем случае отношение может представлять собой некоторую *операцию* не только между числами, но и между объектами любой природы. При этом запись $a \top b = c$, или $a \perp b = c$, означает, что a в композиции с b дает c. Символ $\top$ (или $\perp$) обозначает операцию, объекты a и b называют *операндами*, а объект c — *результатом операции* или *композицией объектов* a и b.

Обозначим множества операндов соответственно через A и B ($a \in A$ и $b \in B$), а множество результатов операции — через C ($c \in C$). Так как множество всех пар (a, b) есть прямое произведение $A \times B$, то операцию определяют как отображение множества $A \times B$ в C, т. е. $A \times B \to C$, и часто называют *законом композиции*.

2. Таблица Кэли. Любой закон композиции $A \times B \to C$ над конечными множествами можно задавать прямоугольной матрицей *(таблицей Кэли)*. Строки таблицы соответствуют элементам множества A, столбцы — элементами множества B. На пересечении строки и столбца, соответствующих паре (a, b), располагается элемент $c = a \top b$.

Хорошо известными примерами являются таблицы сложения и умножения одноразрядных чисел. В общем случае таблица, определяющая бинарную операцию, имеет вид:

$\top$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\cdots$
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	$\cdots$
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	$\cdots$
a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	$\cdots$
a_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

3. Законы композиции на множестве. Множества A, B, C, участвующие в операции $A \times B \to C$, не обязательно должны быть различными. Если $B = C = S$, то говорят, что закон композиции *определен на множестве* S.

Различают *внутренний* закон композиции $S \times S \to S$ и *внешний* закон композиции $\Omega \times S \to S$, где Ω и S — различные множества. В случае внутреннего закона говорят, что множество образует *группоид* относительно операции $\top$. В случае внешнего закона композиции элементы $\alpha \in \Omega$ называют *операторами*, а Ω — *множеством операторов* на множестве S.

Примерами внутреннего закона композиции являются сложение $a + b = c$ и умножение $ab = c$ на множестве действительных чисел, а также геометрическое суммирование векторов на плоскости. Умножение вектора на скаляр может служить примером внешнего закона композиции на множестве векторов, причем операторами являются скаляры — элементы множества действительных чисел.

Пусть S — множество дифференцируемых функций $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и Ω — множество операторов дифференцирования $\partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда паре $(\partial/\partial x_j, f_i)$ можно поставить в соответствие частную производную $\partial f_i/\partial x_j$, т. е. имеем внешний закон композиции на множестве дифференцируемых функций.

В остальной части этого параграфа речь будет идти о внутренних законах композиции.

4. Матрица и граф группоида. Конечный группоид S относительно закона $\top$ определяется квадратной матрицей n-го порядка (n — число элементов группоида), например,

$\top$	a	b	c	d
a	b	c	a	b
b	a	b	c	a
c	b	a	d	d
d	d	b	d	b

Построение графа группоида основано на представлении бинарного соотношения $a \top b = c$ (рис. 59, *а*), где дуги графа изображают элементы $a, b, c \in S$, причем операнды образуют некоторый путь, а дуга результата операции замыкает этот путь. Если $a \top b = a$, то b изображается петлей в конечной вершине дуги a. При построении графа сначала наносят дуги для всех элементов группоида как выходящие из одной вершины, а затем последовательно изображают все бинарные соотношения.

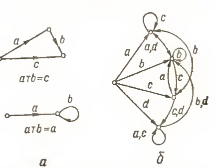


Рис. 59. Граф операции на множестве: *а* — операнды a, b и результат операции c; *б* — граф группоида.

На рис. 59, *б* изображен граф группоида, заданного приведенной выше матрицей. Дуги a, b, c, d, выходящие из одной вершины, соответствуют элементам группоида. Так как $a \top a = b$, $a \top b = c$, $a \top c = a$ и $a \top d = b$, то из конца дуги a проводят дуги a, b, c, d соответственно к конечным вершинам дуг b, c, a, b. Две параллельные дуги a и d, направленные к конечной вершине дуги b, условно изображают одной дугой a, d. Дуга c начинается и кончается в конечной вершине дуги a, т. е. образует петлю. Аналогично изображают на графе и остальные соотношения, определяемые матрицей группоида.

5. Свойства внутреннего закона композиции. Операции на множестве S могут обладать некоторыми общими свойствами, которые обычно выражаются соотношениями между элементами из S:

коммутативность $a \top b = b \top a$;

ассоциативность $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$;

дистрибутивность слева $(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$ и справа $c \perp (a \top b) = (c \perp a) \top (c \perp b)$.

На множестве действительных чисел сложение и умножение ассоциативны и коммутативны. Умножение дистрибутивно (слева и справа) относительно сложения, но сложение не дистрибутивно относительно умножения, так как вообще $a + bc \neq (a + b)(a + c)$. Возведение в степень не ассоциативно $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$, не коммутативно $a^b \neq b^a$, но дистрибутивно справа относительно умножения, так как $(ab)^c = a^c b^c$. Пересечение и объединение множеств взаимно дистрибутивны относительно друг друга. Если в множестве $F \subset S$ композиция любых двух элементов из F также принадлежит F, то F называется *замкнутым* относительно рассматриваемого закона композиции (подмножество четных чисел является замкнутым относительно сложения и умножения).

6. Регулярный, нейтральный и симметричный элементы. Закон композиции наделяет элементы множества некоторыми общими свойствами. При различных законах одни и те же элементы могут обладать различными свойствами. Поэтому имеет смысл говорить о свойствах элементов множества S относительно заданного на нем закона композиции $\top$.

Элемент a называется *регулярным*, если из соотношений $a \top x = a \top y$ и $x \top a = y \top a$ следует $x = y$ (*сокращение* на регулярный элемент). Всякое число регулярно относительно сложения, а для умножения регулярно всякое число, кроме нуля ($0x = 0y$ не влечет $x = y$).

Нейтральным элементом $e \in S$ называют такой элемент, что для всех элементов x из S справедливо $e \top x = x \top e = x$ (если нейтральный элемент существует, то он единственен и регулярен). Среди чисел нуль — нейтральный элемент относительно сложения, а единица — относительно умножения. Пустое множество является нейтральным элементом относительно объединения, а основное множество (универсум) — относительно пересечения. На множестве всех квадратных матриц n-го порядка с числовыми элементами нулевая и единичная матрицы служат соответственно нейтральными элементами относительно сложения и умножения.

Если множество содержит нейтральный элемент e относительно закона композиции $\top$, то элемент b называется *симметричным* (*обратным, противоположным*) элементу a, если $a \top b = b \top a = e$; при этом a называют *симметризуемым* элементом и b обозначается через $\bar{a}$, т. е. $b = \bar{a}$. Относительно ассоциативного закона, элемент $\bar{a}$, симметричный элементу a (если он существует), единственен и регулярен.

При сложении симметричным некоторому числу x будет $-x$, а при умножении x^{-1}. Например, симметричными элементами на множестве квадратных матриц n-го порядка относительно умножения являются взаимно-обратные матрицы. Множество всех собственных подмножеств относительно объединения или пересечения не содержит симметричных элементов. Множество, в котором всякий элемент имеет симметричный, называется *симметризуемым*.

7. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Свойства законов композиции можно представить в двух формах. В аддитивных обозначениях операция $\top$ записывается символом сложения $(+)$, а в мультипликативных — символом умножения $(\cdot)$. Если множество наделено двумя законами композиции, то чаще всего первый из них $\top$ считается *аддитивным*, а второй $\perp$ — *мультипликативным*. В аддитивной записи нейтральный элемент обозначается через 0 и называется *нулем*, а симметричный элементу a — через $(-a)$. В мультипликативной записи нейтральный элемент обозначается через 1 и называется *единицей*, а симметричный элементу a — через a^{-1}.

Если закон композиции ассоциативный и коммутативный, а элементы множества $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ отмечены *операторным индексом* i, то в аддитивной записи

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

и в мультипликативной записи

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Следует подчеркнуть, что здесь, в отличие от элементарной алгебры, знаки $(+)$ и $(\cdot)$ не обязательно означают сложение и умножение чисел. Они просто заменяют в различных соотношениях символы $\top$ и $\perp$, указывая на то, что над элементами множества (не обязательно числами) выполняются некоторые операции. Эти операции могут лишь внешне напоминать обычные операции сложения или умножения чисел, но по существу в общем случае — это другие операции. Удобство аддитивных и мультипликативных обозначений состоит в том, что при операциях над числами различные соотношения совпадают с общепринятой формой записи.

8. Алгебраические системы. Определяя на некотором множестве S один или два закона композиции и наделяя их определенными свойствами, а также задавая структуру множества относительно законов композиции (наличие нейтрального элемента и симметризуемость множества), получаем различные *алгебраические системы (структуры* или *модели)*. Наиболее употребительные из них

Таблица 2

Алгебраические системы (модели)

Название алгебраических систем	Первый закон (аддитивный)				Второй закон (мультипликативный)			
	Свойства		Элементы		Свойства		Элементы	
	Ассоциативность	Коммутативность	Нейтральный	Симметричный	Ассоциативность	Коммутативность	Нейтральный	Симметричный
Полугруппа (моноид)	*							
Абелева (коммутативная) полугруппа	*	*						
Полугруппа с нулем (единицей)	*		*					
Абелева полугруппа с нулем (единицей)	*	*	*					
Группа	*		*	*				
Абелева (коммутативная) группа	*	*	*	*				
Ассоциативное кольцо	*	*	*	*	*			
Абелево (коммутативное) кольцо	*	*	*	*	*	*		
Кольцо с единицей (унитарное кольцо)	*	*	*	*	*		*	
Абелево кольцо с единицей	*	*	*	*	*	*	*	
Тело	*	*	*	*	*		*	*
Поле (коммутативное тело)	*	*	*	*	*	*	*	*

Примечания: 1. Второй закон композиции (если он определен) является дистрибутивным слева и справа относительно первого закона. 2. Симметричные элементы относительно второго закона определены для всех элементов, кроме нейтрального относительно первого закона (нуля).

приведены в табл. 2, где звездочка (*) указывает на то, что данный закон обладает отмеченными свойствами, и множество содержит относительно этого закона соответствующие элементы.

Так, *группа* — это наделенное ассоциативным законом множество, содержащее нейтральный элемент и симметризуемое относительно этого закона. Если, кроме того, закон композиции коммутативный, то группу называют *абелевой (коммутативной)*.

Во всякой группе соотношения (уравнения) $a \top x = b$ и $y \top a = b$ допускают единственное решение $x = \bar{a} \top b$ *(частное справа)* и $y = b \top \bar{a}$ *(частное слева)*. Имеет место также соотношение $\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$ или $-(a + b) = -b - a$ (в аддитивной записи) и $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ (в мультипликативной записи).

Кольцо — это множество, наделенное двумя законами композиции: относительно первого (аддитивного) оно образует абелеву группу, а второй закон (мультипликативный) является ассоциативным, а также дистрибутивным относительно первого закона. *Телом* называют кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент обладает симметричным относительно второго (мультипликативного) закона. *Поле* — это коммутативное тело.

Изучение алгебраических систем позволяет выявить общие свойства операций на множествах объектов различной природы. Эти свойства используются при решении многих научных и технических задач. Из приведенных алгебраических систем наиболее широкими понятиями являются моноид и группа, а наиболее узкими — тело и поле. Последние обслуживают в основном числовые множества, в то время как более широкие понятия распространяются и на более далекие от чисел совокупности объектов.

9. Подсистемы. Всякую часть системы, которая снова является системой относительно тех же законов, называют *подсистемой*. В частности, всякая *подгруппа* должна содержать нейтральный элемент группы. *Подкольцо* образует подгруппу аддитивной группы кольца и замкнуто относительно мультипликативного закона.

Подкольцо I абелева кольца K называется *идеалом* (в этом кольце), если I есть аддитивная подгруппа кольца (композиция любых элементов a и b из I относительно первого закона также принадлежат I, т. е. $a + b \in I$ и $a - b \in I$), и в результате применения к элементу из I и любому элементу из K второго закона получаем элемент из I (т. е. для любых $a \in I$ и $x \in K$ имеет место $a \cdot x \in I$). Например, множество четных чисел есть идеал в кольце целых чисел, рассматриваемом как аддитивная группа, а вторым законом является операция умножения (произведение четного числа на любое целое число дает четное число).

10. Делители нуля. Если некоторой паре элементов a и b из кольца, которые отличны от нейтрального элемента первого закона, второй закон ставит в соответствие этот нейтральный элемент, то

говорят, что элементы a и b есть *делители нуля* ($a \cdot b = 0$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$). Так $3 \cdot 2 = 0 \pmod 6$, т. е. числа 3 и 2 — делители нуля в кольце вычетов по модулю 6. В кольце квадратных матриц второго порядка делителя нуля —это ненулевые матрицы, произведения которых равно нулевой матрице, например

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кольцо без делителей нуля называется *кольцом целостности*. В таких кольцах справедлив *закон сокращения*: из $a \cdot x = a \cdot y$ или $x \cdot a = y \cdot a$ следует $x = y$. *Область целостности* — это коммутативное кольцо с нейтральным элементом относительно второго закона (единицей) и без делителей нуля (например, целые числа и многочлены).

В следующем разделе рассматриваются некоторые наиболее интересные в теоретическом и практическом отношении алгебраические системы с одним или двумя внутренними законами композиции.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. На трехэлементном множестве $G = \{a, b, c\}$ задан закон композиции одной из следующих таблиц:

а)

$\top$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	b	b	c

б)

$\top$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

в)

$\top$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Определите свойства каждого из этих законов и тип соответствующей алгебраической системы. Укажите нейтральный и симметричные элементы, если они существуют. Постройте графы для всех заданных законов композиции (группоидов).

2. Дана группа $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ относительно закона $\top$, определенного таблицей

$\top$	a	b	c	d	e	f
a	e	f	a	b	c	d
b	d	c	b	a	f	e
c	a	b	c	d	e	f
d	f	e	d	c	b	a
e	c	d	e	f	a	b
f	b	a	f	e	d	c

а) Постройте граф этой группы.
б) Является ли данная группа коммутативной?
в) Какой элемент из G играет роль нейтрального элемента?
г) Для каждого элемента из G определите симметричный элемент.
д) Покажите, что множества $G' = \{a, c, e\}$ и $G'' = \{c, d\}$ относительно данного закона композиции являются подгруппами данной группы.

3. Укажите тип алгебраической системы, которую образует каждое из приведенных ниже множеств с определенными на нем внутренними операциями:

а) натуральные числа (сложение);
б) натуральные числа (умножение);
в) целые числа (сложение);
г) целые числа (умножение);
д) четные числа (сложение и умножение);
е) действительные числа (умножение);
ж) целые числа (сложение и умножение);
з) действительные или комплексные числа (сложение и умножение).

4. К каким алгебраическим системам относится множество квадратных матриц n-го порядка (n — фиксированное число) относительно операций: а) сложения; б) умножения; в) сложения и умножения?

5. На множестве $G = (a, b, c)$ заданы два внутренних закона композиции — аддитивный и мультипликативный:

+	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

·	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

а) Покажите, что G с заданными на нем законами образует коммутативное тело.

б) Определите нейтральные элементы относительно заданных законов композиции.

в) Для элементов из G определите симметричные элементы относительно заданных законов композиции.

г) Замените элементы a, b, c соответственно на числа 1, 2 и 3 и истолкуйте заданные операции в числовом множестве.

6. Покажите, что целые числа, кратные некоторому числу p, составляют идеал в кольце целых чисел.

8. ПРИМЕРЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. **Группы подстановок.** Рассмотрение некоторых систем начнем с *группы подстановок*, общее описание которых дано в (3.9) и (3.10). Групповая операция задается внутренним законом композиции — композицией подстановок. Необходимо обратить внимание на смысл слова «композиция» в предыдущей фразе. В данном случае композиция (произведение) подстановок a и b — это композиция двух взаимно-однозначных отображений (3.7) множества объектов N на себя, т. е. $N \overset{a}{\to} N \overset{b}{\to} N$, в результате чего получаем некоторую подстановку ab. Закон композиции — это отображение множества всех пар подстановок (a, b) на множество подстановок S, т. е. $S \times S \to S$, которое осуществляется в соответствии с правилом композиции (умножения) подстановок.

Нейтральным элементом в группе подстановок является тождественная подстановка e, а симметричным элементом для любой подстановки a — симметричная подстановка a^{-1}. Так как компо-

зиция подстановок не подчиняется коммутативному закону ($ab \neq \neq ba$), то группа подстановок n-й степени при $n \geqslant 3$ не коммутативна.

Если множество N конечно и содержит n чисел, то множество S всех подстановок n-й степени также конечно и содержит $n!$ элементов. Такая группа называется *симметрической группой* порядка $n!$ (*порядок группы* определяется числом ее элементов).

Подгруппы симметрических групп называют *группами подстановок*. К ним относятся *единичная группа*, содержащая только нейтральный элемент (тождественную подстановку), и сама симметрическая группа. Однако, кроме этих тривиальных групп, имеется много подгрупп симметрической группы, являющихся группами подстановок. В частности, группу образует множество всех четных подстановок (*знакопеременная группа*). Множество всех подстановок переводящих какой-либо элемент в себя, также является группой.

Подгруппами симметрических групп исчерпываются по существу все конечные группы. Иначе говоря, всякая конечная группа порядка n может быть представлена группой подстановок n-й степени ее элементов (*теорема Кэли*).

Действительно, пусть множество $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с определенным на нем законом композиции $\top$ образует группу и x_k — фиксированный элемент из G. Тогда $f_k(x_i) = x_i \top x_k$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) можно рассматривать как отображение, ставящее каждому элементу из G элемент $f_k(x_i) \in G$. Это отображение взаимно-однозначно, так как при любом $f_k(x_i)$ соотношение $f_k(x_i) = x_i \top x_k$ имеет единственное решение $x_i = f_k(x_i) \top x_k^{-1}$ (каждый элемент x_k группы имеет единственный симметричный ему x_k^{-1}). Таким образом, взаимно-однозначное отображение f_k на множестве G можно представить подстановкой n объектов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая соответствует элементу x_k, т. е.

$$a_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \ldots & f_k(x_n) \end{pmatrix}.$$

В этой подстановке нижняя перестановка $(f_k(x_1), f_k(x_2), \ldots, f_k(x_n))$ — это строка матрицы композиции для элемента x_k. Принимая $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем n подстановок, соответствующих n элементам группы G. Нейтральному элементу отвечает тождественная подстановка e, а симметричному элементу x_k^{-1} — симметричная подстановка a_k^{-1}.

Так как групповая операция $\top$ по определению ассоциативна, то $x_i \top x_k \top x_j = x_i \top (x_k \top x_j) = f_{kj}(x_i)$. С другой стороны, $x_i \top x_k \top x_j = (x_i \top x_k) \top x_j = f_k(x_i) \top x_j = f_j(f_k(x_i))$. Отсюда $f_{kj} = f_j f_k$, т. е. элементу $x_k \top x_j$ соответствует композиция отображения f_k и f_j,

а значит, и композиция соответствующих им подстановок. Таким образом, множество подстановок a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ образует группу порядка n, которая однозначно представляет группу G.

Например, группе третьего порядка с групповой операцией, заданной таблицей

$\top$	x_1	x_2	x_3
x_1	x_2	x_3	x_1
x_2	x_3	x_1	x_2
x_3	x_1	x_2	x_3

,

соответствует группа подстановок $\{a_1, a_2, a_3\}$, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Нейтральным элементом этой группы относительно закона $\top$ является a_3, а подстановки a_1 и a_2 — взаимно симметричные элементы $(a_1a_2 = a_2a_1 = a_3;\ a_1 = a_2^{-1};\ a_2 = a_1^{-1})$. Если элементы исходной группы пронумеровать и заменить соответствующими им числами, то

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта группа подстановок является подгруппой симметрической группы, которая, кроме подстановок a_1, a_2 и a_3, содержит подстановки

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

каждая из которых обратна самой себе. Ясно, что при большом n для представления конечной группы n-го порядка используется лишь ничтожная часть перестановок симметрической группы.

2. Кольцо многочленов. Рассмотрим множество *многочленов (полиномов)* от переменной x над числовым полем P, т. е. выражения вида $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, где n — целое неотрицательное число, а *коэффициенты* многочлена $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числа из поля P (действительные или комплексные). Наибольшее число n, при котором $a_n \neq 0$, называется *степенью многочлена* и обозначается $\deg f(x)$. Два многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) =$

$= b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ *тождественно равны*, если $n = m$ и $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Определим на множестве многочленов два внутренних закона — аддитивный и мультипликативный.

Сумма двух многочленов $f(x) + g(x)$ — это многочлен, у которого коэффициент при каждой степени переменного x равен сумме коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$ при той же степени x. Если степени n и m слагаемых многочленов не равны, то многочлен меньшей степени дополняется до старшей степени членами с нулевыми коэффициентами. При этом $\deg[f(x) + g(x)] \leqslant \max[\deg f(x), \deg g(x)]$. Например: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 6$; $g(x) = x^2 - 1$; $f(x) + g(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 5$. Операция сложения многочленов ассоциативна и коммутативна. Нейтральным элементом относительно сложения является многочлен, все коэффициенты которого нули. Всякий многочлен $f(x)$ обладает симметричным ему, все коэффициенты которого противоположны коэффициентам $f(x)$, т. е. $\overline{f(x)} = -f(x)$. Следовательно, множество многочленов является абелевой группой относительно сложения.

Произведение двух многочленов определяется как многочлен $f(x)g(x)$, получающийся умножением каждого члена многочлена $f(x)$ на каждый член многочлена $g(x)$, суммированием полученных произведений и приведением подобных членов. Очевидно, $\deg[f(x)g(x)] \leqslant \deg f(x) + \deg g(x)$. Например: $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $g(x) = x^2 + 2x - 3$; $f(x)g(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 + 4x - 6 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$. Операция умножения многочленов ассоциативна, коммутативна и дистрибутивна относительно сложения. Нейтральным элементом относительно умножения служит многочлен, у которого $a_0 = 1$, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, множество многочленов есть коммутативное кольцо. Это кольцо также унитарно (кольцо с единицей). Можно показать, что множество многочленов не имеет делителей нуля, следовательно, оно есть кольцо целостности.

Любой многочлен можно единственным образом представить в виде: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где $q(x)$ — *частное* от деления $f(x)$ на $g(x)$ (по убывающим степеням) и $r(x)$ — *остаток*. При этом $\deg r(x) < \deg g(x)$, а также если $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$, то $\deg q(x) = \deg f(x) - \deg g(x)$.

3. Нули многочлена. Число λ называют *нулем многочлена* $f(x)$, если $f(\lambda) = 0$. Говорят также, что λ есть *корень уравнения* $f(x) = 0$.

Для того чтобы λ был нулем многочлена $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы этот многочлен делился без остатка на $x - \lambda$. Если многочлен $f(x)$ делится без остатка на $(x - \lambda)^s$, где s — наибольшее натуральное число, для которого такое деление возможно, то λ называется нулем *кратности* s. Нуль кратности единица называется *простым*.

Основная теорема алгебры утверждает, что многочлен n-й степени с действительными или комплексными коэффициентами имеет не меньше одного и не больше n *различных* действительных или комплексных нулей. С учетом кратности корней их общее число всегда равно n.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — нули многочлена степени n, а $s_1, s_2, \ldots, s_k$ — их кратности. Тогда многочлен можно с точностью до постоянной представить в виде: $f(x) = (x - \lambda_1)^{s_1}(x - \lambda_2)^{s_2} \ldots \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}$. Если λ_i — нуль кратности s_i, то дифференцируя $f(x)$ s_i раз, убеждаемся, что $f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(s_i - 1)}(\lambda_i) = 0$, но $f^{(s_i)}(\lambda_i) \neq 0$. Например: $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x - 1)^3(x + 2)^2$; $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$, но $f'''(1) = 54$.

Имеется большое количество методов определения нулей многочленов, а также различных теорем, определяющих их расположение в поле комплексных чисел. Основная трудность решения этой задачи связана с тем, что алгебраические уравнения $f(x) = 0$ не разрешимы в радикалах, если степень многочлена выше четвертой. Эта трудность преодолевается применением приближенных методов вычисления.

4. Кольцо множеств. Непустая система множеств образует кольцо множеств, если для любых A и B этой системы $A + B$ и $A \cap B$ также принадлежат к этой системе множеств. Здесь определены два внутренних закона композиции: дизъюнктивная сумма и пересечение. Нейтральным элементом относительно суммы служит пустое множество $\varnothing$, так как $A + \varnothing = A$. Симметричным для каждого A является само это множество, так как $A + A = \varnothing$.

Второй закон — ассоциативный $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ и дистрибутивный относительно первого, т. е. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

Нейтральный элемент (единица) U относительно второго закона (пересечения) определяется соотношением $A \cap U = A$, откуда следует, что U есть не что иное, как максимальное множество этой системы, содержащее все другие входящие в систему множества (универсум U). Если такой элемент существует, то имеем кольцо с единицей (унитарное кольцо). Так, унитарное кольцо образует система всех подмножеств произвольного множества U. Примером кольца (без единицы) может служить множество всех ограниченных отрезков числовой прямой (не существует ограниченного отрезка, который служил бы единицей кольца, т. е. содержал все ограниченные отрезки прямой).

Так как для любых A и B справедливы соотношения: $A \cup B = (A + B) + (A \cap B)$ и $A \setminus B = A + (A \cap B)$, то кольцо множеств содержит также $A \cup B$ и $A \setminus B$. Говорят, что кольцо замкнуто относительно объединения и пересечения, разности и дизъюнктивной суммы.

5. Тело кватернионов. Первой системой на пути обобщения комплексных чисел явились *кватернионы*, т. е. выражения вида $x = a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d — действительные числа, а символы i, j, k также называют кватернионами (например j — это кватернион при $a = b = d = 0$ и $c = 1$). Число a — *действительная часть*, а сумма $bi + cj + dk$ — *векторная часть* кватерниона.

На множестве кватернионов определяют два внутренних закона. Аддитивный закон задается подобно сложению комплексных чисел, т. е. сумма $x_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ и $x_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ есть

$$x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Очевидно, этот закон ассоциативный и коммутативный. Нейтральным элементом относительно сложения служит $0 = 0 + 0i + + 0j + 0k$, а симметричным к элементу x есть элемент $-x = -a_1 - - b_1 i - c_1 j - d_1 k = \bar{x}$.

Чтобы множество кватернионов было телом, мультипликативный закон (умножение кватернионов) должен быть ассоциативным и дистрибутивным относительно сложения. Это достигается, с одной стороны, определением мультипликативного закона подобно умножению многочленных алгебраических выражений и, с другой стороны, заданием правила умножения кватернионов, которое в наиболее лаконичной записи имеет вид:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

где порядок сомножителей в произведении ijk строго фиксирован.

Отсюда также следует

$$ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j.$$

Действительно, умножая справа на k обе части равенства $ijk = -1$, имеем $ijk^2 = -k$ или $ij = k$. Умножая полученное уравнение на j справа или на i слева, получаем соответственно $-i = kj$ или $-j = ik$ и т. д.

Как видно, мультипликативный закон (умножение кватернионов) не коммутативный, т. е.

$$\begin{gathered} x_1 x_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + \\ a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik + c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + \\ + c_1 c_2 j^2 + c_1 d_2 jk + d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 k^2 = \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i + \\ + (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k \neq x_2 x_1. \end{gathered}$$

Нейтральным элементом относительно умножения служит единица, рассматриваемая как кватернион, у которого $a = 1$ и $b =$

$= c = d = 0$. Можно также показать, что относительно умножения всякий кватернион $x = a + bi + cj + dk$ имеет симметричный (обратный) ему

$$x^{-1} = \frac{1}{m^2}(a - bi - cj - dk),$$

где число

$$m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

называют *нормой кватерниона*. Итак, множество кватернионов, наделенное описанными выше двумя внутренними законами композиции, образует тело.

Произвольный кватернион $\alpha = a + bi + cj + dk$ можно представить как совокупность числа a и трехмерного вектора $\vec{\alpha} = (b, c, d)$, выходящего из начала координат и имеющего числа b, c и d своими проекциями на оси координат, т. е. $\alpha = (a, \vec{\alpha})$. С другой стороны, всякому вектору $\vec{\xi} = (x, y, z)$ взаимно-однозначно соответствует *векторный кватернион* $\xi = bi + cj + dk$.

6. Вращения твердого тела. С помощью кватернионов изящно решаются задачи, связанные с композицией поворотов твердого тела в пространстве. Пусть, например, твердое тело поворачивается на угол φ_1 вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, а затем поворачивается вокруг другой оси, проходящей через ту же точку O, на угол φ_2. Требуется определить, на какой угол φ и вокруг какой оси следует повернуть тело, чтобы оно из первого положения сразу перешло в третье (рис. 60, *а*).

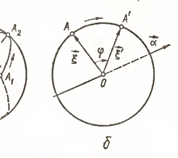


Рис. 60. Вращение твердого тела: *а* — композиция вращений; *б* — поворот на угол φ.

Пусть положение твердого тела в пространстве определяется вектором $\vec{\xi} = (x, y, z)$, выходящим из O. Тогда повороту тела на угол φ $(0 < \varphi < 2\pi)$ вокруг оси, задаваемой выходящим из начала координат вектором $\vec{\alpha} = (b, c, d)$, отвечает такой же поворот вектора $\vec{\xi}$, переводящий его в $\vec{\xi'} = (x', y', z')$. Векторам $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi'}$ соответствуют векторные кватернионы ξ и ξ'. Рассматриваемому повороту взаимно-однозначно соответствует кватернион $\alpha = (a, \vec{\alpha})$, где

$$a = m\cos\frac{\varphi}{2}; \quad m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Можно показать, что $\xi' = \alpha^{-1}\xi\alpha$. Если известны $\vec{\xi}$, φ и $\vec{\alpha}$, то находим α, затем ξ' и $\vec{\xi}'$, определяющий положение тела после поворота (рис. 60, *б*). Таким образом, поворотам твердого тела соответствуют указанные действия над кватернионами.

Если последовательно совершаются два поворота вокруг осей $\vec{\alpha}_1 = (b_1, c_1, d_1)$ и $\vec{\alpha}_2 = (b_2, c_2, d_2)$ соответственно на углы φ_1 и φ_2, то для произвольного вектора $\vec{\xi}$ первый поворот дает $\alpha_1^{-1}\xi\alpha_1$, а второй поворот $\alpha_2^{-1}(\alpha_1^{-1}\xi\alpha_1)\alpha_2 = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}\xi(\alpha_1\alpha_2)$. Следовательно, результирующий поворот определяется кватернионом $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, т. е. композиции поворотов отвечает перемножение (в соответствующем порядке) определяющих их кватернионов.

7. Множество классов вычетов по модулю m. Как было показано в (4.4), сравнение по модулю m есть отношение эквивалентности на множестве (кольце) целых чисел. Множество всех целых чисел разбивается на m классов эквивалентности $M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}$, причем класс M_j объединяет числа $j + km$ (k — произвольное целое число), вычеты которых равны j. Совокупность классов вычетов по модулю m определяется системой представителей $j = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$.

Сумма (произведение) двух классов вычетов по модулю m определяется как класс, который содержит сумму (произведение) представителей этих классов. Поэтому действия над классами можно представить как арифметические действия над их представителями по модулю m. Например, при $m = 4$ сложение и умножение задается таблицами (числа являются представителями классов):

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

;

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

.

Сложение классов вычетов ассоциативно и коммутативно. Существует нейтральный элемент 0 ($j + 0 = j$), и каждый элемент j имеет симметричный ему $\bar{j}$ такой, что $j + \bar{j} = 0 \pmod{m}$. Так, для представителей 0, 1, 2, 3 симметричными являются соответственно 0, 3, 2, 1. Отсюда следует, что множество классов вычетов при любом m образуют *абелеву группу* относительно сложения.

Умножение классов вычетов также ассоциативно и коммутативно. Существует нейтральный элемент 1 ($j \cdot 1 = 1 \cdot j = j$). Но

относительно умножения не каждый элемент j имеет симметричный $\bar{j}$ такой, что $j\bar{j} = 1 \pmod m$. Действительно, как видно из таблицы, при $m = 4$ это соотношение имеет место только для 1 и 3, поскольку $1 \cdot 1 = 1 \pmod 4$ и $3 \cdot 3 = 9 = 1 \pmod 4$, т. е. 1 и 3 симметричны самим себе, а элементы 0 и 2 не имеют симметричных. Следовательно, множество классов вычетов относительно умножения не является группой, а образует моноид (полугруппу).

Если m — простое число, то каждый отличный от нуля элемент j имеет симметричный ему $\bar{j}$ и относительно умножения классов вычетов по модулю m. Действительно, из условия симметричности множества классов вычетов $j\bar{j} = 1 \pmod m$ можно записать: $j\bar{j} = 1 + km$, где k — целое число. Это значит, что симметричные элементы получаются делением $1 + km$ на $j = 1, 2, ..., m - 1$, причем в результате этого деления должны получаться целые числа $\bar{j} < m$. А это возможно только при условии, что m — простое число. Заметим, что элементы 1 и $m - 1$ всегда симметричны сами себе. Элемент 0 не имеет симметричного ни при каком $m > 1$.

Таким образом, множество классов вычетов по модулю m относительно первого закона композиции (сложения) и второго закона (умножения) при любом m образует *абелево кольцо с единицей*, а при простых m — *поле*.

8. Поле комплексных чисел. Комплексное число $z = a + bi$, где $a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть* и $b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть*, можно рассматривать как упорядоченную пару (a, b) двух действительных чисел, которые являются элементами множества R.

На множестве комплексных чисел определяются два внутренних закона — *сложение* $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$ и *умножение* $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Два числа z_1 и z_2 равны, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

В принятых обозначениях $i = (0,1)$, следовательно, $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$ или $i^2 = -1$. Действия над комплексными числами в форме $z = a + bi$ можно выполнять как с действительными числами, заменяя всякий раз i^2 на -1.

Комплексно-сопряженным с числом $z = a + bi$ является число $z^* = a - bi$. Справедливы следующие соотношения: $z + z^* = 2a$; $zz^* = a^2 + b^2$; $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$; $(-z)^* = -z^*$; $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* z$.

Множество комплексных чисел составляет *коммутативную группу* относительно сложения. Действительно, сложение коммутативно и ассоциативно, нейтральным элементом служит нуль $(0, 0)$, а симметричное числу $z = (a, b)$ есть $-z = (-a, -b)$.

Относительно умножения нейтральным элементом является единица $(1, 0)$, и всякое отличное от нуля комплексное число $z = a + bi$ имеет симметричное (обратное) $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}(a - bi) = z^{-1}$, где

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — *модуль* комплексного числа. Так как умножение дистрибутивно относительно сложения, то множество комплексных чисел составляет *поле*.

Комплексное число представляется в *тригонометрической* и *экспоненциальной* форме соотношением $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\, e^{i\varphi}$. Здесь z — модуль и φ — аргумент комплексного числа, определяемый с точностью до целого кратного 2π, причем $\varphi = \arg z = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. Произведение двух комплексных чисел $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\mathrm{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, т. е. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ и $\arg |z_1 z_2| = \arg z_1 + \arg z_2$.

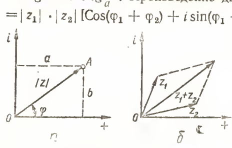


Рис. 61. Геометрическое представление комплексных чисел:

а — комплексная плоскость; *б* — суммирование комплексных чисел.

При геометрическом представлении комплексных чисел в прямоугольной системе координат ось абсцисс используется для изображения действительной, а ось ординат — мнимой частей. Их соответственно называют действительной и мнимой осями на *плоскости комплексной переменной* (рис. 61, *а*). Числу $z = a + bi$ соответствует вектор $\vec{OA}$ и точка A с координатами a и b, называемая *аффиксом* числа z. Суммированию комплексных чисел соответствует геометрическое сложение векторов на комплексной плоскости (рис. 61, *б*). Отсюда, в частности, следует $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (*правило треугольника*).

9. Поле Галуа. Хорошо известные поля целых и действительных чисел — это бесконечные множества (соответственно счетное и континуальное). Конечное поле называют *полем Галуа*. Так, множество из четырех элементов 0, 1, A и B образует поле Галуа, операции сложения и умножения в котором определяются следующими двумя таблицами:

+	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

;

·	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

.

Эти операции являются ассоциативными, коммутативными и дистрибутивными одна относительно другой. Элемент 0 является нейтральным относительно сложения, а 1 — относительно умножения. Элементы A и B могут означать не только числа, но и объекты любой природы, отношения между которыми определяются приведенными таблицами.

С помощью поля Галуа можно, например, проверять алгебраические тождества. Так, известное из алгебры выражение $(A + B) \times$ $\times (A - B) = A^2 - B^2$ справедливо и для поля Галуа. Действительно, для левой части из первой таблицы имеем $A + B = 1$ и $A -$ $- B = 1$ ($A - B$ — это такое число, которое в сумме с B дает A), а из второй таблицы $1 \cdot 1 = 1$. Для правой части по второй таблице находим $A^2 = AA = B$ и $B^2 = BB = A$, а в соответствии с первой таблицей $A^2 - B^2 = B - A = 1$. Так как для левой и правой частей получены одинаковые результаты, то это означает их тождественность.

Хотя поля Галуа возникли в результате абстрактных математических рассуждений, они находят практическое применение, например, при решении задач, связанных с надежным кодированием информации в вычислительных машинах и системах передачи данных.

10. Гомоморфизм и изоморфизм. Рассмотрим два группоида: множество Q с законом композиции $\top$ и множество S с законом композиции $\perp$. Пусть каждому элементу из Q соответствует некоторый элемент из S, причем если паре $(a, b) \in Q$ соответствует пара $(a', b') \in S$, то элементу $a \perp b = c$ из Q соответствует $a' \top b'$ из S. Такое отображение $Q \to S$ называют *гомоморфизмом* Q в S. Иначе говоря, если $f: Q \to S$ такое, что для всякой пары (a, b) из Q справедливо соотношение $f(a \top b) =$ $= f(a) \perp f(b)$, то Q гомоморфно отображается в S относительно операций $\top$ и $\perp$ (рис. 62). В случае сюрьективного отображения f имеем гомоморфизм Q *на* S, называемый *эпиморфизмом*.

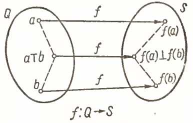


Рис. 62. Гомоморфизм Q в S.

Например, если каждой неособой матрице n-го порядка с действительными элементами поставить в соответствие ее определитель, то получим гомоморфизм мультипликативной группы таких матриц на мультипликативную группу всех отличных от нуля действительных чисел. Если на множестве целых чисел задана операция сложения по модулю m, то отображение этого множества на множество классов эквивалентности (оно состоит из m элементов) есть гомоморфизм.

Взаимно-однозначный (биективный) гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Изоморфные множества Q и S обладают одинаковыми свойствами относительно определенных на них операций. Например, если операция $\top$ коммутативна на множестве Q, то операция $\perp$ также коммутативна на множестве S; если для каждого элемента из Q существует симметричный элемент относительно операции $\top$, то и для каждого элемента из S, соответствующего элементу из Q, существует симметричный относительно операции $\perp$.

Замечательным примером изоморфизма является взаимно-однозначное отображение $x \to \lg x$. Так как $\lg(ab) = \lg a + \lg b$, то *произведению* двух чисел из множества положительных чисел соответствует *сумма* двух соответствующих чисел *(логарифмов)* из множества всех действительных чисел. Таким образом, операция умножения чисел заменяется сложением их логарифмов и результат умножения получается обратным отображением $\lg x \to x$. Подобным образом поступают в тех случаях, когда изоморфная операция более проста, чем исходная. Правда, упрощение не дается даром, так как необходимо с помощью обратного преобразования вернуться в исходное множество.

Аналогично определяются понятия гомоморфизма и изоморфизма как отображений множеств, наделенных не одним, а несколькими законами композиции.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Следующие шесть операций, переводящие вершины равностороннего треугольника, совмещают его с самим собой (рис. 63):

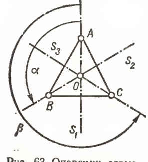


Рис. 63. Операции, совмещающие треугольник с самим собой.

1 — тождественная операция, оставляющая все вершины на месте;

α — поворот на 120° вокруг центра O, переводящий A в B, B в C, C в A;

β — поворот на 240° вокруг центра O, переводящий A в C, B в A, C в B;

S_1 — симметрия, переводящая B в C и C в B;

S_2 — симметрия, переводящая A в C и C в A;

S_3 — симметрия, переводящая A в B и B в A.

Композиция любых двух операций приводит к тому же результату, что и некоторая операция из множества $G = \{1, \alpha, \beta, S_1, S_2, S_3\}$, например композиция S_2 и S_1 дает β. Запишите этот закон композиции в виде таблицы, исследуйте его свойства и определите тип соответствующей алгебраической системы.

2. Представьте каждую операцию из задачи 1 соответствующей ей подстановкой третьей степени на множестве вершин треугольника $\{A, B, C\}$, например $S_1 = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}$ и т. д. Покажите, что:

а) множество всех таких подстановок образует симметрическую группу шестого порядка, изоморфную группе операций в задаче 1;

б) каждое из подмножеств $\{1, \alpha, \beta\}$, $\{1, S_1\}$, $\{1, S_2\}$, $\{1, S_3\}$ является группой подстановок.

3. Для группы G из задачи 1 постройте изоморфную ей группу подстановок шестой степени, элементами которых являются операции, совмещающие треугольник с самим собой.

4. Даны многочлены: $f(x) = 1 + 5x^6$; $g(x) = 1 + 2x + x^2$; $g(x) = 25 - 20x + 15x^2 - 10x^3 + 5x^4$; $r(x) = -24 - 30x$. Покажите, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ двумя способами:

а) умножением и суммированием многочленов;

б) делением (по убывающим степеням) многочлена $f(x)$ на $g(x)$.

5. Многочлен называется простым или неприводимым, если он не имеет других делителей, кроме самого себя и ненулевых постоянных. Укажите числовые поля (рациональное, действительное, комплексное) коэффициентов, в которых многочлен неприводим:

а) $x^2 - 4$; б) $x^2 - 2$; в) $x^2 + 1$.

6. Разделите многочлен $1 + 5x^6$ на многочлен $1 + 2x + x^2$ по возрастающим степеням и сравните результат с полученным в задаче 4 б. Покажите на этом примере, что если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то деление по возрастающим степеням может продолжаться до любой степени частного.

7. Делением по возрастающим степеням представьте бесконечными рядами выражения:

а) $\frac{1}{1-x}$; б) $\frac{1}{1-x^2}$; в) $\frac{x}{1+x^2}$.

8. Определите нули многочленов:

а) $10 - 3x - x^2$;

б) $1 - x - x^2 + x^3$.

9. Покажите, что многочлен $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 36x + 27$ имеет двукратный нуль $\lambda_1 = 3$ и комплексно-сопряженные нули $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$ и $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{2}$.

10. Запишите таблицы умножения и сложения классов вычетов по модулю m для m, равного 5 и 6. Определите в обоих случаях симметричные элементы относительно умножения (если они существуют) и объясните различие между этими двумя случаями. Покажите, что множество классов вычетов при $m = 5$ образует поле Галуа.

9. ПРОСТРАНСТВА

1. Абстрактное пространство. Сначала приведем общее определение пространства, а затем попытаемся уяснить его смысл. В современной математике пространство определяется как множество однородных объектов (предметов, явлений, состояний, переменных и т. п.), между которыми имеются пространственно подобные отношения. Часто слова «однородные» и «пространственно подобные» опускают и определяют пространство как кортеж $(M, A_1, A_2, \ldots, A_n)$, где M — некоторое множество, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — отношения между его элементами. Иногда о пространстве говорят просто как о множестве M, между элементами которого подразумеваются некоторые отношения.

Столь широкое понятие пространства сформировалось в результате абстрагирования и обобщения трехмерной эвклидовой геометрии (геометрия Лобачевского и другие неэвклидовы геометрии,

различные геометрические преобразования — проективное, аффинное, конформное, топологическое и т. п.), развития понятия числа (комплексные числа, кватернионы и гиперкомплексные числа), а также стремления использовать геометрический язык и пространственные представления для соотношений с любым количеством переменных (подобно аналитической геометрии и векторной алгебре).

2. От трехмерного к многомерному пространству. Положение точки обычного трехмерного пространства в некоторой системе координат определяется тройкой чисел (x, y, z), называемых ее *координатами* (рис. 64). Каждой точке соотносится пространственный *вектор*, выходящий из начала координат и оканчивающийся в этой точке. Числа x, y, z являются *проекциями* вектора на оси координат и называются *компонентами (составляющими)* вектора. Как и точка, вектор полностью определяется этой тройкой чисел, если строго соблюдается порядок их следования, т. е. $\vec{a} = (x, y, z)$. Итак, между точками и векторами пространства устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Поэтому в зависимости от удобства можно говорить о пространстве как о множестве точек или векторов. Так, многие физические величины (силы и скорости, напряженности электрического и магнитного полей и др.) представляются векторами, а различные фигуры удобно рассматривать как геометрические места точек, удовлетворяющих соответствующим соотношениям.

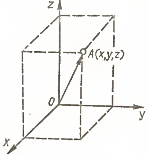


Рис. 64. Вектор в трехмерном пространстве.

Действия над векторами сводятся к операциям над тройками чисел. Так, если $\vec{a} = (x, y, z)$ и $\vec{b} = (x', y', z')$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x + x', y + y', z + z')$ и $\alpha\vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, где α — некоторое число (скаляр). Длина вектора $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Расстояние между двумя точками пространства, соответствующими векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть длина вектора $\vec{a} - \vec{b}$ и, следовательно, $|a - b| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}$. Скалярное произведение двух векторов определяется соотношением $\vec{a}\vec{b} = |a| \cdot |b| \cos\gamma = xx' + yy' + zz'$, где γ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда $\cos\gamma = \vec{a} \cdot \vec{b} \frac{1}{|a|\ |b|}$. Единичные векторы *(орты)*, совпадающие по направлению с координатными осями, выражаются соответственно как $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Каждый вектор однозначно представля-

ется через орты, которые образуют единичный базис в прямоугольной системе координат: $\vec{a} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Формальное обобщение трехмерного пространства состоит в том, что в качестве вектора принимается любая упорядоченная последовательность n чисел $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемая *n-мерным* вектором или точкой многомерного пространства. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *компонентами (составляющими, координатами)* n-мерного вектора, а множество таких векторов — *числовым* или *точечным векторным пространством*. Определяя соответствующим образом операции над векторами и задавая на множестве векторов отношения, подобные длине, расстоянию, углу и т. п. в обычном пространстве, получают специальные типы пространств.

До сих пор предполагалось, что количество составляющих вектора конечно и равно n. Ничто не мешает сделать следующий важный шаг на пути расширения понятия пространства: не ограничивать количество составляющих векторов и считать векторами любые (конечные или бесконечные) числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Такими последовательностями выражаются, например, множество многочленов произвольной степени, ряды, различные разложения функций. Пространство, точки которого определяются бесконечными последовательностями, называется *бесконечномерным пространством*.

Более того, в качестве элементов пространства можно принять множество непрерывных функций на данном отрезке, совокупность всех решений дифференциального уравнения определенного типа и т. п. В подобных случаях функция $f(x)$ представляется как точка в пространстве, а ее координатами служит бесконечное множество (мощности континуума) значений функции при всевозможных значениях аргумента x. Пространства, элементами которых являются функции, называются *функциональными пространствами*. Представление функций как объектов пространства является одним из исходных положений важного раздела современной математики — функционального анализа.

3. От числовых к абстрактным пространствам. Другая линия обобщения пространства связана с содержанием понятия вектора.

Уже отмечалось, что в трехмерном пространстве с этим понятием связываются различные физические величины, которые характеризуются числовым значением и направлением. Наряду с этим элементы пространства (векторы или точки) могут отождествляться с объектами любой физической природы. Например, в практике широко используется трехмерное *цветовое пространство*, векторы которого соответствуют цветовым ощущениям и определяются тремя компонентами—интенсивностями красного, зеленого и синего цветов.

Состояние физической системы описывается некоторой совокупностью переменных (токи и напряжения электрической цепи, температуры и концентрации веществ в химическом реакторе и т. п.). Каждое такое состояние можно представить вектором n-мерного пространства, называемого *пространством переменных состояния*.

В приведенных примерах объекты пространства характеризуются совокупностью чисел, и эти числа рассматриваются как составляющие соответствующих этим объектам векторов. Можно говорить об отображении множества объектов на множество векторов, но в конечном счете отношения между объектами пространства сводятся к отношениям на множестве векторов в числовых пространствах.

Но и в случаях, когда объекты характеризуются свойствами, которые не являются числами (форма, цвет, материал), совокупность таких объектов можно также рассматривать как векторное пространство. При этом свойства кодируются с помощью чисел или каких-либо символов, которые можно истолковать как составляющие векторов (объектов) пространства. Подобные коды используют для передачи сообщений, обработки различной информации с помощью вычислительных машин и т. п. В простейших случаях кодирование свойств объектов сводится к простой нумерации, и каждый объект рассматривается как совокупность номеров присущих ему свойств. Подобный способ был использован, например, при рассмотрении отношения толерантности в (6.6).

Наконец, можно говорить об объектах пространства как его «точках», вовсе не связывая эти объекты с обычным представлением о векторах, как последовательностях чисел, кодов или символов. Пространство можно рассматривать как множество объектов в «чистом» виде (слова, понятия, люди, животные, детали механизма, компоненты электронной цепи). Операции на множестве таких объектов выполняются по специально устанавливаемым правилам, а отношения между ними выражаются в форме некоторого описания (словесного или символического). Так, множество объектов M с определенным на нем отношением толерантности τ можно рассматривать как *пространство толерантности* (M, τ), структура которого определяет сходство между объектами.

Что же остается при такой степени обобщения от первоначального понятия обычного трехмерного пространства? Если вернуться к определению, приведенному в (1), то найдем там слова «пространственно подобные отношения». Как уже указывалось, здесь имеются в виду обобщения таких отношений, как длина, расстояние, угол, фигура и т. п. Не следует искать слишком прямолинейного истолкования абстрактного пространства в категориях реального трехмерного мира. Это понятие введено математиками для того, чтобы использовать геометрические образы и терминологию для опи-

сания и изучения таких отношений, которые не допускают интерпретации в обычном трехмерном пространстве.

4. Метрические и топологические пространства. Рассмотрим два типа пространств, определяемых как пары (M, A), где M — множество объектов и A — некоторое отношение на этом множестве.

Метрическое пространство — это пара (M, ρ), где ρ — отношение, называемое *метрикой* и определяющее расстояние $\rho(x, y)$ между x и y так, что для любых $x, y, z \in M$: 1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметричность; 3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника.

Расстояние между двумя n-мерными векторами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определенное как

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

обобщает понятие расстояния между точками обычного трехмерного пространства. В n-мерном пространстве можно задать расстояние и другими способами, например: $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$ или $\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|$. Можно показать, что все эти соотношения удовлетворяют аксиомам метрического пространства.

Топологическое пространство — это пара (M, υ), где υ — система подмножеств G множества M, называемая *топологией* в M, которая содержит: 1) само множество M и пустое множество $\varnothing$, т. е. $M \in \upsilon$ и $\varnothing \in \upsilon$; 2) пересечение любой пары своих подмножеств, т. е. $G_i \cap G_j \in \upsilon$; 3) объединение любого (конечного или бесконечного) множества своих подмножеств, т. е. $\bigcup G_i \in \upsilon$. Из приведенного определения следует, что υ содержит также пересечение любого *конечного* множества своих подмножеств.

Множества, принадлежащие системе υ, называются *открытыми* множествами пространства (M, υ). Одно и то же множество M может допускать несколько топологий и при этом получаются различные пространства. Всякое множество M допускает *тривиальную топологию*, при которой открытыми множествами считаются только M и $\varnothing$ *(пространство слипшихся точек)*, а также *дискретную топологию*, когда открыто любое подмножество M.

Множества $M \setminus G$, дополнительные к открытым, называются *замкнутыми* множествами топологического пространства. Из определения топологического пространства вытекает, что замкнутыми множествами являются: 1) M и $\varnothing$; 2) объединение конечного числа замкнутых множеств; 3) пересечение любого (конечного или бесконечного) числа замкнутых множеств. Как видно, имеет место

дуальность в определении открытых и замкнутых множеств топологического пространства.

5. Линейные пространства. Пусть x, y, z — элементы из множества S *(векторы)* и λ, μ, ε — элементы из поля K *(скаляры)*. В отличие от скаляров векторы часто выделяют жирным шрифтом ($\mathbf{x}$) или снабжают стрелкой ($\vec{x}$). Мы будем обозначать векторы строчными латинскими, а скаляры — греческими буквами.

Множество S называется *линейным пространством над полем* K, если на S определены два закона композиции:

1) внутренний (аддитивный) $S \times S \to S$, относительно которого S образует абелеву группу, т. е. $x + y = y + x$ (коммутативность), $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность), $x + 0 = x$ (0 — нейтральный элемент), $x + (-x) = 0$ ($-x$ — обратный элемент);

2) внешний закон $K \times S \to S$ такой, что $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность относительно внутреннего закона — сложения векторов), $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность относительно аддитивного закона поля K — сложения скаляров), $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность относительно мультипликативного закона поля K — умножения скаляров), $\varepsilon x = x$ (ε — нейтральный элемент относительно умножения в поле K).

Линейное пространство называется *действительным (комплексным)*, если скаляры в его определении берутся из поля действительных (комплексных) чисел. Так, обычные трехмерные векторы образуют действительное линейное пространство. Внутренним законом этого пространства является геометрическое сложение векторов $(\vec{x} + \vec{y})$, а внешним законом—умножение вектора на действительное число λ, т. е. $\lambda\vec{x}$.

Любое поле K можно интерпретировать как векторное пространство над самим собой ($S = K$) со сложением в качестве внутреннего закона и умножением в качестве внешнего закона.

Линейное пространство называют также *векторным пространством*, независимо от природы элементов множества S, на котором оно определено.

6. Операции в линейном пространстве. В n-мерном векторном пространстве внутренней операцией является сумма векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$. Нейтральным элементом относительно сложения является нулевой вектор $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, а обратный к $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Внешняя операция — произведение скаляра на вектор определяется как $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, в результате которой получается вектор той же размерности, что и исходный.

В общем случае законы композиции на множестве объектов линейного пространства могут быть заданы любым способом, лишь бы

они удовлетворяли определениям (5). Пусть, например, на трехэлементном множестве $S = \{a, b, c\}$ внутренний закон композиции задан таблицей:

+	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Относительно этого закона (он никак не связан с арифметическим понятием суммы чисел) множество $S = \{a, b, c\}$ образует абелеву группу с нейтральным элементом c. Внешний закон зададим над полем вычетов по модулю 3 следующими таблицами:

·	a	b	c
0	c	c	c
1	a	b	c
2	b	a	c

;

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

;

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

Первая таблица определяет внешнюю операцию линейного пространства, а остальные две — внутренние операции поля K вычетов по модулю 3. Легко проверить, что заданные таким образом законы композиции удовлетворяют всем требованиям, приведенным в (5), и определяют линейное пространство.

7. Евклидово пространство. Линейное пространство над числовым (действительным или комплексным) полем называется *евклидовым (действительным или комплексным) пространством*, если в нем определена операция, называемая скалярным (или внутренним) произведением.

Скалярное произведение, обозначаемое как (x, y) или $<x, y>$, есть отображение $S \times S \to K$, которое любой паре векторов x и y из S ставит в соответствие число из поля K. Оно удовлетворяет следующим аксиомам: 1) $<x, y> = <y, x>^*$; 2) $<\mu x + \nu y, z> = \mu <x, z> + \nu <y, z>$; 3) $<x, x>$ — действительное неотрицательное число, обращающееся в нуль лишь в случае, когда x — нулевой элемент.

Для комплексных n-мерных векторов скалярное произведение определяется как $<x, y> = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \cdots + x_n y_n^*$, где y_i^* — комп-

лексно-сопряженное к y_i. В случае действительного пространства $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = < y, x >$.

Через скалярное произведение вводятся: *норма (длина)* вектора $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$, *расстояние* между x и y (*метрика*) $\rho(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{< x - y, x - y >}$ и угол между двумя векторами $\cos\gamma = \frac{< x, y >}{\| x \| \cdot \| y \|}$.

Норму вектора x можно рассматривать как частный случай метрики при $y = 0$. В общем случае норма, приведенная к внешнему закону линейного пространства, определяется следующими условиями: 1) $\| x \| \geqslant 0$, причем $\| x \| = 0$ только и если только $x = 0$; 2) $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$, где $| \lambda |$ — абсолютное значение из поля K; 3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Следует иметь в виду, что норму можно задать различными способами, например: $\| x \| = | x_1 | + | x_2 | + \ldots + | x_n |$ или $\| x \| = \max | x_i |$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. наибольшее из абсолютных значений (модулей) составляющих и т. п. Пространство, для всех векторов которого определена некоторая норма, называется *нормированным пространством*.

Вектор, норма (длина) которого равна единице, называется *единичным*. Два вектора x и y *ортогональны* $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$, если $< x, y > = 0$, причем для таких векторов $\| x + y \|^2 = < x + y, x + y > = \| x \|^2 + \| y \|^2$ (*теорема Пифагора*).

8. Базис линейного пространства. Конечная совокупность векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется *линейно-независимой*, если соотношение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$ (α_i — скаляры из поля K) имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. В случае, когда можно найти такую совокупность скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что хотя бы при одном из них, не равном нулю, справедливо соотношение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$, векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются *линейно-зависимыми* (любой x_i, для которого $\alpha_i \neq 0$, выражается через другие). Так, четырехмерные векторы $x_1 = (2, 1, 4, 0)$; $x_2 = (3, 1, 0, 5)$; $x_3 = (2, 2, 6, -10)$ линейно-зависимы, так как при $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ и $\alpha_3 = -0{,}5$ имеем $2\,(2, 1, 4, 0) - (3, 1, 0, 5) - 0{,}5\,(2, 2, 16, -10) = (0, 0, 0, 0)$. Отсюда, например $x_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \times (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$.

Совокупность независимых векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, через которую выражается любой вектор $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, называется *базисом* линейного пространства. При этом говорят, что пространство S порождено этим базисом, а его *размерность (ранг)* равна n, что записывается как $\dim S = n$. Базис определяет в S

систему координат (систему отсчета). При этом числа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ являются *координатами вектора* (точки пространства). Разумеется, координаты одного и того же вектора в различных базисах могут быть различными.

Совокупность попарно-ортогональных единичных векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ таких, что $< u_i, u_j > = \delta_{ij}$ (символ Кронекера $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), образует *ортонормированную систему векторов*. Число векторов в такой системе не может превышать размерности пространства ($k \leqslant n$). Каждая ортонормированная система n векторов в n-мерном евклидовом пространстве образует *ортонормированный базис*.

Если имеется любая конечная (или счетная) система линейно-независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то ортонормированную систему можно построить с помощью следующих реккурентных формул (*ортогонализация Грама—Шмидта*):

$$u_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|}; \quad u_k = \frac{h_k}{\| h_k \|},$$

$$\text{где } h_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j, e_k \rangle u_j \; (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Пусть, например, $e_1 = (1, 1, 1)$; $e_2 = (1, 2, 3)$; $e_3 = (1, 3, 2)$. Тогда $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Так как $h_2 = e_2 - \langle u_1, e_2 \rangle u_1$, причем $\langle u_1, e_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), (1, 2, 3) \right\rangle = 2\sqrt{3}$, то $h_2 = (1, 2, 3) - 2(1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$, и, следовательно, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Далее, $h_3 = e_3 - \langle u_1, a_3 \rangle u_1 - \langle u_2, e_3 \rangle u_2$, что после вычислений дает $h_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$, откуда имеем $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$. Найденные векторы u_1, u_2 и u_3 образуют ортонормированный базис трехмерного пространства.

Любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлен в ортонормированном базисе как $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — его координаты в этом базисе. Умножив это равенство скалярно на u_k, получим $\langle x, u_k \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_k \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_k \rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_k \rangle = \alpha_k \langle u_k, u_k \rangle = \alpha_k$, так как $\langle u_i, u_k \rangle = 0$ при $i \neq k$ и $\langle u_k, u_k \rangle = 1$. Следовательно, координаты вектора в ортонормированном базисе выражаются соотношением $\alpha_k = \langle x, u_k \rangle \; (k = 1, 2, \ldots, n)$.

В n-мерном пространстве существует ортогональный базис, состоящий из единичных векторов $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ... ; $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Компоненты

каждого вектора являются одновременно и координатами в системе координат, определяемой этим базисом, так как $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$.

9. **Действия над пространствами.** Пусть S — линейное пространство над полем K и L — подмножество из S. Рассмотрим на L внутренний и внешний законы композиции, индуцированные соответственно внутренним и внешним законами композиции на S. Если эти законы превращают L в линейное пространство над K, то L называется *линейным подпространством* линейного пространства S. Следовательно, подпространство L обязательно содержит нейтральный элемент 0 относительно первого закона композиции, а также всякие линейные комбинации $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$ для любой пары x_1 и x_2 из L и любых λ_1 и λ_2 из поля K, над которым определено пространство S.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — некоторая совокупность векторов из S. Конечные линейные комбинации этих векторов $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \ldots + \lambda_mx_m$ с коэффициентами $\lambda_i \in K$ образуют *минимальное подпространство* M пространства S. Говорят, что пространство M *порождено* множеством X, а множество X есть *система образующих пространства* M. Например, пространство, порожденное вектором u, состоит из всех элементов вида αu.

Размерность любого подпространства n-мерного пространства S не превышает числа n. Если в L векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ образуют базис, причем $m < n$, то его можно дополнить независимой совокупностью векторов $e_{m+1}, \ldots, e_n$ так, что он будет базисом в S.

Пересечение подпространств L_1 и L_2 есть подпространство $L_1 \cap L_2$, векторы которого принадлежат одновременно и L_1, и L_2. Во всех случаях пересечение содержит нейтральный элемент 0 относительно первого закона композиции (сложения векторов), т. е. $\{0\} \subset L_1 \cap L_2$.

Сумма подпространств (алгебраическая сумма) $L_1 \dotplus L_2$ есть подпространство, элементами которого являются все векторы $x + y$, где $x \in L_1$ и $y \in L_2$.

Прямое произведение линейных пространств $V = S \times T$ есть множество всех упорядоченных пар векторов $(x, y) \in V$, где $x \in S$ и $y \in T$. Оно представляет собой новое пространство, элементами которого являются векторы $z = (x, y)$, причем операции над этими векторами определяются следующим образом: $z' + z'' = (x' + x'', y' + y'')$ и $\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$, где $\lambda \in K$. Для конечномерных пространств $\dim V = \dim S + \dim T$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — m-мерные векторы из S и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — n-мерные векторы из T. Тогда элементами прямого произведения $V = S \times T$ будут $(m + n)$-мерные векторы вида $z = (x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Векторы из V можно представить как $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Это значит, что прямое произведение $S \times T$ есть сумма некоторых пространств S' и T', элементами которых являются соответственно векторы $(x, 0)$ и $(0, y)$. В то же время S' и T' являются подпространствами V, причем все отличные от нуля векторы у них различные, и только при $x = y = 0$ векторы $(x, 0)$ и $(0, y)$ совпадают и равны нейтральному вектору 0. Поэтому $S' \cap T' = \{0\}$ и $S' \dot{+} T' = V$. Если подпространства линейного пространства S удовлетворяют этим условиям, то говорят, что S разложимо в *прямую сумму* L_1' и L_2' и записывают $L_1' \oplus L_2' = S$.

В общем случае линейное пространство S есть прямая сумма подпространств $L_1', L_2', \ldots, L_k'$; т. е. $S = L_1' \oplus L_2' \oplus \cdots \oplus L_k'$, если $S = L_1' \dot{+} L_2' \dot{+} \cdots \dot{+} L_k'$ и $L_i' \cap (L_1' \dot{+} L_2' \dot{+} \cdots \dot{+} L_{i-1}' \dot{+} L_{i+1}' \dot{+} \cdots \dot{+} L_k') = \{0\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Это значит, что любой вектор x из S выражается единственным образом как сумма $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, где $x_i \in L_i'$. Прямая сумма ассоциативна и коммутативна. Можно также утверждать, что пространство S порождается множеством всех векторов подпространств $L_1', L_2', \ldots, L_k'$.

Если размерности подпространств $\dim L_i' = n_i$, то объединение базисов $L_1', L_2', \ldots, L_k'$ образует базис пространства S и его размерность $\dim S = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Если $S = L_1' \oplus L_2'$, то L_1' и L_2' называются *алгебраически дополнительными*, причем $\dim L_1' + \dim L_2' = \dim S$.

Пусть размерности произвольных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства S равны n_1 и n_2, а размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ равна s. Рассмотрим пространство S_k, порожденное подпространствами L_1 и L_2, т. е. $S_k = L_1 \oplus L_2$, размерность которого обозначим через k. Тогда имеет место тождество: $k + s = n_1 + n_2$. В частном случае, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, т. е. размерность $L_1 \cap L_2$ равна нулю, то $k = n_1 + n_2$.

10. Алгебры. Термин *алгебра* в математике — один из древнейших и самый современный. Он имеет ряд значений, из которых можно указать следующие: 1) общий предмет (элементарная алгебра, абстрактная алгебра); 2) теория операций с конкретными системами (алгебра множеств, векторная алгебра, матричная алгебра); 3) тип математической модели (линейная алгебра, булева алгебра). Последнее значение иллюстрируется важным понятием, которое вводится ниже.

Линейной алгеброй называется линейное пространство S над числовым полем K, если в S установлена *операция умножения*,

приводящая в соответствие каждой паре элементов из S элемент из S (обозначается $x \cdot y$ или xy) и удовлетворяющая следующим условиям для любых $x, y, z \in S$ и $\lambda \in K$: 1) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$; 2) $(xy)z = x(yz)$ — ассоциативность; 3) $(x+y)z = xz + yz$ — дистрибутивность.

Нейтральным элементом относительно сложения векторов является нуль-вектор 0 пространства S, причем $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$. Нейтральный элемент относительно умножения e называют единицей, причем различают *левую единицу*, если $ex = x$ и *правую единицу*, если $xe = x$.

Пусть $xy = e$, тогда x называется *левым обратным* (симметричным) к элементу y, а y — *правым обратным* к элементу x. Если элемент обладает и левым и правым обратным, причем они совпадают, то такой элемент называют *обратимым*. Если x и y обратимы, то $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Уравнение $ax = y$, где $a \in S$, обратимо, решается умножением обеих его частей слева на a^{-1}, в результате чего имеем $x = a^{-1}y$.

Если умножение элементов из S коммутативно, то и линейная алгебра называется *коммутативной*. Если S есть поле, т. е. умножение коммутативно и каждый отличный от нуля элемент из S обратим, то линейная алгебра называется *алгеброй с делением*. *Ранг* линейной алгебры определяется ее размерностью как векторного пространства.

Примеры линейных алгебр: 1) алгебра комплексных чисел — коммутативная с делением ранга два над полем действительных чисел; 2) алгебра многочленов произвольной степени — коммутативная над полем действительных или комплексных чисел; 3) алгебра матриц n-го порядка с элементами поля K — некоммутативная над полем K ранга n^2.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что множество действительных чисел образует метрическое пространство, если задать метрику одним из следующих способов:

а) $\rho(x, y) = |x - y|$;

б) $\rho(x, y) = \dfrac{d}{1+d}$, где $d = |x - y|$;

в) $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$

2. Множество слов длины n, состоящих из n символов (букв, цифр, знаков и т. п.) конечного алфавита, можно рассматривать как метрическое пространство, если ввести на нем соответствующим образом метрику. Например, в качестве расстояния $\rho(x, y)$ между двумя словами можно принять количество позиций, в которых слова x и y содержат различные символы.

а) Покажите, что введенное таким способом расстояние удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

б) Найдите расстояния между русскими словами $x =$ (лекция), $y =$ (секрет), $z =$ (секция).

в) Найдите расстояния между двоичными кортежами: $x = (100101101)$, $y = (001101001)$, $z = (101001010)$.

г) Проверьте на данных примерах свойства метрики.

3. Пусть M — множество, состоящее из двух элементов a и b. Покажите, что система подмножеств, которая содержит, наряду с M и пустым множеством, одноэлементное множество $\{b\}$, является топологией в M. Какие подмножества данного топологического пространства являются замкнутыми?

4. Постройте все топологии в пространстве M, состоящим из трех, четырех и пяти элементов.

5. Покажите, что законы композиции, заданные в (6), определяют линейное пространство.

6. На приведенных ниже множествах обычным образом введены внутренний закон (сложение) и внешний закон (умножение на число). Какие из этих множеств образуют линейные пространства:

а) многочлены степени n;

б) многочлены степени, меньшей или равной n;

в) многочлены степени, большей или равной n;

г) все векторы плоскости;

д) все векторы плоскости, не параллельные оси абсцисс;

е) все векторы плоскости, выходящие из начала координат и расположенные в первом квадранте;

ж) квадратные матрицы n-го порядка.

7. Является ли линейно-независимой совокупность трехмерных векторов:

а) $x_1 = (5, 1, 4)$; $x_2 = (0, 3, 2)$; $x_3 = (2, 1, 2)$;

б) $x_1 = (2, 3, 1)$; $x_2 = (3, 4, 2)$; $x_3 = (1, 5, 4)$?

8. Дано множество X, состоящее из шести векторов: $x_1 = (1, 1, 0, 0)$; $x_2 = (1, 0, 1, 0)$; $x_3 = (1, 0, 0, 1)$; $x_4 = (0, 1, 1, 0)$; $x_5 = (0, 1, 0, 1)$; $x_6 = (0, 0, 1, 1)$. Найдите максимальное линейно-независимое подмножество X' этого множества и выразите остальные векторы как линейные комбинации векторов из X'. Имеет ли задача другие решения?

9. Дана система векторов $e_1 = (1, 0, 1)$; $e_2 = (1, 1, 0)$; $e_3 = (2, 3, 1)$.

а) Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис трехмерного пространства.

б) Произвести ортогонализацию данного базиса.

в) Найти координаты вектора $x = (4, -1, 5)$ в исходном и ортонормированном базисах.

10. КОМБИНАТОРИКА

1. Выборка элементов. Одной из задач *комбинаторики* является определение количества различных подмножеств, которые можно образовать выборкой элементов из некоторого множества по определенным правилам.

Выборка r элементов называется *r-перестановкой*, если учитывается порядок следования, и *r-сочетанием*, если принимаются во внимание только элементы без учета порядка. Пусть, например, дано множество $M = \{a, b, c, d\}$. Выборки abc, acb, bac, bca, cab, cba

являются различными 3-перестановками, образованными из одних и тех же элементов. В то же время все эти выборки представляют собой различную запись одного и того же 3-сочетания.

Выборки могут допускать и не допускать повторения элементов. При выборках с повторениями различают два случая.

В первом случае предполагается, что запас повторяемых элементов ограничен и определяется *спецификацией* $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, где n_i — количество элементов i-го вида. Общее число элементов исходного множества $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, причем в r-выборке $r \leqslant n$. Каждый вид можно рассматривать как класс эквивалентности, элементы которого считаются неразличимыми и обычно обозначаются одинаковыми номерами или символами. Совокупность обозначений различных классов образует семейство представителей.

Пусть, исходное множество задано тремя классами эквивалентности со спецификацией $\{2, 5, 4\}$, причем $n = 2 + 5 + 4 = 11$. Обозначим представители классов через a, b, c, так что семейство представителей образует множество $\{a, b, c\}$. Тогда выборки $aabbbc$, $ababbc$, $baabbc$ и т. п. являются различными 6-перестановками; выборки $aabbbbbcccc$ и $aabbbccbccb$ — различными 11-перестановками. Выборки $aabbbc$, $bbbbbc$, $abbccc$ представляют собой примеры различных 6-сочетаний, а 11-сочетание имеется только одно: $aabbbbbcccc$.

Во втором случае запас элементов не ограничивается, и в выборке из r элементов допускается любое число повторений, не превышающее заданного числа r. Исходное множество можно рассматривать как такое, которое состоит из различных элементов, но после выборки некоторого элемента он восстанавливается в этом множестве (*выборка с возвращением*).

2. Правило суммы и произведения. Наиболее часто применяются при доказательствах в комбинаторике следующие два правила.

Правило суммы: если объект a может быть выбран p способами, а объект b — другими q способами, то выбор «либо a, либо b» может быть осуществлен $p + q$ способами. Следует иметь в виду, что выборы a и b являются здесь *взаимно исключающими*. Иначе говоря, необходимо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта a не совпал с каким-нибудь способом выбора объекта b. При наличии таких совпадений правило суммы неприменимо и результат равен $p + q - k$, где k — число совпадений.

Правило произведения: если объект a может быть выбран p способами и после каждого из таких выборов объект b в свою очередь может быть выбран q способами, то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить pq способами. Это правило используется в тех случаях, когда выборы a и b *независимы*.

3. Перестановки. Определим число *r-перестановок из n различных элементов без повторений*. Первый член перестановки можно выбрать из n элементов n различными способами. Так как элементы не должны повторяться, то выбор второго члена можно осуществить только $n-1$ способами и т. д. вплоть до r-го члена, который можно выбрать $n-r+1$ способами. Применяя последовательно правило произведения, получаем:

$$p(n, r) = n(n-1)\ldots(n-r+1),\ n \geqslant r.$$

Например, из четырех различных объектов, пронумерованных 1, 2, 3, 4, можно составить 12 следующих 2-перестановок: 12, 13, 14, 23, 24, 34, 21, 31, 41, 32, 42, 43.

Обычно n-перестановки из n различных элементов называют просто *перестановками*, как в (3.9). Положив $r = n$, имеем число перестановок $p(n, n) = p_n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$. Используя это соотношение, запишем

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{p(n, n)}{p(n-r, n-r)}.$$

Рассмотрим *перестановки с повторениями из n элементов*, спецификация которых $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, причем $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Из-за совпадения некоторых элементов число таких перестановок оказывается меньшим чем $n!$, так как перестановка одинаковых элементов ничего не меняет. Элементы j-го класса допускают перестановку $n_j!$ способами, и в каждом классе такие операции осуществляются независимо. Поэтому в соответствии с правилом произведения можно совершить $n_1! n_2! \ldots n_k!$ перестановок, не изменяющих данную перестановку. Значит число различных перестановок с повторениями, которые получаются из n элементов, выражается формулой

$$p_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!}.$$

Например, план застройки улицы 10 домами, среди которых 3 дома одного типа, 5 другого и 2 третьего, можно представить $p_{10}(3, 5, 2) = 10!\ 3!\ 5!\ 2! = 2520$ способами.

Если запас объектов n различных типов не ограничен, то каждое место в r-перестановке можно заполнить n различными способами. Поэтому согласно правилу произведения число *r-перестановок с неограниченными повторениями* равно $U(n, r) = n^r$. Это соотношение, в частности, определяет количество различных r-разрядных чисел, записанных в позиционной системе с основанием n.

4. Сочетания. Определим число *r-сочетаний из n различных элементов*. Из каждого такого сочетания можно образовать $r!$

перестановок, поэтому искомое число будет в $r!$ раз меньше числа r-перестановок из n элементов, т. е.

$$C(n, r) = \frac{p(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1) \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Например, из четырех различных объектов, обозначаемых 1, 2, 3, 4, можно составить следующие шесть сочетаний по два элемента ($n = 4$, $r = 2$): 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Число r-сочетаний из n различных элементов обозначается также через $\binom{n}{r}$ или C_n^r. Первое более удобно, а второе более привычно. Заменив в полученной формуле r на $n - r$, получим $C(n,r) = C(n, n-r)$ или $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Формулу для числа *r-сочетаний с неограниченными повторениями из n элементов* (различными считаются сочетания, которые отличаются хотя бы одним элементом) можно получить следующим способом. Каждому сочетанию ставится в соответствие перестановка, в которой все элементы данного сочетания закодированы единицами, причем все различные классы элементов разделяются нулем (даже и в случае, если элементы каких-нибудь классов не вошли в сочетания). Например, для сочетания *abbce* из элементов множества $\{a, b, c, d, e\}$ перестановка будет 101101001, для сочетания *bbbee* — перестановка 011100011 и т. п. Очевидно, перестановка для r-сочетания из n элементов с повторениями содержит r единиц и $n - 1$ нулей. Искомое число r-сочетаний совпадает с числом перестановок с ограниченными повторениями из $r + n - 1$ элементов и спецификацией $\{r, n-1\}$, т. е. в соответствии с формулой из (3) имеем

$$f(n, r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{r+n-1}{r} = C(r+n-1, r).$$

Например, число сочетаний с повторениями по 2 из 4 элементов, обозначаемых 1, 2, 3, 4, равно $C(5, 2) = 10$, которые образуются следующими выборками: 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44.

Рассмотренный способ основан на замене одного множества другим множеством, элементы которых находятся во взаимно-однозначном соответствии, и, следовательно, их число в этих множествах одинаково.

5. Рекуррентные соотношения. Подсчет числа перестановок и сочетаний можно определять также с помощью *рекуррентных соотношений*, которые играют значительную роль в комбинаторике.

Так, множество r-перестановок из n различных элементов можно разбить на два класса так, что перестановки одного из них не содержат некоторого фиксированного элемента исходного множества, а все перестановки другого класса обязательно содержат этот эле-

мент. Очевидно, первый класс состоит из $P(n-1, r)$-перестановок, а второй — из $rP(n-1, r-1)$, так как фиксированный элемент может занимать одно из r положений в каждой из $P(n-1, r-1)$ подстановок. Отсюда следует рекуррентная формула

$$P(n, r) = P(n-1, r) + rP(n-1, r-1).$$

Символ $P(k, 0)$, не имеющий комбинаторного смысла, принято считать равным единице. Ясно также, что $P(k, 1) = k$ для любого целого положительно k и $P(k, s) = 0$ при $k < s$. Эти соотношения служат *граничными условиями* для полученного рекуррентного соотношения. Положив $r = n$, имеем: $P(n, n) = P(n-1, n) + nP(n-1, n-1) = nP(n-1, n-1) = n(n-1)P(n-2, n-2) = \ldots = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$

Рекуррентное соотношение для числа r-сочетаний из n различных элементов имеет вид:

$$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r), \quad n \geqslant r,$$

где второе слагаемое учитывает сочетания, не содержащие фиксированного элемента, а первое — все сочетания с этим элементом. Граничные условия для этого соотношения $C(n, 0) = C(1, 1) = 1$ и $C(k, s) = 0$ при $k < s$.

Аналогично, разбивая множество r-сочетаний с повторениями из n элементов на два непересекающиеся подмножества, одно из которых включает все такие сочетания, которые не содержат фиксированного элемента, а другое — такие сочетания, которые содержат этот элемент, получаем рекуррентное соотношение

$$f(n, r) = f(n-1, r) + f(n, r-1).$$

При этом n и r непосредственно не связаны между собой и допускается как $n \geqslant r$, так и $n \leqslant r$. Граничные условия в этом случае следующие: $f(n, 1) = n$; $f(n, 0) = f(1, r) = 1$.

Последовательное применение рекуррентных соотношений совместно с граничными условиями позволяет вычислить число соответствующих выборок элементов из данного множества. С помощью этих соотношений можно также вывести формулы, полученные в (3) и (4), и решать другие комбинаторные задачи.

6. Бином Ньютона. Поставим в соответствие каждому объекту из множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ *двучлены* вида $1 + \alpha_i x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и перемножим их: $(1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x) \ldots (1 + \alpha_n x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Коэффициент a_r многочлена представляет собой сумму произведений, каждое из которых образуется r элементами из n (r-сочетания), причем всего в a_r имеется $C(n, r)$ таких произведений. Если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$, то любое произведение r-сочетаний

элементов равно единице и, следовательно, $a_r = C(n, r) = \binom{n}{r}$. Таким образом,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Это выражение называют *биномом Ньютона*, а r-сочетания из n различных элементов $C(n, r)$ являются *биномиальными коэффициентами*. Определив каким-либо способом a_r, найдем и значение $C(n, r)$. Обратно, вычислив числа сочетаний из n элементов по $r = 0, 1, \ldots, n$, получим коэффициенты разложения $(1+x)^n$.

С помощью бинома Ньютона можно вывести различные формулы для сочетаний. Так, положив $x = 1$ и $x = -1$, имеем

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^r; \quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0.$$

Первая из этих формул определяет, в частности, количество всех подмножеств некоторого множества. Продифференцировав бином Ньютона по x и положив $x = -1$, получим

$$\sum_{r=1}^{n} r(-1)^r \binom{n}{r} = 0, \quad n \geqslant 1,$$

а продифференцировав k раз по x, разделив на $k!$ и положив $x = 1$, приходим к соотношению

$$\sum_{r=k}^{n} (-1)^r \binom{r}{k}\binom{n}{r} = 0, \qquad n \geqslant r.$$

7. Полиномиальные производящие функции. Произведение $(1+\alpha_1 x)(1+\alpha_2 x)\ldots(1+\alpha_n x)$ порождает r-сочетания, в которых каждый элемент из множества объектов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ может появляться не более одного раза. Очевидно, для других типов сочетаний следует подобрать и другой вид сомножителей.

Если объект α_i может входить в сочетания $0, 1, \ldots, k$ раз, то вместо $1 + \alpha_i x$ следует взять сомножитель $1 + \alpha_i x + \alpha_i^2 x^2 + \ldots + \alpha_i^k x^k$ (при $k = 0$ сомножитель равен единице). Тогда при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ коэффициенты a_r многочлена $A(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ представляют собой r-сочетания из n различных элементов с повторениями.

Например, для r-сочетаний из трех элементов a, b, c со спецификацией $\{3, 1, 2\}$ имеем: $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x)(1 + x + x^2) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$. Здесь коэффициент при x^r дает искомое число r-сочетаний. Так, имеется три 1-сочетаний (a, b, c), пять 2-сочетаний (aa, ab, ac, bc, cc), шесть 3-сочетаний (aaa, aab, aac, abc, acc, bcc), пять 4-сочетаний ($aaab$, $aaac$, $aabc$, $aacc$, $abcc$) и т. д.

Многочлен $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называют *полиномиальной производящей функцией (энумератором)* для последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ В рассмотренном случае эта последовательность представляет собой *r-сочетания из n элементов с повторениями*. Бином Ньютона является производящей функцией для сочетаний без повторений. Следует иметь в виду, что переменная x энумератора никак не определена и считается просто абстрактным символом. Его роль сводится к тому, чтобы различать элементы последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ При этом различные преобразования таких последовательностей заменяются соответствующими операциями над производящими функциями.

Для сочетаний с неограниченными повторениями элементов n типов энумератор будет $(1 + x + x^2 + \ldots)^n$. Выражение в скобках можно представить в виде

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = (1-x)^{-1}.$$

Рассматривая выражение $(1-x)^{-n}$ как бином Ньютона с отрицательным показателем $-n$, формально записываем

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-x)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)\cdot\cdot(n+1)n}{r!} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} f(n, r)\, x^r,$$

что совпадает с результатом, полученным в (4). Отсюда также следует формальное соотношение

$$\binom{-n}{r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Если потребовать, чтобы каждый объект входил в сочетание с неограниченными повторениями четное число раз, то в качестве энумератора следует принять $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^n$ или

$$(1 - x^2)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n + r - 1}{r} x^{2r},$$

т. е. число r-сочетаний при нечетном r равно нулю, а число $2r$-сочетаний определяется как число r-сочетаний без принятого ограничения.

Аналогично определяется энумератор и при других дополнительных условиях. Пусть, например, необходимо определить число таких r-сочетаний из n типов элементов с неограниченными повторениями, которые обязательно содержат хотя бы по одному элементу каждого вида. Тогда

$$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = x^n (1 + x + x^2 + \cdots)^n = x^n (1 - x)^{-n} =$$
$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n + r - 1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n + r - 1}{r} x^{n+r} =$$
$$= \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r - 1}{r - n} x^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r - 1}{n - 1} x^r.$$

Здесь при преобразовании суммы произведена замена переменной $n + r$ на r и использовано соотношение $\binom{n}{r} = \binom{n}{n - r}$ из (4). Число искомых сочетаний равно нулю при $r < n$ и равно $C(r - 1, n - 1)$ при $r \geqslant n$. Например, для трех элементов a, b, c существует одно 3-сочетание (abc), число 4-сочетаний равно $C(3, 2) = 3$ $(aabc, abbc, abcc)$, число 5-сочетаний равно $C(4, 2) = 6$ $(aaabc, aabbc, aabcc, abbbc, abbcc, abccc)$ и т. д.

8. Экспоненциальные производящие функции. Воспользовавшись зависимостью между числами r-сочетаний и r-перестановок из различных элементов (4), запишем

$$(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} p(n, r) \frac{x^r}{r!},$$

т. е. число r-перестановок из различных элементов является коэффициентом при $x^r/r!$ в разложении $(1 + x)^n$. Целесообразно обобщить этот факт и на другие виды перестановок.

Определим, например, производящую функцию для r-перестановок с неограниченными повторениями так, чтобы $U(n, r) = n^r$ было коэффициентом при $x^r/r!$. Так как

$$\sum_{r=0}^{\infty} U(n, r)\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(nx)^r}{r!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^n = e^{nx},$$

то ряд $1 + x + x^2/2! + \ldots$, являющийся разложением экспоненциальной функции, можно принять в качестве энумератора для $U(n, r)$. Подобные энумераторы называют *экспоненциальными производящими функциями*. С их помощью можно вычислять число перестановок различных типов.

Если r-перестановки образуются из множества n элементов со спецификацией $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, причем $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, то для каждого класса элементов ряд $1 + x + x^2/2! + \cdots$ ограничивается числом $x^{n_i}/n_i!$, и, следовательно, энумератор имеет вид:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right) = \sum_{r=0}^{n} b_r\frac{x^r}{r!}.$$

Искомые r-перестановки с ограниченными повторениями определяются численными значениями коэффициентов b_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Последний член

$$\frac{x^{n_1}x^{n_2}\ldots x^{n_k}}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots n_k!}\cdot\frac{x^n}{n!} = b_n\frac{x^n}{n!}$$

определяет число перестановок из n элементов по n с повторениями, т. е. $b_n = p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, что совпадает с результатом, полученным другим способом в (3).

9. Принцип включения и исключения. До сих пор речь шла о подсчете числа подмножеств, которые образуются путем выборки объектов из некоторого множества в соответствии с условиями, определяющими их количество, упорядоченность и повторяемость. Не меньшее значение имеют задачи перечисления, связанные со свойствами объектов.

Пусть имеется N объектов и некоторая совокупность свойств $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Обозначим через $N(\alpha_i)$, $N(\alpha_i\alpha_j)$, $N(\alpha_i\alpha_j\alpha_k)$ и т. д. количество объектов, которые обладают соответственно свойствами α_i; α_i и α_j; α_i, α_j и α_k и т. д. Очевидно, таких чисел будет столько, сколько подмножеств можно образовать из элементов множества H, т. е. 2^n (некоторые числа могут равняться нулю). Если желают подчеркнуть, что учитываются объекты, не обладающие свойством

α_i, то пишут $\bar{\alpha}_i$. Например, $N(\alpha_2\bar{\alpha}_3\alpha_5)$ означает число объектов, обладающих свойствами α_2 и α_5 и не обладающие свойством α_3.

Число объектов, не обладающих ни одним из свойств множества H, определяется *формулой включения и исключения*:

$$N(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_n) = N - \sum_i N(\alpha_i) + \sum_{i<j} N(\alpha_i\alpha_j) -$$
$$- \sum_{i<j<k} (\alpha_i\alpha_j\alpha_k) + \cdots + (-1)^n N(\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Действительно, при вычитании из N объектов со свойствами α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ объекты, обладающие двумя свойствами α_i и $\alpha_j (i \neq j)$, вычитаются дважды, и поэтому нужно прибавить $N(\alpha_i\alpha_j)$, где $\alpha_i\alpha_j$ — попарные сочетания элементов из H. Но при этом дважды учитываются те объекты, которые обладают тремя свойствами и, следовательно, их необходимо исключить, т. е. вычесть сумму всех $N(\alpha_i\alpha_j\alpha_k)$, где $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ — сочетания из n свойств по три. Этот процесс включения и исключения продолжается до последнего члена $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, определяющего число объектов со всеми n свойствами, знак которого зависит от четности n. Приведенная формула известна также под названиями: *символический метод*, *принцип перекрестной классификации*, *метод решета*, *формула обращения*.

Если записать $\bar{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$ и рассмотреть последовательность символов $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_n$ как алгебраическое произведение, то формулу включения и исключения можно представить в символическом виде. Например, для $n = 3$ имеем

$$N[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)] = N[1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 +$$
$$+ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3] = N(1) - N(\alpha_1) -$$
$$- N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) -$$
$$- N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3),$$

причем принимается, что $N(1) = N$. Благодаря такой формализации можно записать формулу для числа объектов, обладающих и не обладающих некоторыми свойствами, например:

$$N(\alpha_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3\alpha_4) = N[\alpha_1(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\alpha_4] = N[\alpha_1\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4 -$$
$$-\alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] = N(\alpha_1\alpha_4) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) - N(\alpha_1\alpha_3\alpha_4) +$$
$$+ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4).$$

Пусть заданы свойства: α_1 — стальной, α_2 — черный, α_3 — сферический, причем $N(\alpha_1) = 13$; $N(\alpha_2) = 10$; $N(\alpha_3) = 14$; $N(\alpha_1\alpha_2) = 4$; $N(\alpha_1\alpha_3) = 5$; $N(\alpha_2\alpha_3) = 3$ и $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 1$. Если имеется всего $N = 38$, то число таких из них, которые не обладают ни одним из указанных свойств, будет $N(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3) = 38 - (13 + 10 + 14) + (4 + 5 + 3) - 1 = 12$. Число стальных, но не черных

и не сферических, равно $N(\alpha_1\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3) = N[\alpha_1(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)] = N(\alpha_1) - N(\alpha_1\alpha_2) - N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 13 - 4 - 5 + 1 = 5$.

Принцип включения и исключения наглядно иллюстрируется диаграммой Венна, которая для рассмотренного примера показана на рис. 65.

10. Разбиения. Набор целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называется *разбиением* числа n, если $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Числа n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ называют *частями*, а их сумму n — *характеристикой разбиения*. При подсчете числа возможных разбиений могут учитываться дополнительные условия — тип разбиения, величины и общее число частей, число повторений. Так, для числа 4 имеется 5 разбиений без ограничений (4, 31, 22, 211, 1111) и восемь разбиений с учетом порядка частей (4, 31, 13, 22, 211, 121, 112, 1111). Число 8 разбивается на три части пятью способами: 611, 521, 431, 422, 332. Если принять в качестве производящей функции для разбиения числа n без ограничений $p(n)$ многочлен $p(x) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots$, то вклад части величины k определяется множителем $(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots)$ и, следовательно, имеем

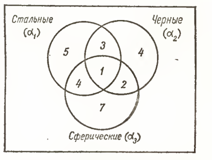


Рис. 65. Диаграмма Венна для множеств, характеризуемых тремя свойствами.

$$p(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots) \cdots$$
$$\cdots (1 + x^k + x^{2k} + \cdots) \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}.$$

Из этого соотношения получаем производящие функции при ограничениях, накладываемых на численные значения частей. Если все части разбиения не превосходят числа k, то

$$p_k(x) = \prod_{i=1}^{k} (1 - x^i)^{-1}.$$

Для разбиений, все части которых различны, имеем $u(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \ldots$, а разбиения на нечетные части перечисляются функцией

$$v(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{2i-1})^{-1}.$$

Определим, например, число способов размена 8 копеек монетами достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек. Для этого случая $p(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)$. Коэффициент при x^8 равен 13, что и дает искомые разбиения: 53, 521, 51^3, 3^21^2, 3^22, 32^21, 321^3, 31^5, 2^4, 2^31^2, 2^21^4, 21^6, 1^8 (запись a^q означает, что a входит в разбиение q раз). Если потребовать, чтобы все части были различными, то $u(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^5)$, откуда находим $u(8) = 2$ (соответствующие разбиения 53 и 521).

Число разбиений n объектов на k частей можно определить с помощью рекуррентной формулы

$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n - k, k - 1) + \ldots + p(n - k, 1)$ при граничных условиях $p(n, k) = 0$ для $n < k$ и $p(k, k) = p(n, 1) = 1$. Так, если $n = 7$ и $k = 3$, имеем: $p(7, 3) = p(4, 3) + p(4,2) + p(4,1)$; $p(4,2) = p(2,2) + p(2,1) = 1 + 1 = 2$; $p(4,3) = p(1,3) + p(1,2) + p(1,1) = 1$; $p(7,3) = 1 + 2 + 1 = 4$. Итак, имеем четыре разбиения числа 7 на три части: 511, 421, 331, 322.

Методы комбинаторики широко используются в теории вероятностей, математической логике, теории графов и многих других разделах математики. Они являются мощным орудием при решении практических задач, связанных с перечислением, распределением и разбиением множеств объектов различной природы.

Комбинаторика позволяет сосчитать столь огромные количества объектов, определить которые простым перебором практически невозможно даже с помощью современных вычислительных машин. При этом используются рассмотренные методы: правила суммы и произведения, формула включения и исключения, рекуррентные соотношения и производящие функции.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов? Решить задачу при условии, что одна из полос флага должна быть красной.

2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в словах: а) «математика», б) «инженер»?

3. В цехе имеется девять свободных рабочих мест, из которых на двух могут работать только женщины, на трех — только мужчины и на четырех — мужчины и женщины. Сколькими способами можно распределить трех женщин и четырех мужчин на рабочих местах?

4. В футбольной команде имеется 13 полевых игроков и 2 вратаря. Сколькими способами можно выбрать играющий состав (11 игроков, в том числе один вратарь)?

5. Покажите, что число сочетаний из n элементов по r равно числу n-перестановок с повторениями из r элементов одного типа и $n-r$ элементов другого типа, т. е.

$$C(n, r) = P_n(r, n-r).$$

6. Определить число всевозможных наборов из пяти различных элементов по три, если в каждом наборе:

а) все предметы различные;

б) одинаковые предметы могут повторяться.

7. Пусть в сочетания с повторениями из n элементов по r должны обязательно входить элементы k фиксированных типов ($k \leqslant n$). Показать, что число таких сочетаний равно $C(r+n-k-1, r-k)$. В частности, если в каждое сочетание должен входить хотя бы один элемент каждого из n типов (это возможно только при $n \leqslant r$), то число таких сочетаний равно $C(r-1, r-n)$.

8. N урн случайным образом заполняются n шарами ($n < N$). Найти вероятность того, что каждая из n первых урн будет содержать точно по одному шару, если урна может принять:

а) не больше одного шара;

б) любое число шаров, не превышающее n.

9. Покажите, что

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = P_n(n_1-1, n_2, n_3) + P_n(n_1, n_2-1, n_3) + P_n(n_1, n_2, n_3-1).$$

10. Выражение $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ разлагается в сумму членов вида $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ с некоторыми коэффициентами, где числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ принимают всевозможные значения от 0 до n, причем $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Покажите, что для данного разложения:

а) коэффициент при члене $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ равен числу перестановок с повторениями из n элементов, спецификация которых $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, т. е.

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!};$$

б) количество всех членов равно числу n-сочетаний с повторениями из k элементов, т. е.

$$f(n, k) = \binom{n+k-1}{n};$$

в) сумма всех коэффициентов равна k^n.

11. На основании соотношений предыдущей задачи для выражения $(a + 3b + 5c - d)^6$ определить:

а) коэффициенты при членах a^3b^2d и ab^2cd^2;

б) количество всех членов разложения.

12. Найти число способов распределения группы из 23 студентов в бригады по 3 и 5 человек.

13. Из 30 сотрудников отдела английский язык знают 19, немецкий — 17, французский — 11, английский и немецкий — 12, английский и французский — 7, немецкий и французский — 5, все три языка — 2. Сколько сотрудников отдела не владеют иностранными языками? Сколько из них знают только английский, только немецкий, только французский языки? Начертите диаграмму Венна.

Литература

Основные положения теории множеств доступно изложены в книгах: Р. Столл «Множества. Логика. Аксиоматические теории» (М., «Просвещение», 1968) и В. Серпинский «О теории множеств» (М., «Просвещение», 1966). Отношения эквивалентности, толерантности и порядка, а также связанные с ними задачи подробно освещены в книге Ю. А. Шрейдера «Равенство, сходство, порядок» (М., «Наука», 1971), где также дано приложение теории отношений к лингвистике.

Для более глубокого изучения теории множеств можно рекомендовать следующие книги: Ф. Хаусдорф «Теория множеств» (М.— Л., Гостехиздат, 1937); П. С. Александров «Введение в общую теорию множеств и функций» (М.— Л., Гостехиздат, 1948); К. Куратовский, А. Мостовский «Теория множеств» (М., «Мир», 1970). Графический метод теории множеств рассматривается в монографии А. С. Кузичева «Диаграммы Венна» (М., «Наука», 1968).

Алгебраическим системам и пространствам посвящена обширная литература. Эти вопросы в доступной для инженеров форме излагаются, например, в книгах А. П. Мишиной и И. В. Проскурякова «Высшая алгебра» (М., Физматгиз, 1962), А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры» (М., Физматгиз, 1959), М. Заманского «Введение в современную алгебру и анализ» (М., «Наука», 1974), В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Линейная алгебра» (М., «Наука», 1974). Систематическое изложение теории алгебраических систем дано в монографии С. Ленга «Алгебра» (М., «Мир», 1968).

Теория групп популярно излагается в книге И. Гроссмана и В. Магнуса «Группы и их графы» (М., «Мир», 1971). Применению теории групп для решения задач физики и техники посвящена обширная литература. Примером может служить книга С. Багавантам, Т. Венкатарайуду «Теория групп и ее применение к физическим проблемам» (М., Изд. иностр. лит., 1959).

Хорошими книгами по комбинаторике являются: Дж. Риордан «Введение в комбинаторный анализ» (М., Изд. иностр. лит., 1963); А. Кофман «Введение в прикладную комбинаторику» (М., «Наука», 1975); М. Холл «Комбинаторика» (М., «Мир», 1970); сборник статей под ред. Э. Беккенбаха «Прикладная комбинаторная математика» (М., «Мир», 1968). Две книги Н. Я. Виленкина — «Рассказы о множествах» (М., «Наука», 1969) и «Комбинаторика» (М., «Наука», 1969) в занимательной и доступной форме разъясняют основные понятия и методы теории множеств и комбинаторики.

Глава 3

МАТРИЦЫ

Многое можно сказать об этой теории матриц...

А. Кэли

Матричная алгебра — наиболее убедительный пример того, как одна и та же закономерность встречается при самых различных обстоятельствах.

У. Сойер

Хотя нет такой задачи, которую нельзя было бы решить без помощи матриц, представление совокупностей чисел и других объектов в виде таблиц оказалось чрезвычайно удобным и эффективным способом упорядочения информации. Это обусловило быстрое развитие матричного аппарата и его широкое применение в науке и технике. Многие выкладки и результаты без использования матриц выглядели бы слишком громоздкими и трудно обозримыми. Работа с матрицами не только экономит время и бумагу, но и означает более высокий уровень математической культуры и мышления.

Теория матриц основана на простых положениях. Однако овладение матричным аппаратом требует значительных усилий и тренировки. Необходимо не только понимать смысл основных матричных соотношений, но и научиться уверенно оперировать с матрицами как объектами более общего характера по сравнению с числами и функциями. С этих позиций и излагается материал настоящей главы.

В первых трех параграфах подробно рассматриваются основные действия над матрицами, вычисление определителей и обращение матриц. Излагаемые численные методы служат не только средством решения этих задач. Они позволяют глубже проникнуть в сущность основных понятий и соотношений теории матриц и определителей.

Развитие матричного аппарата связано, прежде всего, с решением систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений. При изложении этих вопросов предполагается, что читатель знаком с основными положениями теории таких систем и методами их решения без применения матриц. Матричный аппарат позволяет представить процессы решения и исследования систем уравнений в удобной и лаконичной форме, а также построить алгоритмы для реализации этих процессов на электронных вычислительных машинах.

При рассмотрении дифференциальных уравнений выясняется смысл понятия экспоненциальной функции от матрицы в простейшем случае, когда все корни характеристического уравнения простые. В дальнейшем это понятие распространяется на случай кратных корней и приводится обзор методов определения аналитических функций от матриц в общем виде.

Использование матриц для решения многих прикладных задач часто сводится по существу к их преобразованиям. Систематическое рассмотрение этих вопросов позволяет выяснить взаимосвязь между различными типами таких преобразований, установить их особенности и области применения.

Заключительный параграф настоящей главы посвящен рассмотрению основных соотношений в пространстве переменных состояний, значение которого сильно возросло в связи с использованием современных средств вычислительной техники для математического моделирования физических систем. Наряду с общими методами представления таких систем, затрагиваются некоторые вопросы их исследования (наблюдаемость, управляемость, устойчивость). Методы формирования математических моделей физических систем излагаются в следующей главе с использованием аппарата теории графов.

1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. Матрицы как объекты алгебраических систем. Если элементами матриц являются числа, то говорят о множестве матриц над числовым полем. Такое множество в совокупности с определенными на нем операциями и составляет матричную алгебру. Основные операции над матрицами определены в вводной главе. В дальнейшем будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с техникой их выполнения. Здесь же уместно обратить внимание на матрицы как объекты алгебраических систем.

Множество всех прямоугольных матриц одинакового размера $m \times n$ образует линейное пространство над числовым полем с внутренней операцией — сложением матриц и внешней операцией — умножением матрицы на число. Любая $(m \times n)$-матрица A из этого множества может быть единственным образом представлена в виде:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} I_{ij},$$

где I_{ij} — матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю, кроме ij-элемента, равного единице, т. е.

$$
I_{ij} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \; i.
$$

(столбец j)

Очевидно, матрицы I_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) образуют базис линейного пространства, причем его размерность равна mn.

Множество всех квадратных матриц порядка n с операциями сложения и умножения можно рассматривать как унитарное кольцо. Роль единицы играет единичная матрица E_n (нейтральный элемент относительно умножения). Кольцо имеет делители нуля, так как при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ может иметь место $AB = 0$, но оно не коммутативно в силу того, что операция умножения матриц не подчиняется коммутативному закону. В соответствии с определением, данным в (2.9.10), множество квадратных матриц n-го порядка является также некоммутативной линейной алгеброй над числовым полем ранга n^2.

Множество всех неособенных квадратных матриц данного порядка над числовым полем образует относительно операции умножения мультипликативную группу, в которой нейтральным элементом является единичная матрица, а симметричным элементом любой матрицы из этого множества — обратная матрица.

2. Схема умножения матриц. При выполнении операции умножения по правилу, изложенному в (1. 3. 5), удобно пользоваться схемой (рис. 66), которая иллюстрируется следующим примером:

					1		3	
				B	−5	2		
					−1	4	−3	.
A	−1	3			−16	6	−3	*C*
		1	−2		−3	−6	6	

На рис. 67 показаны схемы для типичных случаев умножения матриц. В результате умножения двух матриц получаем также матрицу (рис. 67, *а*). Произведение матрицы на столбец дает столбец (рис. 67, *б*), а строки на матрицу — строку (рис. 67, *в*). При умножении строки на столбец получаем матрицу с единственным элементом (рис. 67, *г*), которая отождествляется с этим элементом. Наконец, в результате умножения столбца на строку получаем

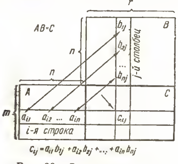


Рис. 66. Схема умножения матриц.

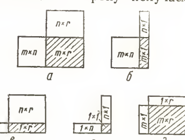
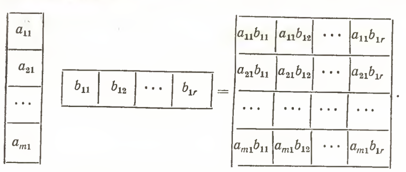


Рис. 67. Схемы умножения:

а — матриц; *б* — матрицы на столбец; *в* — строки на матрицу; *г* — строки на столбец; *д* — столбца на строку.

матрицу (рис. 67, *д*). В последнем случае строки и столбцы результирующей матрицы пропорциональны, так как по правилу матричного произведения



$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1r} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1r} \end{bmatrix}.$$

3. Ассоциативность матричного произведения. При перемножении нескольких матриц можно воспользоваться ассоциативностью этой операции для выбора наиболее целесообразной схемы ее выполнения. Пусть, например, требуется найти произведение четырех матриц $ABCD$. Возможны следующие пути решения этой задачи.

Умножение слева: сначала A умножается на B, затем произведение AB — на C, наконец, ABC — на D, что записывается как

$((AB)C)D$ и иллюстрируется схемой на рис. 68. Этот способ удобен, когда первая матрица A имеет сравнительно небольшое количество строк (особенно, если она является строчной матрицей).

Умножение справа: предпоследняя матрица C умножается на D, затем B — на произведение CD и, наконец A — на BCD, что записывается как $A(B(CD))$ и иллюстрируется схемой на рис. 69. Этот способ удобен, когда последняя матрица D имеет сравнительно небольшое число столбцов (особенно, если она является столбцевой матрицей).

Комбинирование сомножителей: иногда удобно разбить произведение на группы сомножителей, не изменяя их порядка следования, и выполнить умножение сначала по группам, а затем перемножить полученные результаты (слева или справа). Так, для рассматриваемой цепочки матриц этот путь приводит к следующим схемам:

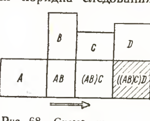


Рис. 68. Схема умножения матриц слева.

Рис. 69. Схема умножения матриц справа.

$$ABCD = A((BC)D) = (A(BC))D = (AB)(CD).$$

Приведенные схемы естественно обобщаются на произведение любого количества матриц, размеры которых допускают эту операцию. Пусть, например, требуется вычислить произведение $ABCDE$, где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C = [-3, \ 1];$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся следующим комбинированием сомножителей: $ABCDE = (AB)(C(DE))$, в соответствии с чем имеем:

$$AB = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \ DE = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}; \quad C(DE) = -10; \quad ABCDE = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \\ -50 \end{bmatrix}.$$

4. Операции над столбцами и строками. Обозначим i-ю строку матрицы A через $a_{(i)}$ и j-й столбец — через $a^{(j)}$. Тогда любую $(m \times n)$-матрицу можно представить как столбец из m ее строк или как строку из n ее столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ \\ a_{(m)} \end{bmatrix} = [a^{(1)},\ a^{(2)},\ \dots,\ a^{(n)}].$$

При таком представлении произведение матриц сводится к операциям над их строками и столбцами. В зависимости от способа представления матриц-сомножителей $A\,(m \times n)$ и $B\,(n \times r)$ имеем два способа образования произведения AB:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ \dots \\ a_{(m)} \end{bmatrix} [b^{(1)},\ b^{(2)},\ \dots,\ b^{(r)}] = \begin{bmatrix} a_{(1)}b^{(1)} & a_{(1)}b^{(2)} & \dots & a_{(1)}b^{(r)} \\ a_{(2)}b^{(1)} & a_{(2)}b^{(2)} & \dots & a_{(2)}b^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m)}b^{(1)} & a_{(m)}b^{(2)} & \dots & a_{(m)}b^{(r)} \end{bmatrix};$$

$$AB = [a^{(1)},\ a^{(2)},\ \dots, a^{(n)}] \begin{bmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \\ \dots \\ b_{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{(s)}.$$

В первом случае ij-элемент результирующей $(m \times r)$-матрицы равен произведению i-й строки первой матрицы на j-й столбец второй матрицы, т. е.

$$a_{(i)}b^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj},$$

что совпадает с правилом, приведенным в (1. 3. 5.). Во втором случае результат равен сумме n произведений столбцов первой матрицы на соответствующие строки второй $a^{(s)}\, b_{(s)}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$. Каждое такое произведение представляет собой $(m \times r)$-матрицу, ij-элемент которой равен $a_{is}\, b_{sj}$, а их сумма дает матрицу, элементы которой выражаются так же, как и в первом случае.

Представив столбец $a^{(s)}$ или строку $b_{(s)}$ в развернутом виде, получим:

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{n} a_{1s} b_{(s)} \\ \sum_{s=1}^{n} a_{2s} b_{(s)} \\ \cdots \\ \sum_{s=1}^{n} a_{ms} b_{(s)} \end{bmatrix} = \left[\sum_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{s1}, \quad \sum_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{s2}, \; \ldots, \; \sum_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{sr} \right].$$

Отсюда следуют соотношения для строки и столбца матрицы $C = AB$:

$$c_{(i)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{(s)}; \qquad c^{(j)} = \sum_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{sj}.$$

Как видно, i-я строка произведения двух матриц получается суммированием строк второй матрицы, умноженных на соответствующие элементы i-й строки первой матрицы. Аналогично j-й столбец произведения получается суммированием столбцов первой матрицы, умноженных на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы. Эти соотношения особенно удобны, если одна из матриц разреженная, т. е. значительное количество ее элементов равно нулю, например:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & & & 3 \\ & 1 & & \\ -3 & & 4 & \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 2a^{(1)} - 3a^{(3)} & a^{(2)} & 4a^{(3)} & 3a^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 16 & 6 \\ -11 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -9 \end{bmatrix}.$$

5. Произведения с диагональной матрицей. Если в произведении $C = AB$ матрица A диагональна, т. е. $a_{is} = 0$ для всех значений s, кроме $s = i$, то $c_{(i)} = a_{ii} b_{(i)}$. Это значит, что при

умножении матрицы на диагональную слева строки этой матрицы умножаются на соответствующие элементы диагональной матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1r} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nr} \end{bmatrix}.$$

Если диагональной является вторая матрица, т. е. $b_{sj} = 0$ для всех значений s, кроме $s = j$, то $c^{(j)} = a^{(j)} b_{jj}$. Это значит, что для умножения матрицы на диагональную справа достаточно столбцы этой матрицы умножить на соответствующие элементы диагональной матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 & a_{12} b_2 & \cdots & a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 & a_{22} b_2 & \cdots & a_{2n} b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} b_1 & a_{m2} b_2 & \cdots & a_{mn} b_n \end{bmatrix}.$$

Произведение двух диагональных матриц является также диагональной матрицей. Очевидно, в этом случае $AB = BA$, т. е. диагональные матрицы коммутируют.

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется *скалярной*. Такую матрицу можно представить как единичную, умноженную на скаляр, т. е.

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \lambda E_n.$$

Умножение матрицы справа или слева на скалярную, элементы которой равны λ, сводится к умножению этой матрицы на скаляр λ.

6. Степени матриц. Произведения одинаковых квадратных матриц A можно записать как ее *степень*: $AA = A^2$, $AAA = A^2A = A^3$ и т. д. Вообще $A^r = AA^{r-1}$ представляет собой r-ю степень матрицы A (r — целое положительное число). Если A — неособенная матрица, то $A^{-r} = (A^{-1})^r$. Как и для чисел имеют место обычные свойства:

$$A^pA^q = A^{p+q}; \quad (A^p)^q = A^{pq},$$

где p и q — положительные числа для произвольной квадратной матрицы и любые целые числа (положительные, отрицательные и нуль) для неособенной матрицы. В частности, $A^0 = AA^{-1} = 1$.

Никакая степень числа, отличного от нуля, не может равняться нулю. В то же время степень квадратной матрицы A^r может равняться нулевой, даже если A — ненулевая матрица. Если $A^r = 0$ для некоторого положительного числа r, то A называется *нильпотентной матрицей*. Например:

$$H = \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}; \quad H^2 = \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Продолжая процесс умножения матрицы на себя, получаем $H^5 = 0$, т. е. матрица H является нильпотентной.

Условились называть p-й *наддиагональю* совокупность $(i, i + 1)$-клеток матрицы при $i = p, p + 1, ..., n - p$. Как видно, рассмотренная выше матрица H характеризуется тем, что элементы ее первой наддиагонали равны единице, а остальные — нулю. При каждом умножении этой матрицы самой на себя ее ненулевые элементы смещаются на следующую наддиагональ, так что H^p (при $p < n$) имеет единичные элементы только на p-й наддиагонали, а при $p = n$ все элементы матрицы становятся нулевыми.

Аналогично совокупность $(i - 1, i)$-клеток матрицы при $i = p, p + 1, ..., n - p$ называют p-*й поддиагональю*. Матрица F n-го порядка, у которой все элементы первой поддиагонали равны единице, а остальные равны нулю, также нильпотентна и $F^r = 0$ при $r \geqslant n$.

7. Многочлены от матрицы. Подобно многочлену от числовой переменной $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ вводится понятие *многочлена от матрицы*:

$$f(A) = a_0E + a_1A + ... + a_mA^m,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_m$ являются вещественными или комплексными числами.

Формально многочлен от матрицы можно рассматривать как результат подстановки в алгебраический многочлен $f(x)$ вместо переменной x квадратной матрицы A. При этом матричный многочлен $f(A)$ также является квадратной матрицей того же порядка, что и матрица A.

Правила действий над многочленами от матрицы подобны соответствующим правилам для обычных (скалярных) многочленов. Так, если $f(x) = g(x) \pm h(x)$, то $f(A) = g(A) \pm h(A)$; если $f(x) = g(x)h(x)$,

то $f(A) = g(A)h(A) = h(A)g(A)$ (два многочлена от одной и той же матрицы всегда перестановочны между собой в силу перестановочности степеней матрицы).

В качестве примеров приведем выражения многочленов от нильпотентных матриц, рассмотренных в (6). Для матриц пятого порядка имеем:

$$f(H) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & & a_0 & a_1 & a_2 \\ \hline & & & a_0 & a_1 \\ \hline & & & & a_0 \\ \hline\end{array}\,; \quad f(F) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_0 & & & & \\ \hline a_1 & a_0 & & & \\ \hline a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \hline a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline\end{array}\,.$$

Аналогичные выражения можно записать для нильпотентных матриц любого порядка, причем они справедливы для любой степени матричного многочлена.

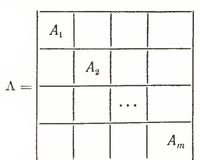
8. Прямая сумма квадратных матриц. Эта операция ставит в соответствие двум матрицам A и B порядков m и n квадратную матрицу C порядка $m + n$ и обозначается $A \oplus B$. Она сводится к присоединению правого нижнего угла матрицы A к левому верхнему углу матрицы B и заполнению остальных клеток таблицы размера $(m + n) \times (m + n)$ нулями, т. е.:

$$C = A \oplus B = \begin{array}{|c|c|}\hline A & \\ \hline & B \\ \hline\end{array}\,.$$

Элементы *прямой суммы* определяются соотношениями: $c_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, $c_{m+i,\, m+j} = b_{ij}$ $(i, \; j = 1, 2, \ldots, n)$ и $c_{ij} = 0$ для остальных элементов. Ясно, что эта операция не коммутативна, но ассоциативна. Она распространяется на любое количество матриц $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 = (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3$ и т. д., причем порядок результирующей матрицы равен сумме порядков исходных матриц.

Если A_i — матрицы первого порядка, отождествляемые со скалярами a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то их прямая сумма равна диагональной матрице m-го порядка $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. В общем случае прямая сумма матриц A_i произвольных порядков образует квази-

диагональную матрицу $\Lambda = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$, т. е.



9. Кронекерово произведение прямоугольных матриц. Эта операция может выполняться над прямоугольными матрицами любых размеров. *Кронекерово (прямое, тензорное) произведение* $(m \times n)$-матрицы A на $(p \times q)$-матрицу B обозначается $A \otimes B$ и выражается матрицей размера $(mp \times nq)$:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что при существовании обычных матричных произведений AC и BD справедливо соотношение: $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$. Имеют место также следующие свойства кронекерового произведения:

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t; \quad (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

10. Произведения векторов. *Скалярное произведение* комплексных n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ можно выразить как произведение строки на столбец

$$\langle x, y \rangle = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \cdots \\ y_n^* \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \cdots + x_n y_n^* = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*,$$

где y_i^* — комплексно-сопряженное y_i. Отсюда следует также соотношение:

$$[x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, \ y^* \rangle.$$

Рассматривая строки и столбцы как векторы, произведения матриц в соответствии с (4) можно представить в виде:

$$AB = \begin{bmatrix} \langle a_{(1)}, \ b^{(1)*} \rangle & \langle a_{(1)}, \ b^{(2)*} \rangle & \cdots & \langle a_{(1)}, \ b^{(r)*} \rangle \\ \langle a_{(2)}, \ b^{(1)*} \rangle & \langle a_{(2)}, \ b^{(2)*} \rangle & \cdots & \langle a_{(2)}, \ b^{(r)*} \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle a_{(m)}, \ b^{(1)*} \rangle & \langle a_{(m)}, \ b^{(2)*} \rangle & \cdots & \langle a_{(m)}, \ b^{(r)*} \rangle \end{bmatrix},$$

причем общий элемент матрицы $C = AB$ выражается как $c_{ij} = \langle a_{(i)}, \ b^{(j)*} \rangle$.

Кроме скалярного (внутреннего) произведения, вводится также понятие *внешнего произведения векторов* x и y, которое обозначается $\{x, \ y\}$ и соответствует умножению столбца на строку:

$$\{x, \ y\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix} [y_1^*, \ y_2^*, \ \ldots, \ y_r^*] = \begin{bmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* & \cdots & x_1 y_r^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* & \cdots & x_2 y_r^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m y_1^* & x_m y_2^* & \cdots & x_m y_r^* \end{bmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что скалярное произведение определяется как операция над векторами одинаковой размерности, результатом которой является число (скаляр). Внешнее произведение допускает различные размерности векторов (m и r), а его результат — матрица размера ($m \times r$).

Произведение ($m \times n$)-матрицы A на ($n \times r$)-матрицу B выражается через внешние произведения столбцов первой матрицы и строк второй следующим образом:

$$AB = \sum_{s=1}^{n} \{a^{(s)}, \ b_{(s)}^*\}.$$

11. Дифференцирование и интегрирование матриц. Часто, например при рассмотрении дифференциальных уравнений в матричной форме, приходится иметь дело с матрицами, элементами которых являются не числа, а функции от скалярного аргумента (времени t или любой другой переменной). Дифференцирование и интегрирование таких матриц сводится к правилам, аналогичным обычным правилам дифференцирования и интегрирования с одним существен-

ным отличием. Так как произведение матриц в общем случае некоммутативно, то необходимо следить за сохранением первоначального порядка следования сомножителей.

Пусть матрица $X(t)$ размера $m \times n$ имеет своими элементами дифференцируемые функции $x_{ij}(t)$ скалярного аргумента t. *Производная матрицы* $X(t)$ по переменной t определяется как

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_{11}(t)}{dt} & \frac{dx_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{dx_{21}(t)}{dt} & \frac{dx_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_{n1}(t)}{dt} & \frac{dx_{n2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_{nn}(t)}{dt} \end{bmatrix},$$

т. е. дифференцирование матрицы сводится к дифференцированию всех ее элементов по той же переменной. Имеют место также соотношения:

$$\frac{d}{dt}(X+Y) = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt};$$
$$\frac{d}{dt}(XY) = \frac{dX}{dt}Y + X\frac{dY}{dt}.$$

Если в первом из приведенных соотношений порядок следования матриц и их производных безразличен, то во втором он должен быть строго выдержан.

Если матрица $X(t)$ — дифференцируема и имеет обратную $X^{-1}(t)$, то *производная от обратной матрицы* определяется соотношением:

$$\frac{d}{dt}[X^{-1}(t)] = -X^{-1}(t)\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t).$$

Действительно, так как $X(t)X^{-1}(t) = E$, то после дифференцирования с учетом того, что производная единичной матрицы равна нулевой матрице, имеем

$$\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t) + X(t)\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = 0,$$

откуда

$$X(t)\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t).$$

Умножая обе части равенства слева на $X^{-1}(t)$, получаем приведенное выше соотношение для производной обратной матрицы. Пример:

$$X=\begin{bmatrix} t+1 & t^2 \\ 1 & t-1 \end{bmatrix}; \quad X^{-1}=\begin{bmatrix} -t+1 & t^2 \\ 1 & -t-1 \end{bmatrix}; \quad \frac{dX^{-1}}{dt}=\begin{bmatrix} -1 & 2t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

По формулам дифференцирования обратной матрицы получаем тот же результат:

$$\frac{dX^{-1}}{dt}=-\begin{bmatrix} -t+1 & t^2 \\ 1 & -t-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -t+1 & t^2 \\ 1 & -t-1 \end{bmatrix}= \\ =\begin{bmatrix} -1 & 2t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Интеграл от матрицы $X(t)$ определяется как матрица, элементы которой равны интегралам от соответствующих элементов исходной матрицы, т. е.

$$\int X(t)\,dt=\begin{bmatrix} \int x_{11}(t)\,dt & \int x_{12}(t)\,dt & \dots & \int x_{1n}(t)\,dt \\ \int x_{21}(t)\,dt & \int x_{22}(t)\,dt & \dots & \int x_{2n}(t)\,dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int x_{n1}(t)\,dt & \int x_{n2}(t)\,dt & \dots & \int x_{nn}(t)\,dt \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразить $(m \times n)$-матрицы A и B через базис линейного пространства I_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Показать, что в линейной алгебре квадратных матриц n-го порядка нейтральными элементами относительно сложения и умножения являются соответственно нулевая и единичная матрицы того же порядка.

3. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad D=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

а) Выполнить следующие действия (если они допустимы): $A - 2B$; $B - (2D + B) + D$; $2C + A$; $C - B + 2D$.

б) Определить матрицу X из уравнений: $6X = B$; $A + X = C$; $D - 2X = 3B$.

4. Найти произведение $ABCD$ матриц:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 4\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -2\end{bmatrix};\quad C=[-1\ 2\ 1];\quad D=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

а) умножением слева;
б) умножением справа;
в) наиболее рациональным комбинированием сомножителей.

5. Найти произведение AB матриц:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

а) умножением строк на столбцы;
б) умножением столбцов на строки.

6. Определите вторую строку и третий столбец произведения матриц из задачи 5 по формулам:

$$c_{(i)}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{(s)};\quad c^{(j)}=\sum_{s=1}^{n} a^{(s)}b_{sj}.$$

7. Найти произведение матрицы A на матрицу B слева и справа алгебраическим суммированием строк и столбцов матрицы A, если

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 5 & 3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

8. Каким операциям над строками и столбцами квадратной матрицы третьего порядка соответствует умножение ее слева и справа на матрицы:

а) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & 0 & 1\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

9. Найти внутренние и внешние произведения векторов x и y:
а) $x=(2, 0, -3, 5)$; $y=(4, 1, 2, -1)$;
б) $x=(2-3i,\ 1+2i,\ 2)$; $y=(1+i,\ 1-2i,\ 3+2i)$.

10. Вычислить степени следующих матриц:

а) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}^3$; б) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}^3$; в) $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^n$.

11. Вычислить многочлены $f(A)=A^2+3A+E$ и $g(A)=A^3-2A^2+A-3E$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

12. Найти сумму и произведение многочленов $f(A)$ и $g(A)$ из задачи 11 двумя способами:

а) на основе результатов, полученных в задаче 11;

б) путем операций над многочленами и последующим определением результирующей матрицы.

13. Найти произведение квадратных матриц n-го порядка W_1, W_2, ..., W_n, если матрица W_k $(k = 1, 2, ..., n)$ имеет вид:

$$W_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & a_{kk} & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & a_{kk} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Представить матрицу

10	—1			
4	2			
		—3		
			5	
			1	—21

в квазидиагональной форме и выразить ее через прямую сумму диагональных блоков. Единственно ли решение?

15. Определить кронекерово произведение $A \otimes B$ матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

16. Выполнить дифференцирование и интегрирование матриц:

а) $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2t-2 & t+2 & -2 \\ 3t^2+2t-1 & t^3 & 2t \end{bmatrix}$;

б) $\displaystyle\int_0^t \begin{bmatrix} \cos t & t^2 \\ 1 & \operatorname{th} t \end{bmatrix} dt.$

17. Найти производную по t произведения матриц X и Y

$$X = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} \cos t & \cos\alpha \\ \sin t & \sin\alpha \end{bmatrix}:$$

а) по формуле дифференцирования произведения матриц;

б) путем перемножения матриц с последующим дифференцированием результата.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Определитель матрицы. Понятие определителя (детерминанта) возникло в связи с решением систем линейных уравнений и благодаря ему эта задача получила компактное выражение, например, в виде правила Крамера (1. 3. 9). Представление таких систем в матричной форме $Ax = q$ естественным образом связывает квадратную матрицу A с ее определителем $\det A$ (или $|A|$). Общее выражение для определителя матрицы n-го порядка обычно дается в виде:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^{\varepsilon} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}.$$

В правой части стоит сумма произведений вида $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$. Каждое такое произведение по определению должно содержать элементы матрицы a_{ij}, расположенные в различных строках и различных столбцах. Это значит, что среди всех первых индексов, как и среди всех вторых индексов не должно быть одинаковых. Если расположить первые индексы в порядке их возрастания, как это сделано выше, то совокупность вторых индексов образует некоторую перестановку $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ множества чисел от 1 до n. Иначе говоря, каждое произведение под знаком суммы определяется подстановкой n-й степени:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Рис. 70. Схемы вычисления определений второго и третьего порядков.

Так как число всех подстановок n-й степени равно $n!$, то можно образовать такое же количество произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ из элементов данной матрицы (при нулевых элементах некоторые из них равняются нулю). Определитель равен сумме всех таких произведений, взятых со знаком $(-1)^{\varepsilon}$, где ε — число инверсий (2.3.9) перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Вместо множителя $(-1)^{\varepsilon}$ можно писать знак подстановки $\operatorname{sgn}\sigma$, который положительный для четной и отрицательный для нечетной подстановки σ.

Порядок определителя совпадает с порядком его матрицы. Элементы a_{ij} матрицы A называют также *элементами определителя* $|\mathbf{A}|$, а произведения $(-1)^{\varepsilon} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ — *членами определителя.*

Для определителей второго и третьего порядка получаем выражения, которые совпадают с хорошо известными схемами вычисления этих определителей (рис. 70):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Как видно, индексы столбцов всех членов определителя третьего порядка определяются перестановками (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3), число инверсий которых равно соответственно 0, 2, 2, 3, 1, 1.

Общее выражение определителя n-го порядка является удобным для исследования и доказательства его свойств, но для вычисления определителей используются другие более практичные соотношения и методы.

2. Граф матрицы. Квадратной матрице n-го порядка можно поставить в соответствие направленный граф, который строится на множестве n вершин. При этом ij-элементу матрицы соответствует

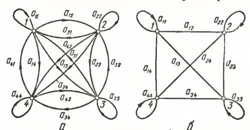
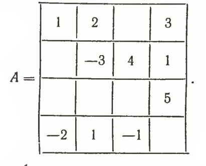


Рис. 71. Граф матрицы (*а*) и граф симметричной матрицы (*б*).

дуга, выходящая из i-й вершины и входящая в j-ю, и этой дуге приписывается вес, равный значению a_{ij} элемента. Каждая пара вершин такого графа связана двумя дугами в прямом и обратном направлениях, которые отображают элементы a_{ij} и a_{ji}, а петли соответствуют элементам a_{ii} ($i = 1, 2, ..., n$) главной диагонали (рис. 71, *а*).

Граф можно упростить, если условиться симметричные и равные элементы $a_{ij} = a_{ji}$ изображать одной дугой без указания ее направления, которая заменяет две противоположно направленные дуги (граф симметричной матрицы показан на рис. 71, *б*). Дальнейшее упрощение достигается, если дуги нулевых элементов на графе

не изображать (но наличие их обязательно подразумевается). Например, граф на рис. 72, *а* соответствует матрице:

$A =$ 

1	2		3
	−3	4	1
			5
−2	1	−1	

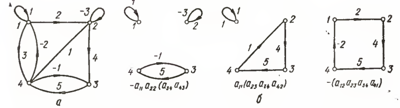


Рис. 72. Граф матрицы четвертого порядка (*а*) и его факторы (*б*).

Граф матрицы позволяет наглядно представить выражение для ее определителя. В рассматриваемом примере из $4! = 16$ членов определителя $|A|$ ненулевых только три, которые определяются подстановками:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановки σ_1 и σ_3 нечетные, а σ_2 четная, следовательно, имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = 85.$$

Разложив подстановку на независимые циклы и построив ее граф (2. 3. 10), замечаем, что соответствующий член определителя равен произведению весов всех дуг графа подстановки, а его знак определяется четностью декремента (разности между степенью и количеством независимых циклов подстановки). Так, для данного

примера $\sigma_1 = (1)(2)(3, 4)$; $\sigma_2 = (1)(2, 3, 4)$; $\sigma_3 = (1, 2, 3, 4)$ и соответственно декременты $d_1 = 4 - 3 = 1$; $d_2 = 4 - 2 = 2$ и $d_3 = 4 - 1 = 3$. Взвешенные графы подстановок изображены на рис. 72, *б*. Каждый из них представляет собой совокупность несоприкасающихся контуров и петель, инцидентную всем вершинам, и определяет соответствующий член определителя.

Совокупность всех ненулевых членов определителя можно получить из графа матрицы, выделяя всевозможные подграфы, которые включают все вершины и состоят исключительно из несоприкасающихся контуров и петель. Такие подграфы называют *факторами* графа. Произведение весов дуг фактора графа дает соответствующий член определителя, а четность разности между числом вершин (порядком матрицы) и числом контуров (циклов подстановки) фактора определяет знак этого члена.

3. Основные свойства определителей. Прежде всего отметим, что $\det A = \det A^t$, т. е. определитель матрицы не изменяет своего значения при взаимной замене ее строк и столбцов. Поэтому все свойства определителя, сформулированные для столбцов, справедливы и для строк, и обратно. Ниже приводятся основные свойства определителей, которые легко доказываются на основе общего выражения (1).

1. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак *(свойство антисимметрии)*.

2. Определитель равен нулю, если все элементы какого-нибудь столбца равны нулю или если один из столбцов является линейной комбинацией любых его других столбцов (в частности, определитель, у которого хотя бы два столбца одинаковы, равен нулю).

3. Умножение всех элементов какого-нибудь столбца на скаляр λ равнозначно умножению определителя на λ (общий множитель элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя).

4. Умножение матрицы n-го порядка на скаляр λ соответствует умножению ее определителя на λ^n, т. е. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

5. Значение определителя не изменится, если к какому-нибудь столбцу прибавить другой столбец, умноженный на скаляр λ.

6. Если два определителя одинаковых порядков различаются между собой только элементами i-го столбца, то их сумма равна определителю, элементы i-го столбца которого равны суммам соответствующих элементов i-х столбцов исходных определителей, а остальные элементы те же, что у исходных *(свойство линейности)*.

4. Миноры и алгебраические дополнения. Пусть в определителе n-го порядка Δ выделены k различных строк ($k \leqslant n$) с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столько же различных столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Элементы, расположенные на пересечении этих строк

и столбцов, образуют определитель, который называется *минором* *k-го порядка* и обозначается

$$M_k = M\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_k \\ j_1, & \dots, & j_k \end{pmatrix}.$$

Если удалить из определителя строки и столбцы, участвующие в построении минора M_k, то оставшиеся элементы образуют определитель $(n-k)$-го порядка, который называется *дополнительным минором* к M_k и обозначается

$$\overline{M}_k = \overline{M}\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_k \\ j_1, & \dots, & j_k \end{pmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением минора k-го порядка M_k называют величину $A_k = (-1)^\sigma \overline{M}_k$, где $\sigma = (i_1 + i_2 + \dots + i_k) + (j_1 + j_2 + \dots + j_k)$ — сумма номеров строк и столбцов, определяющих минор M_k. В частности, миноры первого порядка совпадают с элементами определителя, поэтому алгебраические дополнения A_1 первого порядка называют также алгебраическими дополнениями элементов определителя или матрицы (1. 3. 9). При этом $\Delta_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}\ \overline{M}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$. Дополнительный минор $(n-1)$-го порядка $\overline{M}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ часто называют просто *минором* и обозначают M_{ij}.

Минор нулевого порядка считается равным единице, т. е. $M_0 = 1$, при этом дополнительный к нему минор и алгебраическое дополнение совпадают с определителем Δ. Минор n-го порядка M_n совпадает с определителем Δ, в то время как дополнительный к нему минор и алгебраическое дополнение считаются равными единице. Сказанное выражается соотношениями: $M_n = \overline{M}_0 = A_0 = \Delta$; $M_0 = \overline{M}_n = A_n = 1$.

Миноры, образованные строками и столбцами с одинаковыми номерами, называют *главными* (их диагональные элементы являются и диагональными элементами определителя). Очевидно, определитель n-го порядка имеет C_n^m главных миноров m-го порядка, а всего 2^n главных миноров всех возможных порядков (от 0 до n).

Если речь идет об определителе матрицы A, то его миноры k-го порядка обозначают:

$$M_k = A\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_k \\ j_1, & \dots, & j_k \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется две или несколько матриц $A_1, A_2, \dots, A_m$ одинаковых порядков. Будем называть миноры k-го порядка этих

матриц $M_k^{A_1}, M_k^{A_2}, \ldots, M_k^{A_m}$ *взаимно соответственными*, если они образованы из данных определителей выделением строк и столбцов с одними и теми же номерами в каждой матрице. Ясно, что миноры $\overline{M}_k^{A_1}, \overline{M}_k^{A_2}, \ldots, \overline{M}_k^{A_m}$, дополнительные к взаимно соответственным, также являются взаимно соответственными.

5. Разложение определителя. Определитель Δ n-го порядка выражается через элементы произвольной его строки или столбца следующим образом:

$$\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \Delta_{is} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} \Delta_{si} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где Δ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (1. 3. 9). Эти соотношения позволяют представить определитель n-го порядка через определители $(n-1)$-го порядка. При вычислениях целесообразно разлагать определитель по строке или столбцу, которые имеют большее количество нулевых элементов. Например, разлагая данный определитель по элементам второго столбца, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определители третьего порядка, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-9)(-4(-7) + 1(-17) = -34.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2(-17) - 2 \cdot 17 = 0.$$

Второй определитель оказался равным нулю, так как его третий столбец равен сумме первого и второго (свойство 2). Таким образом, находим $\Delta = -3(-34) + 6 \cdot 0 = 102$.

Обобщением изложенного метода является *разложение Лапласа* по нескольким строкам или столбцам. Пусть заданы любые k строк (или столбцов) определителя Δ. Тогда этот определитель можно представить как сумму произведений всевозможных миноров k-го порядка, расположенных в этих строках (или столбцах) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \Sigma M_k A_k = \Sigma (-1)^{\sigma} M_k \bar{M}_k,$$

где σ — сумма номеров строк и столбцов, участвующих в формировании минора M_k (или $\bar{M}_k$). Очевидно, число слагаемых в этой сумме равно C_n^k (некоторые из них могут равняться нулю). Например, разлагая приведенный выше определитель по первому и второму столбцам, имеем:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -15(-9) -$$

$$-(-12) - (-7) + (-15)(-17) + 0 \cdot 2 - 30 \cdot 10 + 24 \cdot 4 = 102.$$

Приведенные соотношения редко используются непосредственно для вычисления определителей, но они чрезвычайно полезны при обосновании различных методов. Приведем также выражение, обобщающее разложение по элементам строки или столбца:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i_s} \Delta_{js} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} \Delta_{sj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

6. Вычисление определителей. Разложение определителя по элементам строки или столбца проще всего, когда в этой строке или столбце имеется единственный ненулевой элемент. Тогда определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение. К такому виду можно преобразовать определитель путем операций над его строками или столбцами, используя основные свойства (3).

Процесс вычисления иллюстрируется следующим примером:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \begin{vmatrix} \frac{17}{5} & \frac{17}{5} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \cdot \frac{17}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 102.$$

Здесь сначала первая строка, умноженная на (—2), прибавляется к последней строке, в результате чего второй столбец содержит только один ненулевой элемент. Разложение по этому столбцу

приводит к определителю третьего порядка. Прибавляя ко второй и третьей строкам первую, умноженную соответственно на $-\frac{4}{5}$ и -1, получаем столбец с единственным ненулевым элементом. Теперь разлагаем определитель по первому столбцу и сводим его к определителю второго порядка. Так как элементы первой строки оказались равными, выносим за знак определителя множитель $\frac{17}{5}$ и, раскрывая определитель второго порядка, получаем окончательный результат $\Delta = 102$.

Наиболее просто вычисляется определитель треугольной или диагональной матрицы: он равен произведению диагональных элементов. Это следует из разложения по элементам столбцов (строк) определителя верхней (нижней) треугольной матрицы (в случае диагональной матрицы разложение можно выполнять по элементам строк или столбцов). Значения определителей треугольных матриц не зависят от элементов, расположенных вне главной диагонали. Примеры:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 5\cdot 2 = 20; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 5\cdot 2 = 20.$$

С помощью разложения Лапласа можно также показать, что определитель квазидиагональной матрицы равен произведению определителей квадратных матриц, расположенных вдоль главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & A_m \end{vmatrix} = |A_1|\,|A_2| \ \ldots \ |A_m|.$$

Действительно, разлагая определитель по элементам строк матрицы A_1, получаем единственный ненулевой минор, совпадающий с $|A_1|$, и т. д. Пример:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 17(-2) = -34.$$

7. Схема единственного деления. При ручном счете можно использовать особенности конкретного определителя для упрощения

процесса вычисления. Для вычислительных машин более подходящими являются стандартные процедуры. Одна из них *(схема единственного деления)* основана на последовательном преобразовании элементов определителя по *ведущим (опорным) элементам*.

На первом шаге ведущий элемент a_{11} выносится в качестве общего множителя из первой строки (все элементы первой строки делятся на a_{11}). Затем из каждой строки вычитается первая строка, умноженная на первый элемент данной строки. В результате получаем

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{2n}-a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}-a_{n1}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{nn}-a_{n1}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix}.$$

Разлагая по элементам первого столбца, получаем произведение a_{11} на определитель $(n-1)$-го порядка, элементы которого выражаются соотношением:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}\, a_{1j}}{a_{11}} \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n).$$

Затем в полученном определителе выбираем в качестве ведущего элемента a'_{22} и поступаем аналогично. На k-м шаге образуется произведение $a_{11}a'_{22}\ldots a^{(k-1)}_{kk}$ и определитель $(n-k)$-го порядка с элементами

$$a^{(k)}_{ij} = a^{(k-1)}_{ij} - \frac{a^{(k-1)}_{ik}\, a^{(k-1)}_{kj}}{a^{(k-1)}_{kk}} \quad (i, j = k+1, \ldots, n).$$

Процедура заканчивается за n шагов, причем искомое значение определителя равно произведению ведущих элементов: $\Delta = a_{11}a'_{22}a''_{33}\ldots a^{(n-1)}_{nn}$. Рассмотренная схема иллюстрируется примером:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & \frac{15}{2} & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \frac{15}{2} & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ \frac{15}{2} & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot\frac{15}{2}\begin{vmatrix}1 & \frac{4}{15} & \frac{4}{15}\\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5}\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = -2\cdot\frac{15}{2}\begin{vmatrix}\frac{17}{5} & \frac{17}{5}\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2\cdot\frac{15}{2}\,\frac{17}{5}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{5}\cdot(-2) = 102.$$

Схему единственного деления в равной степени можно реализовать путем соответствующих операций над столбцами, что равносильно работе с транспонированным определителем. Если на каком-либо шаге $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ (или близко к нулю), то перестановкой строк и столбцов можно избежать этой ситуации, препятствующей осуществлению схемы (или снижающей точность вычислений). Вообще рекомендуется на каждом шаге переводить в левый верхний угол (перестановкой строк и столбцов) наибольший по абсолютной величине элемент, выбирая его в качестве ведущего.

8. Метод опорного элемента. Одной из разновидностей схемы единственного деления является так называемый *метод опорного элемента*, позволяющий свести определитель n-го порядка к определителю $(n-1)$-го порядка, элементы которого выражены как миноры второго порядка. Пусть в качестве опорного выбран элемент a_{rs}. Делением элементов r-й строки на a_{rs} преобразуем (rs)-элемент к единице. Далее операциями над строками определителя, как в схеме единственного деления, образуем все элементы s-го столбца, кроме (rs)-элемента, в нули. При этом элементы определителя (за исключением элементов r-й строки и s-го столбца) выражаются следующим образом:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}\,a_{is}}{a_{rs}} = \frac{1}{a_{rs}}\begin{vmatrix}a_{rs} & a_{rj}\\ a_{is} & a_{ij}\end{vmatrix} = \frac{1}{a_{rs}}\,M\begin{pmatrix}r, & i\\ s, & j\end{pmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам s-го столбца, получаем $\Delta = (-1)^{r+s}\,M_{rs}$, где M_{rs} — дополнительный минор к (rs)-элементу, т. е. определитель $(n-1)$-го порядка с элементами a'_{ij} $(i \neq r,$ $j \neq s)$. Каждый такой элемент является минором второго порядка, образованным из элементов определителя Δ, расположенных на пересечении строк r, i и столбцов s, j. При $i > r$ и $j > s$ сохраняется естественный порядок элементов минора. Для сохранения такого же порядка при $r > i$ и $s > j$ необходимо поменять знаки всех миноров, лежащих выше r-й строки и левее s-го столбца (рис. 73, *а*). Это значит, что определитель меняет знак $(r-1) + (s-1)$ раз, что должно быть скомпенсировано множителем $(-1)^{r+s-2} = (-1)^{r+s}$.

Таким образом, при сохранении естественного расположения элементов определителя Δ в минорах второго порядка $\Delta = a_{rs}M_{rs}$. Вынесем из каждой строки M_{rs} общий элемент $\frac{1}{a_{rs}}$. Тогда за счет всех $(n-1)$ строк перед определителем $(n-1)$-го порядка

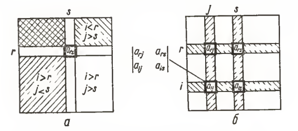


Рис. 73. Метод опорного элемента:
а — опорный элемент; *б* — замещение элемента определителя минором второго порядка.

появится множитель $\frac{1}{(a_{rs})^{n-1}}$, и в результате получаем разложение определителя Δ относительно опорного элемента a_{rs}:

$$\Delta = \frac{1}{(a_{rs})^{n-2}}\Delta'.$$

Здесь Δ' — определитель $(n-1)$-го порядка, элементами которого являются миноры второго порядка. В соответствии с изложенным выше Δ' образуется из Δ замещением в последнем каждого элемента a_{ij} $(i \neq r,\ j \neq s)$ минором, образованным из элементов пересечения строк r, i и столбцов s, j, сохраняя порядок их следования в исходном определителе (рис. 73, *б*). Так, для нашего примера, выбирая $a_{41} = 1$ в качестве опорного элемента, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -15 & -6 & -2 \\ 30 & 13 & 3 \\ 24 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Приняв за опорный элемент в полученном определителе $a_{33} = -1$, найдем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -15 & -6 & -2 \\ 30 & 13 & 3 \\ 24 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 24 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 30 & 3 \\ 24 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = - \begin{vmatrix} 63 & 20 \\ -102 & -34 \end{vmatrix} = 102.$$

9. Определитель суммы матриц. Пусть требуется найти определитель суммы $C = A + B$ двух квадратных матриц n-го порядка. Представим определитель этой суммы через столбцы слагаемых матриц

$$\Delta = | c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(n)} | = | a^{(1)} + b^{(1)}, a^{(2)} + b^{(2)}, \ldots, a^{(n)} + b^{(n)} |.$$

В соответствии со свойством линейности определителя относительно столбцов (3) запишем

$$\Delta = | a^{(1)} + b^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(n)} | = | a^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(n)} | + | b^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(n)} |.$$

Применяя это свойство относительно вторых столбцов полученных определителей, имеем

$$\Delta = | a^{(1)}, a^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, c^{(n)} | + | a^{(1)}, b^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, c^{(n)} | + | b^{(1)}, a^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, c^{(n)} | + | b^{(1)}, b^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, c^{(n)} |.$$

Продолжая этот процесс до последних столбцов включительно, получаем разложение в сумму, которая содержит определители слагаемых матриц $\det A$ и $\det B$, а также определители, образованные из столбцов матриц A и B всеми возможными сочетаниями, причем столбцы в таких определителях занимают те же места, которые они занимали в матрицах A и B. Это можно выразить соотношением

$$\det (A + B) = \det A + \sum \Delta (1) + \sum \Delta (2) + \cdots + \sum \Delta (n - 1) + \det B,$$

где $\Delta(s)$ — определитель, полученный замещением s столбцов определителя первой матрицы соответствующими столбцами второй матрицы. Знаки сумм означают, что суммируются определители для всевозможных сочетаний s замещаемых столбцов. Так как $\det A = \Delta(0)$ и $\det B = \Delta(n)$, то можно предложить более краткую запись

$$\det (A + B) = \det A + \sum_{s=1}^{n-1} \sum \Delta (s) + \det B = \sum_{s=0}^{n} \sum \Delta (s).$$

Воспользовавшись разложением Лапласа (5) для определителей $\Delta(s)$ по s замещенным столбцам, получим другое выражение для определителя суммы двух матриц

$$\det(A+B)=\sum_{s=0}^{n}\sum(-1)^{\sigma}M_s^B\bar{M}_s^A.$$

В силу коммутативности сложения матриц безразлично, какую из матриц A и B считать первой и какую — второй. Полученные разложения из-за своей сложности непригодны для практических вычислений определителей, но они могут быть полезны при доказательствах различных соотношений. В частности, они позволяют выразить вещественную и мнимую части определителя комплексной матрицы

$$\det(A)=\det(A'+iA'')+\Delta'+i\Delta'';$$

$$\Delta'=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum\Delta(2k);\quad \Delta''=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum\Delta(2k+1),$$

где $m=\frac{1}{2}n$ — для четных n; $m=\frac{1}{2}(n-1)$ — для нечетных n. Применим эти формулы для вычисления определителя комплексной матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2i & 5 & 3-4i\\ 4+2i & 1+i & i\\ 3 & -1+2i & 2-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Для вещественной и мнимой частей определителя $\det A$ имеем:

$$\Delta'=\begin{vmatrix}0 & 5 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 5 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & 0 & -4\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=-61-16-18+20=-75;$$

$$\Delta''=\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 5 & -4\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=-22+15+63+22=78.$$

Таким образом, $\det A=-75+78\ i$, что можно проверить непосредственным вычислением определителя.

Разложение определителя суммы двух матриц можно обобщить для любого количества квадратных матриц одного и того же порядка. Так, для трех матриц имеем:

$$\det(A+B+C)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-s}\sum\Delta(s,k),$$

где через $\Delta(s, k)$ обозначены определители, образованные всеми возможными замещениями столбцов определителя первой матрицы s столбцами второй матрицы и k столбцами третьей матрицы.

10. Определитель произведения матриц. Можно показать, что определитель произведения двух квадратных матриц A и B одинаковых порядков равен n произведению их определителей, т. е. $\det(AB) = \det A \det B$. Для этого рассмотрим матрицу порядка $2n$

$$D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -E_n & B \end{bmatrix},$$

где E_n — единичная матрица.

Применяя разложение Лапласа по первым n строкам определителя этой матрицы, имеем $|D| = |A||B|$. Представим определитель $|D|$ в виде:

$$|D| = \left|\begin{array}{cccc|c} a^{(1)}, & a^{(2)}, & \cdots, & a^{(n)} & 0 \\ \hline -1 & & \cdots & & b_{(1)} \\ & -1 & \cdots & & b_{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & -1 & b_{(n)} \end{array}\right|,$$

где $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ — столбцы матрицы A; $b_{(1)}, b_{(2)}, \ldots, b_{(n)}$ — строки матрицы B; 0 — нулевая матрица n-го порядка.

Преобразуем определитель $|D|$ к такому виду, чтобы на месте элементов b_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ были нули. Для этого первый столбец умножим на элементы строки $b_{(1)}$ и прибавим его к соответствующим $(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$ столбцам. Аналогично поступим со вторым, третьим и т. д. до n-го включительно столбцами. В результате получим:

$$|D| = \left|\begin{array}{cccc|c} a^{(1)}, & a^{(2)}, & \cdots, & a^{(n)} & \sum\limits_{s=1}^{n} a^{(s)} b_{(s)} \\ \hline -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \cdots & & 0 \\ & & & -1 & \end{array}\right| = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & 0 \end{vmatrix},$$

где сумма в правом верхнем углу заменена произведением AB в соответствии с (1. 4).

На основе разложения Лапласа по первым n строкам находим, что $|D| = |AB|$. Таким образом, $|AB| = |A||B|$ или $\det(AB) = \det A \det B$, что и требовалось доказать.

Естественным обобщением этого результата является *теорема Бине—Коши* об определителе произведения AB двух прямоугольных матриц размера $(m \times n)$ и $(n \times m)$:

$$\det(AB) = \sum A\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_m \\ 1, & 2, & \dots, & m\end{pmatrix},$$

где сумма означает, что суммируются произведения всевозможных миноров m-го порядка матрицы A, образованные m ее столбцами с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, на миноры матрицы B, образованные ее строками с теми же номерами. В других обозначениях эту теорему можно записать следующим образом:

$$|AB| = \sum |a^{(\alpha_1)}, \ a^{(\alpha_2)}, \ \dots, \ a^{(\alpha_m)}| \begin{vmatrix} b_{(\alpha_1)} \\ b_{(\alpha_2)} \\ \dots \\ b_{(\alpha_m)} \end{vmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — всевозможные сочетания из n номеров, расположенные в порядке их следования.

При $m > n$ полагают $|AB| = 0$, а при $m = n$ имеем рассмотренный выше частный случай произведения квадратных матриц.

Из соотношения $\det(AB) = \det A \det B$ следует, что определители можно умножать по правилам умножения матриц.

Пример:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$AB = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 5 & 2\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 5 & 1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 4\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot 5 & 0\cdot 4 + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 10 & 15 & 6 \\ 3 & 21 & 4 \end{vmatrix} = 1155;$$

$$|A| = 21; \quad |B| = 55; \quad |AB| = |A|\,|B| = 1155.$$

В заключение отметим, что $|A \oplus B| = |A|\,|B|$ и $|A \otimes B| = |A|^q |B|^p$, где q — порядок матрицы B и p — порядок матрицы A.

11. Дифференцирование определителей. Если элементы определителя представляют собой некоторые функции переменной x, то такой определитель можно дифференцировать по этой же переменной. При этом каждый член в разложении (1) запишется как сумма n слагаемых, которые получаются заменой в данном члене одного из элементов его производной. Сгруппировав члены, которые содержат производные первых, вторых и, вообще, j-х элементов, получим n групп слагаемых.

Каждая из этих групп соответствует определителю, который получается из исходного заменой в нем элементов j-го столбца производными этих элементов. Сумма n таких определителей при $j = 1, 2, \ldots, n$ и будет равна производной данного определителя. Ясно, что тот же результат можно сформулировать для строк:

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Продифференцируем, например, определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \sin x & 2 \\ x+2 & \cos x & 3x^2 \\ 1 & e^{2x} & 1+e^x \end{vmatrix}.$$

В соответствии с изложенным правилом получаем

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} 2x & \sin x & 2 \\ 1 & \cos x & 3x \\ 0 & e^{2x} & 1+e^x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & \cos x & 2 \\ x+2 & -\sin x & 3x^2 \\ 1 & 2e^{2x} & 1+e^x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & \sin x & 0 \\ x+2 & \cos x & 6x \\ 1 & e^{2x} & e^x \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите по схемам (см. рис. 70) следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2 \\ x & x^2+2x-1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{vmatrix}$.

2. Вычислите определитель матрицы A, пользуясь только его определением, приведенным в (1):

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Постройте граф матрицы A из задачи 2 и все его факторы. Установите соответствие между факторами и членами определителя, полученными в предыдущей задаче.

4. Вычислите определитель матрицы A из задачи 2, пользуясь общими свойствами, приведенными в (3).

5. Найдите алгебраические дополнения всех элементов матрицы A из задачи 2 и вычислите ее определитель разложением по элементам какой-либо строки и какого-либо столбца. Покажите, что разложения по другим строкам или столбцам приводят к тому же результату.

6. Вычислите определитель матрицы A из задачи 2 с помощью разложения Лапласа по первой и четвертой строкам.

7. Вычислите определитель матрицы A из задачи 2 следующими способами:

а) по схеме единственного деления;

б) методом опорного элемента.

8. Найдите наиболее простой способ вычисления следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 6 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Как изменится определитель n-го порядка, если

а) из его первой строки вычесть вторую, из второй — третью и из третьей строки — первоначальную первую строку ($n \geqslant 3$);

б) первые его k строк расположить в обратном порядке, а также в обратном порядке записать следующие $(n-k)$ строк;

в) каждый его элемент a_{ij} умножить на число ij?

10. С помощью формулы для определителя суммы двух матриц вычислите действительную и мнимую части определителя

$$\begin{vmatrix} 4+5i & 0 & 1 & 3-2i \\ 3 & 1-i & 6 & 7+5i \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 3+2i & 2 & 2+i & 1 \end{vmatrix}$$

и проверьте результат непосредственным вычислением.

11. Представьте в виде многочлена от p с помощью формулы для определителя суммы двух матриц следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} p+5 & 0 & -p & 0 \\ 10 & 2p+4 & -3p & -1 \\ -p & -3p & 5p+7 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

12. Покажите, что $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$ на примере матриц:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

13. Найдите определитель произведения матриц $\det(AB)$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 5\end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ -1 & 5\\ 4 & 0\end{bmatrix}:$$

а) с помощью теоремы Бине—Коши;
б) умножением матриц и последующим вычислением определителя результирующей матрицы.

14. Найдите производную по x определителя

$$\begin{vmatrix}x^2+3 & x+2 & 4\\ x^3 & x^4 & 3x-2\\ x-1 & x^2 & x\end{vmatrix}.$$

15. Покажите справедливость приведенного ниже выражения для определителя n-го порядка

$$\begin{vmatrix}n & -1 & \dots & -1\\ -1 & n & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -1 & \dots & n\end{vmatrix}=(n+1)^{n-1}.$$

16. Покажите, что определитель k-го порядка вида

$$D_k=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3\end{vmatrix}$$

можно представить рекуррентным соотношением $D_k = 3D_{k-1} - 2D_{k-2}$. Приняв $D_1 = 3$, вычислите D_2, D_3 и D_4. Методом индукции докажите, что $D_k = 2^{k+1} - 1$.

3. ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

1. Обратная и присоединенная матрицы. Значение обратной матрицы столь велико в различных приложениях, что она заслуживает более подробного рассмотрения, чем это сделано в (1. 3. 9). Если матрица A имеет обратную, то эта обратная матрица A^{-1} единственна. Действительно, если предположить, что существует другая такая матрица B, то по определению должно выполняться соотношение $AB = BA = 1$. Умножая равенство $AB = 1$ слева на A^{-1}, получаем $A^{-1}AB = A^{-1}$. Но так как $A^{-1}A = 1$, то $B = A^{-1}$, т. е. A^{-1} — единственна.

Напомним, что обратная матрица существует только для неособенной матрицы, определитель которой не равен нулю. Из изложенной в (1. 3. 9) процедуры вычисления обратной матрицы следуют соотношения:

$$A^{-1}=\frac{A^+}{|A|}; \quad A^+=|A|\,A^{-1}; \quad A^+A=|A|\,E_n,$$

где A^+ — *присоединенная матрица*, элементы которой получаются замещением элементов A^t их алгебраическими дополнениями, т. е.

$$A^+ = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если матрица A симметрична, то присоединенная к ней матрица A^+ и обратная A^{-1} также симметричные. Присоединенная к матрице A обозначается также через $\mathrm{Adj}A$.

2. Свойства обратных матриц. Подытожим изложенные ранее свойства обратных матриц и приведем некоторые другие их свойства.

1. Если существует A^{-1} и B^{-1}, то существует и

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
3. $(A^{-1})' = (A^t)^{-1}$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

6. Если A и B — неособенные матрицы, то $(A \oplus B)^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$, или в другой записи:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Последнее свойство проверяется по правилу умножения блочных матриц:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = E_{2n}.$$

В частности, матрица, обратная диагональной матрице $D = \mathrm{diag}\,[d_1, d_2, \ldots, d_n]$, также диагональная с элементами, обратными элементам исходной, т. е. $D^{-1} = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right]$.

Матрица A, равная своей обратной, называется *инволютивной (взаимно обратной)*, т. е. для нее выполняется условие $A^{-1} = A$, или $AA = A^2 = 1$. В частности, единичная матрица является инволютивной, так как $E_n = E_n^{-1}$. Из соотношения $|A|\,|A| = |A|^2 = 1$ следует, что определитель инволютивной матрицы равен ± 1.

3. Обращение матрицы. Вычислив определитель матрицы и алгебраические дополнения всех ее элементов, можно получить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^+$, где A^+— присоединен-

ная матрица. Однако такой путь слишком громоздкий, так как он требует вычисления определителя n-го порядка и n определителей $(n-1)$-го порядка. Для решения этой задачи разработано много более практичных алгоритмов, один из которых основан на соотношении $AA^{-1} = 1$. Обозначив $A^{-1} = X$, запишем матричное уравнение $AX = 1$ в развернутом виде:

$$A\,[x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(n)}] = [e^{(1)},\ e^{(2)},\ \ldots,\ e^{(n)}],$$

где $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$ — столбцы искомой обратной матрицы; $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n)}$ — столбцы единичной матрицы. Это соотношение равносильно n системам уравнений с n неизвестными (элементами столбцов обратной матрицы):

$$Ax^{(1)} = e^{(1)},\ Ax^{(2)} = e^{(2)},\ \ldots,\ Ax^{(n)} = e^{(n)},$$

решение которых и дает

$$X = [x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(n)}] = A^{-1}.$$

Как видно, объем вычислений оказывается существенно большим, чем при решении одной системы уравнений с n неизвестными. Поэтому использование обратной матрицы для решения уравнения $Ax = b$ как $x = A^{-1}b$ нецелесообразно и лучше в таких случаях пользоваться другими методами, которые рассмотрены в следующем параграфе.

Однако во многих практических задачах требуется многократно решать уравнения $Ax = b^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ с различными свободными членами $b^{(i)}$. Это соответствует матричному уравнению $AY = B$, где Y и B — прямоугольные матрицы размера $n \times m$, причем $B = [b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}]$. Для получения его решения $Y = A^{-1}B$ достаточно один раз вычислить A^{-1} и умножить ее на матрицу B свободных членов. В подобных случаях вычисление обратной матрицы может оказаться целесообразным. Кроме того, иногда по условию задачи требуется получение обратной матрицы в чистом виде. Все это говорит в пользу алгоритмов обращения матриц, хотя некоторые авторы и рекомендуют по возможности избегать этой процедуры.

4. Метод исключения. Уравнение $AX = 1$ можно решить относительно $X = A^{-1}$ преобразованием матрицы A к единичной при условии соблюдения равенства его левой и правой частей. Воспользуемся для этого процедурой, несколько напоминающей схему единственного деления (2. 7). Разделим элементы первой строки матрицы A на a_{11} и прибавим к остальным строкам эту строку, умноженную на $-a_{i1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. В результате получим $a'_{11} = 1$, а остальные элементы первого столбца обратятся в нуль. Далее вторую строку делим на новое значение a'_{22} и прибавляем к осталь-

ным строкам эту строку, умноженную на новые значения a'_{i2} ($i = 1, 3, \ldots, n$). В результате получим $a''_{22} = 1$, а остальные элементы второго столбца равны нулю. Через n таких шагов матрица A преобразуется в единичную матрицу.

На k-м шаге строки матрицы A', полученной на предыдущем шаге, преобразуются следующим образом:

$$a''_{(k)} = \frac{1}{a'_{kk}} a'_{(k)}; \quad a''_{(i)} = a'_{(i)} - \frac{a'_{ik}}{a'_{kk}} a'_{(k)} \; (i = 1, \; \ldots, \; n; \; i \neq k),$$

что можно представить как умножение A' слева на некоторую матрицу V_k того же порядка, т. е. $A'' = V_k A'$. Так как согласно (1.4) $a''_{(i)} = \sum_{s=1}^{n} v_{is} a'_{(s)}$, то сравнивая с приведенными выше соотношениями, находим

$$v_{kk} = \frac{1}{a'_{kk}}, \quad v_{ik} = -\frac{a'_{ik}}{a_{kk}}, \; v_{ii} = 1 \; (i = 1,2, \ldots, n; \; i \neq k),$$

а остальные элементы матрицы V_k равны нулю. Отсюда следует, что матрица V_k, соответствующая преобразованию матрицы A на k-м шаге, имеет вид:

$$V_k = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -\frac{a'_{1k}}{a'_{kk}} & & \\ & \ddots & \cdots & & \\ & & \frac{1}{a'_{kk}} & & \\ & & \cdots & \ddots & \\ & & -\frac{a'_{nk}}{a'_{kk}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, произведение n таких матриц для $k = 1, 2, \ldots, n$ $V = V_1 V_2 \ldots V_k = A^{-1}$ и осуществляет преобразование A к единичной матрице. Чтобы равенство $AX = 1$ не нарушилось при умножении A на V слева, необходимо правую часть также умножить на V, т. е. $VAX = VE_n$. А это значит, что над строками единичной матрицы в правой части уравнения в процессе его преобразования необходимо выполнить те же операции, что и над строками матрицы A. Это удобно реализовать, оперируя над строками расширенной матрицы $[A, 1]$ и выбирая в качестве опорных элементов диагональные элементы матрицы A.

Проиллюстрируем метод исключения на примере обращения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 7 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -1 & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{94}{3} & -4 & -\frac{13}{3} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{47} & -\frac{1}{94} & -\frac{7}{94} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{47} & \frac{1}{47} & \frac{7}{47} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{47} & \frac{13}{94} & -\frac{3}{94} \end{bmatrix}.$$

В итоге получаем обратную матрицу, расположенную в трех последних столбцах. Как побочный результат, имеем также определитель матрицы A, равный произведению тех значений опорных элементов, которые они принимают на соответствующих шагах преобразования матрицы $[A, 1]$ (эти элементы выделены жирным шрифтом):

$$\det A = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{94}{3}\right) = -94.$$

Таким образом, одновременно получаем и присоединенную матрицу:

$$A^{+} = |A| A^{-1} = \begin{bmatrix} -28 & 1 & 7 \\ -38 & -2 & -14 \\ -12 & -13 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Выбор опорных элементов. При реализации метода исключения диагональный элемент на очередном шаге может оказаться равным нулю и его нельзя принять в качестве опорного. Кроме того, очередной диагональный элемент может быть нежелательным в качестве опорного по другим соображениям (например, если он слишком мал, что может привести к снижению надежности результата). Ничто не мешает в подобных случаях организовать процедуру исключения по любой совокупности опорных элементов с единственным ограничением: все они должны находиться в различных строках и различных столбцах матрицы. Иначе говоря, совокупность первых индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и вторых индексов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ опорных элементов $a_{\alpha_i\beta_i}$ образует подстановку из чисел $1, 2, \ldots, n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_n \end{pmatrix}.$$

По окончании преобразования матрицы $[A, 1]$ на месте A получим не единичную матрицу, а некоторую матрицу S, а на месте единич-

ной — матрицу V, т. е. $[S, V]$. В матрице S, называемой *матрицей подстановки*, (α_i, β_i)-элементы равны единице ($i = 1, 2, \ldots, n$), а остальные равны нулю. Она получается из единичной путем перестановки строк (или столбцов) в соответствии с подстановкой σ. Обратно, из S получим единичную матрицу перестановкой строк (или столбцов) в соответствии с обратной подстановкой

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix},$$

которой соответствует матрица S^{-1}. Чтобы получить обратную матрицу, необходимо преобразованное уравнение $SX = V$ умножить слева на S^{-1}, в результате получим $X = S^{-1}V = A^{-1}$. Практически это сводится к перестановке строк (или столбцов) матрицы V в соответствии с матрицей S, так чтобы последняя преобразовалась к единичной матрице.

Ниже приводится процедура обращения той же матрицы, что и в (4), но с произвольным выбором опорных элементов:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -94 & 0 & 0 & -28 & 1 & 7 \\ 13 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & \frac{19}{47} & \frac{1}{47} & \frac{7}{47} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{14}{47} & -\frac{1}{94} & -\frac{7}{94} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{47} & \frac{13}{94} & -\frac{3}{94} \end{array}\right].$$

Обратная матрица получается из V, размещенной в трех последних столбцах, перестановкой первой и второй строк (или столбцов) в соответствии с матрицей S, расположенной в первых трех столбцах.

6. **Разбиение на блоки.** Установим связь между блоками матриц S и S^{-1} n-го порядка при разбиении

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}; \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix},$$

где A и K — квадратные матрицы порядка p; D и N — квадратные матрицы порядка q, причем $p + q = n$. Согласно определению $SS^{-1} = 1$, что после перемножения матриц приводит к уравнениям:

$$AK + BM = 1; \quad AL + BN = 0;$$
$$CK + DM = 0; \quad CL + DN = 1.$$

Умножив первую пару уравнений на A^{-1} и решив их относительно K и L, найдем:

$$K = A^{-1} - A^{-1}BM; \; L = -A^{-1}BN.$$

Подставим полученные выражения в остальные два уравнения:

$$CA^{-1} - CA^{-1}BM + DM = 0; \; -CA^{-1}BN + DN = 1,$$

или

$$(D - CA^{-1}B)\,M = -CA^{-1}; \quad (D - CA^{-1}B)\,N = 1,$$

откуда имеем:

$$M = -(D - CA^{-1}B)^{-1}\,CA^{-1}; \quad N = (D - CA^{-1}B)^{-1}.$$

Подставив значения M и N в выражения для K и L, получим соотношение, известное как *формула Фробениуса*,

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BNCA^{-1} & -A^{-1}BN \\ -NCA^{-1} & N \end{bmatrix},$$

где $N = (D - CA^{-1}B)^{-1}$.

Как видим, обращение матрицы n-го порядка требует обращений двух матриц порядков p и q (предполагается, что A — неособенная матрица). На практике удобно выполнять вычисления в следующем порядке: A^{-1}, $A^{-1}B$, CA^{-1}, $CA^{-1}B$ (контроль $C(A^{-1}B) = (CA^{-1})\,B$), $D - CA^{-1}B$, после чего находим

$$N = (D - CA^{-1}B)^{-1}, \quad M = -N\,(CA^{-1}),$$
$$L = -(A^{-1}B)\,N, \quad K = A^{-1} - (A^{-1}B)\,M.$$

Аналогично рассуждая, можно получить вторую формулу Фробениуса

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} K & -KBD^{-1} \\ -D^{-1}CK & D^{-1} + D^{-1}CKBD^{-1} \end{bmatrix},$$

где $K = (A - BD^{-1}C)^{-1}$. Здесь предполагается, что неособенной является матрица D.

7. Перестановка строк и столбцов. Обращение матрицы разбиением на блоки особенно удобно в тех случаях, когда матрицы A или D легко обращаются (например, диагональная или треугольная), а также когда хотя бы одна из матриц B или C нулевая. Для получения наиболее удобного разбиения можно переставить строки и столбцы исходной матрицы. Но при этом в матрице, полученной по формуле Фробениуса, необходимо переставить соответствующие столбцы и строки, после чего она и будет обратной к исходной. Справедливость такого требования легко понять, вспомнив, что процесс обращения включает в себя транспонирование матрицы.

Пусть, например, требуется найти обратную для матрицы

$$Q=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Переставив взаимно первый и четвертый столбцы и разбив на блоки, получим:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A диагональная, то воспользуемся первой схемой:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\quad A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$CA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$CA^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix};$$

$$D-CA^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$N=(D-CA^{-1}B)^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M=-NCA^{-1}=-\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$L=-A^{-1}BN=-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$K=A^{-1}-A^{-1}BM=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем матрицу, которая после взаимной перестановки первой и четвертой строк является обратной для исходной

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ \hline -2 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\to\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}=Q^{-1}.$$

При $C = 0$ или $B = 0$ из формул Фробениуса имеем:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix},$$

откуда, в частности, следует, что при таких блочных структурах матриц обратные к ним существуют лишь при условии неособенности матриц A и D. Заметим также, что приведенные выше формулы можно получить одну за другой транспонированием и взаимной заменой матриц B и C.

8. Метод окаймления. Обращение матрицы, разбитой на блоки, сводится к обращению матриц более низкого порядка, что требует каких-либо других методов или последующего разбиения на блоки. Рассмотрим частный случай разбиения исходной матрицы

A_{k-1}^{-1}	u_k	(3) $x_k = A_{k-1}^{-1} u_k$	(9) $\frac{1}{\alpha_k} x_k y_k$
v_k	a_{kk}	(4) $z_k = v_k x_k$	
(1) $y_k = v_k A_{k-1}^{-1}$	(2) $z_k = y_k u_k$	(5) $\alpha_k = a_{kk} - z_k$	
(10) $A_{k-1}^{-1} + \frac{1}{\alpha_k} x_k y_k$	(8) $-\frac{1}{\alpha_k} x_k$	$= A_k^{-1}$	
(7) $-\frac{1}{\alpha_k} y_k$	(6) $\frac{1}{\alpha_k}$		

Рис. 74. Схемы обращения матрицы методом окаймления (k-й шаг).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & u_n \\ \hline v_n & a_{nn} \end{array} \right],$$

где A_{n-1} — матрица $(n-1)$-го порядка; a_{nn}— последний диагональный элемент исходной матрицы A; u_n и v_n — соответственно последние столбец и строка без элемента a_{nn}.

Такое разбиение можно рассматривать как результат *окаймления матрицы* A_{n-1} добавлением столбца справа и строки снизу. По первой формуле Фробениуса (6) имеем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\alpha_n}(A_{n-1}^{-1} u_n v_n A_{n-1}^{-1}) & -\frac{1}{\alpha_n} A_{n-1}^{-1} u_n \\ -\frac{1}{\alpha_n} v_n A_{n-1}^{-1} & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

где $\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n$ является скаляром, так как произведение строки на матрицу дает строку, а произведение строки на столбец — скаляр.

Как видно, обращение матрицы A n-го порядка требует обращения матрицы A_{n-1} $(n-1)$-го порядка, которое можно выполнить по той же схеме. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получим матрицу второго порядка, обратная которой находится непосредственно

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Определив A_2^{-1} по приведенной выше формуле, найдем A_3^{-1}, затем по A_3^{-1} вычислим A_4^{-1} и т. д. до $A_n^{-1} = A^{-1}$. Вычисления на k-м шаге удобно располагать по схеме, показанной на рис. 74 (последовательность операций указана цифрами в скобках, причем осуществляется контроль $z_k = y_k u_k = v_k x_k$).

Если в процессе вычисления на k-м шаге окажется, что $\alpha_k = 0$, то оставшиеся строки (или столбцы) матрицы A переставляются. При этом в результирующей матрице A_n^{-1} осуществляется обратная перестановка столбцов (или строк). Проиллюстрируем метод окаймления на примере из (7):

$A_2^{-1} =$	-1	0		1	-1	1	0		
	-2	-1		-1	-1	1	0		
	2	0		0	-2				
	-2	0		-2	2				
	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{3}{2}$	
$A_3^{-1} =$	-1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$	.
	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	3	$-\frac{9}{2}$	
	0	1	2	2	$\frac{5}{2}$				
	1	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
	-1	1	-1	1					
$A_4^{-1} =$	0	-2	2	-1					
	-2	3	-4	3	$= A^{-1}$				
	2	-2	3	-2					

9. Обращение симметричных матриц. Так как матрица, обратная симметричной, также симметрична, то процесс обращения в таких случаях существенно упрощается. При использовании любого метода достаточно получить элементы обратной матрицы, расположенные на главной диагонали и выше (или ниже) от нее. Остальные элементы получаются из условия симметрии.

В методе исключения (4) достаточно преобразовать матрицу A к нижней (или верхней) треугольной матрице с единичными

элементами по главной диагонали. При разбиении на блоки (6) для симметричной матрицы $A = A^t$; $C = B^t$; $D = D^t$. Соответствующие блоки обратной матрицы характеризуются аналогичными соотношениями: $K = K^t$; $L = M^t$; $N = N^t$.
Первая формула Фробениуса приводится к виду

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + HNH^t & -HN \\ -(HN)^t & N \end{bmatrix},$$

где $N = (D - B^t A^{-1} B)^{-1}$ и $H = A^{-1} B$.

Соответствующие упрощения используются и при обращении симметричных матриц A^{-1} и $(D - B^t A^{-1} B)$. В методе окаймления (8) для симметричной матрицы A имеют место соотношения $A_{k-1} = A^t_{k-1}$ и $v_k = u^t_k$. В связи с этим $y_k = x^t_k$, и схема вычислений соответственно упрощается.

Если обращение симметричной матрицы выполняется по стандартной процедуре, то создаются дополнительные возможности контроля полученного результата по условиям симметрии обратной матрицы. Поэтому, может быть, не следует слишком категорично настаивать на использовании упрощений, возникающих за счет специальных свойств обращаемой матрицы.

Вследствие погрешностей вычисления матрица V, полученная в результате процедуры обращения, может недостаточно точно совпадать с обратной матрицей A^{-1}. Степень отклонения вычисленной обратной матрицы от ее точного значения определяется разностью между произведением AV и единичной матрицей, которой это произведение должно равняться для точного значения $V = A^{-1}$, т. е. $R = E - AV$. Приближенное значение обратной матрицы уточняется с помощью итерационных методов.

10. Миноры обратной матрицы. Пусть A — квадратная матрица n-го порядка и $B = (A^{-1})^t$ — обратная и транспонированная к ней. Тогда минор k-го порядка M^B_k матрицы B выражается через дополнительный минор $\overline{M}^A_k$ (или алгебраическое дополнение A^A_k взаимно соответственного минора матрицы A) соотношением

$$M^B_k = \frac{1}{\Delta} (-1)^\sigma \overline{M}^A_k = \frac{1}{\Delta} A^A_k,$$

где $\Delta = \det A = \frac{1}{\det B}$; σ — сумма номеров строк и столбцов, которые участвуют в образовании минора M^B_k (или минора $\overline{M}^A_k$).

Предполагается, что строки и столбцы в минорах расположены в их естественном порядке (как и в исходных матрицах). Легко показать, что B — это матрица алгебраических дополнений Δ_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) элементов матрицы A, умноженная на обратное значение определителя $\frac{1}{\Delta}$. Минор k-го порядка матрицы B, обра-

зованный строками с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и столбцами с номерами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, запишем следующим образом:

$$M_k^B = \begin{vmatrix} \frac{\Delta_{\alpha_1\beta_1}}{\Delta} & \frac{\Delta_{\alpha_1\beta_2}}{\Delta} & \ldots & \frac{\Delta_{\alpha_1\beta_k}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{\alpha_2\beta_1}}{\Delta} & \frac{\Delta_{\alpha_2\beta_2}}{\Delta} & \ldots & \frac{\Delta_{\alpha_2\beta_k}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\Delta_{\alpha_k\beta_1}}{\Delta} & \frac{\Delta_{\alpha_k\beta_2}}{\Delta} & \ldots & \frac{\Delta_{\alpha_k\beta_k}}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^k} \begin{vmatrix} \Delta_{\alpha_1\beta_1} & \Delta_{\alpha_1\beta_2} & \ldots & \Delta_{\alpha_1\beta_k} \\ \Delta_{\alpha_2\beta_1} & \Delta_{\alpha_2\beta_2} & \ldots & \Delta_{\alpha_2\beta_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{\alpha_k\beta_1} & \Delta_{\alpha_k\beta_2} & \ldots & \Delta_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение A_k^A получается как минор матрицы A, образованный удалением строк с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и столбцов с номерами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, умноженный на $(-1)^\sigma$. По аналогии с обычным алгебраическим дополнением A_k^A называется *k-кратным алгебраическим дополнением* и обозначается через $\Delta_{\alpha_1\beta_1,\, \alpha_2\beta_2,\, \ldots,\, \alpha_k\beta_k}$. Тогда получаем важное соотношение для миноров матрицы алгебраических дополнений элементов матрицы A, известное как *теорема Якоби:*

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha_1\beta_1} & \ldots & \Delta_{\alpha_1\beta_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{\alpha_k\beta_1} & \ldots & \Delta_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix} = \Delta^{k-1}\Delta_{\alpha_1\beta_1,\, \ldots,\, \alpha_k\beta_k}.$$

Чаще всего используется частный случай этой теоремы для минора второго порядка, образованного элементами пересечения строк p и q $(p < q)$ и столбцов r, s $(r < s)$:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{pr} & \Delta_{ps} \\ \Delta_{qr} & \Delta_{qs} \end{vmatrix} = \Delta_{pr}\Delta_{qs} - \Delta_{ps}\Delta_{qr} = \Delta\Delta_{pr,\, qs}.$$

Если минор второго порядка образован строками и столбцами с одинаковыми номерами $(p = r,\ q = s)$, то

$$\Delta_{rr}\Delta_{ss} - \Delta_{rs}\Delta_{sr} = \Delta\Delta_{rr,\, ss}.$$

Например, для матрицы Q из (7), определитель которой $\Delta = -1$, имеем

$$\begin{vmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{42} & \Delta_{43} \end{vmatrix} = \Delta_{22}\Delta_{43} - \Delta_{23}\Delta_{42} = \Delta\Delta_{22,23} =$$

$$= \Delta\Delta_{22,\,43} = \Delta(-1)^{2+4+2+3} \begin{vmatrix} q_{11} & q_{14} \\ q_{31} & q_{34} \end{vmatrix} = -1\,(-1)^{11} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Приведенные соотношения используются, например, при различных преобразованиях систем линейных уравнений.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Воспользовавшись результатом задачи 2 из предыдущего параграфа, запишите для матрицы A присоединенную A^+ и обратную A^{-1} матрицы.

2. С помощью метода исключения найдите обратные для следующих матриц:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычислите определители и найдите присоединенные матрицы на основе данных, полученных в процессе исключения.

3. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

образуйте матрицы V_k ($k = 1, 2, 3$), соответствующие преобразованию A к единичной матрице, и найдите $A^{-1} = V_1 V_2 V_3$. Проверьте результат вычислением A^{-1} через определитель и алгебраические дополнения.

4. Найдите обратную для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

а) методом исключения;
б) разбиением на блоки;
в) методом окаймления.

5. Обратите наиболее рациональным способом матрицу

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Запишите выражение для матрицы, обратной треугольной третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix},$$

и обобщите результат на матрицу n-го порядка.

7. Покажите, что определитель $|G|$ блочной матрицы

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

можно выразить следующими способами:

а) $|G| = |AD - ACA^{-1}B| = |A|\,|D - CA^{-1}B|$, если $|A| \neq 0$;
б) $|G| = |AD - BD^{-1}CD| = |A - BD^{-1}C|\,|D|$, если $|D| \neq 0$;
в) $|G| = |AD - CB|$, если A и C перестановочны ($AC = CA$);
г) $|G| = |AD - BC|$, если C и D перестановочны ($CD = DC$).

8. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме Якоби определите следующие миноры матрицы алгебраических дополнений:

а) $\begin{vmatrix} \Delta_{21} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{34} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{41} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{vmatrix}$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общая характеристика. Решение систем линейных уравнений — это одна из центральных задач вычислительной математики, наиболее часто встречающаяся в инженерной практике. К этой задаче сводятся или ею сопровождаются процедуры анализа и синтеза физических систем различной природы: электрических, механических, гидравлических и т. п. Она играет важную роль в прикладных методах математической статистики и экономики, в теории оптимального кодирования при передаче информации и во многих других разделах современной науки и техники. Даже если исследуемая система нелинейна, то типичный путь ее численного анализа лежит через линеаризацию и сводится к решению систем линеаризованных уравнений.

В общем случае число уравнений m может отличаться от числа неизвестных. Такая система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

в матричной форме $Ax = b$ характеризуется прямоугольной матрицей коэффициентов A размера $m \times n$ и столбцом свободных членов b. Если все свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ равны нулю, то система называется *однородной*, а если среди них имеется хотя бы один ненулевой член, то система называется *неоднородной*.

Среди уравнений системы могут быть линейно-зависимые, т. е. такие, которые можно представить как результат сложения других уравнений, умноженных на какие-либо числа (при умножении уравнения на число его левая и правая части умножаются на это число). Ясно, что зависимые уравнения не содержат никакой

дополнительной информации, влияющей на значения искомых величин. Исключение зависимых уравнений приводит к эквивалентной системе, решение которой совпадает с решением исходной системы.

2. Ранг системы. Число независимых уравнений определяет *ранг системы*. Соответственно число независимых строк (или столбцов) матрицы называют *рангом матрицы*. Если ранг матрицы равен r, то хотя бы один ее минор r-го порядка отличен от нуля, а все остальные миноры, выше r-го порядка, равны нулю.

Система n уравнений с n неизвестными $Ax = b$, матрица которой A неособенная, т. е. $\det A \neq 0$, имеет единственное решение $x = A^{-1}b$ и поэтому называется *определенной системой n-го порядка*. Подстановка решения в уравнение превращает его в тождество $A(A^{-1}b) = b$ или $b = b$. Ранг неособенной матрицы A равен ее порядку ($r = n$). Если среди n уравнений имеются зависимые, то A — особенная матрица и ее ранг меньше порядка ($r < n$). Разность $d = n - r$ называют *дефектом матрицы*, а саму матрицу — *d-кратно вырожденной* (при $d = 1$ матрица называется *просто вырожденной*). После исключения d зависимых уравнений получим эквивалентную систему r уравнений с n неизвестными.

Система m уравнений с n неизвестными при $m \neq n$ может иметь решение, а может и не иметь их вовсе. Если система имеет хотя бы одно решение, ее называют *совместной*, а систему, для которой решение не существует, называют *несовместной*. Совместная система при $m < n$ всегда имеет бесконечное множество решений и называется *неопределенной*. При $m > n$ система является либо несовместной, либо сводится к эквивалентной ей совместной системе, которая может быть определенной ($r = n$) или неопределенной ($r < n$).

Применение вычислительных машин позволяет решать системы уравнений с большим числом неизвестных. Для этой цели разработаны высокоэффективные алгоритмы и программы. Многие из них основаны на идее исключения, которая уже использовалась для вычисления определителей (2. 7) и обращения матриц (3. 4).

3. Алгоритм Гаусса. Для решения неоднородных систем линейных уравнений n-го порядка идея исключения нашла одно из своих первых воплощений в *алгоритме Гаусса*. Он сводится к последовательному исключению неизвестных, в результате чего данная система уравнений преобразуется к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей, решение которой не составляет труда. Подобно методу исключения при обращении матрицы, это достигается соответствующими операциями над строками расширенной матрицы системы $[A, b]$ размера $n \times (n + 1)$. Различие заключается в том, что в нули преобразуются лишь те элементы матрицы A, которые расположены ниже ее главной диагонали. В результате $[A, b]$ приводится к матрице $[U, y]$, где U — верхняя треугольная

матрица с единичными элементами на главной диагонали; y — преобразованный столбец свободных членов:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n &= y_n \end{aligned}\right\},$$

откуда на основании $x_n = y_n$ находим последовательно $x_{n-1}, \ldots, x_1$ по формуле:

$$x_k = y_k - \sum_{s=k+1}^{n} u_{ks}x_s \ \ (k = n-1, \ \ldots, \ 1).$$

Итак, алгоритм Гаусса содержит два этапа: 1) построение вспомогательной системы с треугольной матрицей U *(прямой ход)*; 2) получение решения системы x *(обратный ход)*. Проиллюстрируем его на следующем примере:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

Прямой ход включает следующие преобразования расширенной матрицы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Преобразованная система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \ \ 2x_3 &= 8 \\ x_2 - 10x_3 &= -28 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right\},$$

откуда находим: $x_3 = 3$; $x_2 = -28 + 10x_3 = 2$; $x_1 = 8 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 1$.

Если исключение выполнить так же, как при обращении матрицы (3. 4), то в результате матрица A преобразуется в единичную, а b — в столбец, элементы которого равны значениям искомых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $[A, b]$ преобразуется в $[1, x]$. Эту разновидность метода исключения называют *алгоритмом Гаусса—Жордана*. Так, для рассматриваемого примера имеем

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

откуда сразу получаем: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

4. *LU*-разложение. Разработано много различных вариантов гауссова исключения, которые отличаются выбором ведущих элементов, способами уточнения решения, распределением оперативной памяти при использовании вычислительных машин. По мнению специалистов, для решения систем линейных уравнений не найдено лучших по объему вычислений и точности алгоритмов, чем методы последовательного исключения. Все их разновидности связаны по существу с разложением неособенной квадратной матрицы в произведение двух треугольных матриц — нижней L и верхней U, т. е. $A = LU$. Это разложение называют *треугольным* или *LU-разложением*.

Доказательство возможности LU-разложения обычно проводится методом математической индукции. Пусть имеется квадратная матрица A n-го порядка. При $n = 1$ имеем $[a_{11}] = [l_{11}][u_{11}]$, что является LU-разложением, так как всякая матрица первого порядка может рассматриваться и как треугольная. Покажем, что если это разложение имеет место для матрицы A_{n-1} $(n - 1)$-го порядка, то оно возможно и для матрицы A n-го порядка. Пред-

ставив соотношение $A = LU$ в блочном виде и перемножив матрицы, получим:

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & w \\ v & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ x & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & y \\ 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1}\,U_{n-1} & L_{n-1} \quad y \\ x \quad U_{n-1} & xy + l_{nn}\,u_{nn} \end{bmatrix},$$

откуда путем сравнения соответствующих элементов находим:

$$L_{n-1}U_{n-1} = A_{n-1}; \quad L_{n-1}y = w;$$
$$xU_{n-1} = v; \quad xy + l_{nn}u_{nn} = a_{nn}.$$

Первое уравнение удовлетворяется по предположению. Второе и третье уравнения позволяют определить $x = vU_{n-1}^{-1}$ и $y = wL_{n-1}^{-1}$, если U_{n-1} и L_{n-1} — неособенные матрицы. Так как в соответствии с теоремой об определителе произведения двух матриц (2.10) $|L_{n-1}||U_{n-1}| = |A_{n-1}|$, то из требования $|L_{n-1}| \neq 0$ и $|U_{n-1}| \neq 0$ вытекает условие $|A_{n-1}| \neq 0$. Это значит, что недиагональные элементы матриц L и U определяются однозначно, если главные миноры матрицы A, составленные из ее первых k строк и столбцов ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), не равны нулю. Наконец, из последнего уравнения видно, что диагональные элементы l_{nn} и u_{nn} матриц L и U связаны соотношением $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - xy$. Поэтому для однозначного определения LU-разложения следует одному из них на каждом шаге приписывать некоторое значение, отличное от нуля. Обычно полагают все диагональные элементы одной из матриц L или U равными единице. В дальнейшем будем считать $u_{ii} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Таким образом, показана возможность LU-разложения и условия, при которых матрицы L и U определяются однозначно. Так как определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, то из $A = LU$ также следует

$$|A| = |L||U| = 1 \cdot (l_{11}\ l_{22}\ \ldots\ l_{nn}) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}.$$

Разложение матрицы A в произведение LU позволяет представить систему $Ax = b$ в виде $LUx = b$, и она сводится к двум системам:

$$Ly = b; \quad Ux = y.$$

Благодаря треугольной структуре L и U, эти уравнения решаются без обращения матриц последовательной подстановкой:

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i}^{i-n} l_{ij}y_j\right) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

$$x_k = y_k - \sum_{s=k+1}^{n} u_{ks}x_s \quad (k = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1).$$

5. **Компактная схема.** Если условия единственности LU-разложения для матрицы A выполняются, т. е.

$$a_{11} \neq 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ \ldots, \ |A| \neq 0,$$

и принято соглашение о том, что $u_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то элементы матриц L и U вычисляются по *компактной схеме* на основе рекуррентных формул:

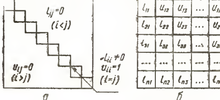


Рис. 75. LU-разложение неособенной матрицы:
а — структура матриц L и U; *б* — компактная схема

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is} u_{sj} \quad (i \geqslant j);$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is} u_{sj}\right) \ (i < j).$$

Справедливость этих соотношений непосредственно вытекает из структуры треугольных матриц L и U (рис. 75, *а*) и общего вида элемента произведения $A = LU$:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is} u_{sj}.$$

Учитывая, что элементы u_{ij} матрицы U ниже главной диагонали $(i > j)$ равны нулю, а на главной диагонали $(i = j)$ равны единице, получаем первую из приведенных выше рекуррентных формул. Аналогично, на основании того, что элементы l_{ij} матрицы L выше главной диагонали $(i < j)$ равны нулю, получаем вторую формулу.

На первом шаге $l_{i1} = a_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$. На втором шаге, используя значения l_{i1} и u_{1j}, вычисляем $l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ и $u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}(a_{2j} - l_{21}u_{1j})$ $(j = 3, 4, \ldots, n)$ и т. д. Процедура заканчивается на n-м шаге, причем диагональные элементы u_{ii} не вычисляются, так как по условию все они равны единице.

Как видно, для вычисления элементов матриц L и U соответствующий элемент матрицы A используется только один раз, и в дальнейших операциях он не участвует. Поэтому при реализации алгоритма на вычислительных машинах найденные на данном шаге элементы l_{ik} и u_{kj} обычно заносятся в память на места освобождающихся элементов матрицы A. В результате LU-разложение представляется таблицей, изображенной на рис. 75, *б*. При этом эле-

менты $u_{ii} = 1$ не хранятся, а их значения учитываются программой при соответствующих операциях. Так, для примера из (3) имеем:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -10 \\ 1 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -10 \\ 1 & \frac{5}{2} & 26 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 26 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 26 = 26.$$

Вычисления на k-м шаге по компактной схеме иллюстрируются на рис. 76 (заштрихованные части матриц не участвуют в соответствующих операциях). Исходная система уравнений сводится к двум простым системам:

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 \qquad\qquad\quad &= 16 \\ 3y_1 + \frac{1}{2} y_2 \qquad &= 10 \\ y_1 + \frac{5}{2} y_2 + 26y_3 &= 16 \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + 2x_3 &= y_1 \\ x_2 - 10x_3 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}\right\}.$$

Решение первого из них: $y_1 = 8$; $y_2 = 2\ (10 - 3 \cdot 8) = -28$; $y_3 = \frac{1}{26}\ (16 - 8 + \frac{5}{2} \cdot 28) = 3$. Из второго уравнения находим: $x_3 = 3$; $x_2 = -28 + 10 \cdot 3 = 2$; $x_1 = 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1$, что совпадает с полученным ранее результатом (3).

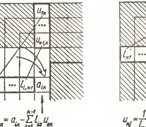


Рис. 76. Вычисления на k-м шаге по компактной схеме.

Рассмотренную схему часто называют *алгоритмом Краута.*

Следует иметь в виду, что при использовании компактной схемы структура матриц L и U предопределяется фиксацией ведущих элементов по главной диагонали. Если на каком-либо шаге диагональный элемент l_{ii} окажется равным или близким нулю, то дальнейшее продолжение процедуры по этой схеме невозможно, а всякое

изменение стратегии выбора ведущих элементов потребовало бы возвращения к ее началу. Поэтому, если нет уверенности в соблюдении условий, необходимых для LU-разложения при заранее фиксированных ведущих элементах, следует прибегать к другим методам, один из которых рассматривается ниже.

6. Получение LU-разложения методом исключения. Верхняя треугольная матрица U формируется в процессе гауссова исключения. Поэтому для получения LU-разложения достаточно дополнить алгоритм Гаусса так, чтобы формировалась и матрица L. В то же время можно освободить этот алгоритм от операций над элементами столбца свободных членов b, так как преобразованный столбец получается как $y = L^{-1}b$.

Выясним способ образования матрицы L в процессе исключения. Пусть на $(k-1)$-м шаге матрица A преобразовалась в $A^{(k-1)}$ с элементами $a_{ij}^{(k-1)}$. При этом $a_{ii}^{(k-1)} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ и $a_{ij}^{(k-1)} = 0$ $(i > j;\ j = 1, 2, \ldots, k-1)$. Преобразование на k-м шаге приводит к матрице $A^{(k)}$ с элементами $a_{ij}^{(k)}$, причем (3.4)

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \qquad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)},$$

где $i = k+1, \ldots, n;\ j = k, k+1, \ldots, n$.

Легко понять, что это преобразование соответствует разложению $A^{(k-1)}$ в произведение $W_k A^{(k)}$, где матрица W_k имеет простую структуру:

$$W_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{kk}^{(k-1)} & & \\ & & \cdots & & \\ & & & \ddots & \\ & & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Процесс гауссова исключения преобразует A в U за n шагов, что соответствует последовательному разложению $A = (W_1 W_2 \ldots \ldots W_n) U = LU$, откуда

$$L = W_1 W_2 \ldots W_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица L формируется последовательно в процессе исключения, причем ее k-й столбец состоит из тех значений элементов k-го столбца матрицы A, которые они получают на $(k-1)$-м шаге преобразования. Практически при проведении процедуры гауссова исключения достаточно на каждом шаге по главной диагонали и ниже ее сохранять значения элементов преобразуемой матрицы, вычисленных на предыдущем шаге. В результате получаем квадратную таблицу (рис. 75, б), которая и представляет LU-разложение. Например,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -5 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -10 \\ 1 & \frac{5}{2} & 26 \end{bmatrix},$$

что соответствует матрицам L и U, приведенным в (4. 5).

Такой способ получения LU-разложения не связан с предварительной фиксацией ведущих элементов, и на каждом шаге ведущий элемент может быть выбран в любой строке и столбце, в которых такие элементы еще не выбирались на предыдущих шагах.

Это позволяет повышать точность вычислений путем выбора в качестве ведущего элемента наибольший по абсолютной величине элемент очередного столбца (в специальной литературе можно найти и другие рекомендации).

Если не все ведущие элементы расположены на главной диагонали, то матрицы L и U будут, вообще говоря, не треугольными. Но они легко приводятся к треугольным соответствующей перестановкой строк (при машинной реализации этого алгоритма вместо перестановки строк просто изменяется их нумерация). Вернемся к рассмотренному выше примеру и выполним LU-разложение, выбирая ведущий в каждом столбце наибольший элемент:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & \frac{26}{7} \\ 3 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} & \frac{8}{7} \end{bmatrix},$$

что после перестановки строк соответствует LU-разложению:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & \frac{26}{7} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из рассмотрениого примера, при различиой стратегии выбора ведущих элементов матрицы L и U получаются различными (по существу здесь L и U соответствуют не матрице A, а той матрице, которая получается из A перестановкой строк).

7. Уравнение $AX = B$. Миогие задачи строительиой механики, электротехники, радиоэлектроники и других отраслей техники связаны с решением системы линейных уравнений, правые части которых принимают различные значения, а матрица системы остается неизменной. Совокупность таких систем $Ax^{(1)} = b^{(1)}, \ldots, Ax^{(m)} = b^{(m)}$ можно рассматривать как одно матричное уравнение $AX = B$, где X и B — матрицы размера $n \times m$, столбцы которых равны соответственно $x^{(j)}$ и $b^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Как уже указывалось в (3.3), решение уравнения $AX = B$ можно представить через обратную матрицу $X = A^{-1}B$. Часто, однако, отдают предпочтение процедурам исключения, которые выполняются над расширенной матрицей $[A, B]$. Пусть, например, требуется решить уравнение $Ax = b$ при задаииой матрице A и различных векторах в правой части, т. е.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем расширенную матрицу $[A, B]$ по алгоритму Гаусса—Жордана:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -3 & 7 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & -8 & 10 & -20 & -24 \\ 0 & 5 & -3 & 19 & 15 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда имеем:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Неопределенная система. В общем случае, когда число уравиеиий m не равно числу неизвестных n, также применима процедура

исключения, причем в процессе ее реализации выявляется и характер системы. Пусть, например, дана система уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 9x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 8 \end{array}\right\}.$$

Преобразуем расширенную матрицу системы с помощью алгоритма Гаусса—Жордана:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 6 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & -3 & 6 & -9 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последняя нулевая строка соответствует тождеству $0 = 0$ что свидетельствует о зависимости исходных уравнений. Так как независимых уравнений три, то и ранг системы $r = 3$. Таким образом, получаем эквивалентную систему уравнений:

$$x_1 + 3x_4 - x_5 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0,$$

решение которой: $x_1 = 2 - 3x_4 + x_5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2x_4 - 3x_5$, где x_4 и x_5 могут принимать произвольные значения. Рассмотренная система является совместной и неопределенной, так как имеет бесконечное множество решений.

Вообще, если ранг совместной системы меньше ее порядка ($r < n$), то совокупность ее r неизвестных, называемых *основными*, всегда можно выразить через $n - r$ других неизвестных, называемых *свободными*. Очевидно, основными будут те величины, которые исключаются из уравнений, т. е. они соответствуют столбцам, по которым проводится процедура исключения. Свобода в выборе

совокупности основных неизвестных ограничивается только возможностью выбора опорного элемента в данном столбце. Так, в рассматриваемом примере $x_2 = 1$, и поэтому x_2 не может быть свободной неизвестной. Действительно, пропуская второй столбец и продолжая процесс исключения по третьему столбцу, приходим к следующей ситуации:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & -3 & 6 & -9 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Продолжать исключение по четвертому столбцу невозможно, так как все элементы в оставшихся строках равны нулю. Поэтому необходимо возвратиться ко второму столбцу. Отсюда видно, что сама процедура исключения корректирует выбор совокупности основных неизвестных.

При любом числе m уравнений ранг системы не может превышать число неизвестных n $(r \leqslant n)$. Если $m > n$, то не менее $(m - n)$ уравнений совместной системы зависимы и превращаются в тождества в процессе исключения. Совместная система m уравнений ранга r имеет $m - r$ зависимых уравнений. При $r = n$ она определенная, а при $r < n$ неопределенная.

9. Теорема Кронекера—Капелли. Рассмотрим пример несовместной системы и выясним общий критерий совместности. Пусть, например, в приведенной выше системе правая часть последнего уравнения равна не 8, а 5. Тогда расширенная матрица преобразуется к виду:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Последняя строка выражает противоречие $0 = -3$ (?), что и свидетельствует о несовместимости исходной системы. Такая система не имеет решений. Для того, чтобы система была совместна, необходимо обращение в тождества зависимых уравнений. А это возможно лишь тогда, когда нулевым строкам преобразованной матрицы A соответствуют и нулевые элементы преобразованного вектора b. Другими словами, ранг матрицы A не должен изменяться, если к ней приписать столбец b.

Эти рассуждения поясняют известную теорему *Кронекера—Капелли*: необходимым и достаточным условием совместности системы линейных уравнений является равенство рангов матрицы системы A и ее расширенной матрицы $[A, b]$. В нашем примере ранг A равен трем, а ранг $[A, b]$ — четырем, поэтому система несовместна.

10. Однородная система уравнений. Система, все свободные члены которой равны нулю ($b = 0$), называется *однородной*. Она всегда совместна, так как нулевой столбец b не влияет на ранг расширенной матрицы $[A, 0]$. Однородная система n уравнений с n неизвестными имеет тривиальное решение $x = 0$, которое и единственно, если ранг матрицы A равен ее порядку ($r = n$). При $r < n$ однородная система имеет бесконечное множество решений и сводится к неопределенной системе r уравнений с n неизвестными. Это, в частности, означает, что система n уравнений с n неизвестными имеет нетривиальные решения при условии, что матрица системы особенна, т. е. $\det A = 0$.

Пусть в системе уравнений из (8) правые части равны нулю. Преобразованная матрица этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что соответствует решению: $x_1 = -3x_4 + x_5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2x_4 - 3x_5$.

В общем случае решение однородной системы ранга r с n неизвестными

$$x_k = -\sum_{s=r+1}^{n} a'_{ks} x_s \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

где a'_{ks} — элементы матрицы, преобразованной по алгоритму Гаусса—Жордана (предполагается, что основным неизвестным соответствуют первые r столбцов).

Рассмотрим однородную систему n уравнений с n неизвестными $Ax = 0$ или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

матрица A которой просто вырождена, т. е. ее ранг $r = n - 1$. Разлагая определитель этой матрицы по элементам какой-либо строки, запишем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = \det A \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $\det A = 0$, то сравнивая записанные соотношения при любом i, находим

$$x_j = k\Delta_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где k — произвольное число, не равное нулю.

Таким образом, неизвестные пропорциональны соответствующим алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки матрицы A, т. е. вектор решений можно представить в виде:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \cdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix}.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица этой системы просто вырождена, так как ее ранг равен двум, следовательно, достаточно вычислить алгебраические дополнения элементов какой-либо строки, например, первой:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда запишем решение рассматриваемой системы уравнений: $x_1 = -k$; $x_2 = k$; $x_3 = -2k$ или

$$x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

причем это решение удовлетворяет данной системе при любом значении числа k.

11. Применение блочных матриц. При решении определенной системы уравнений n-го порядка можно воспользоваться разбиением матрицы этой системы на блоки. Представим уравнение $Ax = b$ с неособенной квадратной матрицей A в виде:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ b'' \end{bmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} — квадратные матрицы порядков p и q, причем $p + q = n$. Рассматриваемое уравнение равносильно системе двух матричных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}x' + A_{12}x'' = b' \\ A_{21}x' + A_{22}x'' = b'' \end{aligned}\right\}.$$

Выразим x'' из второго уравнения

$$x'' = A_{22}^{-1}(b'' - A_{21}x')$$

и подставим его в первое уравнение

$$A_{11}x' + A_{12}A_{22}^{-1}(b'' - A_{21}x') = b'.$$

Отсюда имеем

$$x' = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(b' - A_{12}A_{22}^{-1}b'').$$

Определив по этой формуле x', можно затем найти и x'' по приведенному выше соотношению.

Проиллюстрируем изложенный метод на примере системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{aligned}\right\}.$$

Представим эту систему в виде

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ \hline 6 \\ 6 \end{array}\right].$$

По формуле для x' имеем

$$x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя полученный результат, определяем x''

$$x'' = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение системы уравнений: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1$ или в векторной форме

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Особенность изложенного метода решения системы уравнений состоит в том, что вместо обращения матрицы n-го порядка необходимо обращать матрицы более низких порядков p и q ($p + q = n$). Этот метод особенно удобен, если матрицу системы уравнений можно представить в таком виде, что одна из матриц A_{12} (или A_{21}) является нулевой (это обычно достигается перестановкой соответствующих строк и столбцов). Так, при $A_{12} = 0$

$$x' = A_{11}^{-1} b'; \quad x'' = A_{22}^{-1}(b'' - A_{21}x'),$$

а при $A_{21} = 0$

$$x' = A_{11}^{-1}(b' - A_{12}A_{22}^{-1}b''); \quad x'' = A_{22}^{-1}b''.$$

Если одновременно $A_{12} = 0$ и $A_{21} = 0$, то исходная система распадается на две независимые системы уравнений $A_{11}x' = b'$ и $A_{22}x'' = b''$, решения которых: $x' = A_{11}^{-1}b'$ и $x'' = A_{22}^{-1}b''$.

12. Исключение переменных. Иногда требуется представить определенную систему уравнений n-го порядка относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, исключив из нее совокупность переменных $x_{s+1}, \ldots, x$. Обозначив $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ и $x'' = (x_{s+1} \ldots, x_n)$, на основе результатов предыдущего пункта запишем:

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\, x' = b' - A_{12}A_{22}^{-1}b''.$$

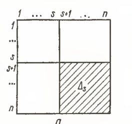
Таким образом, приходим к системе уравнений s-го порядка в матричной форме $A'x' = c$, где матрица системы A' и вектор свободных членов c выражаются соотношениями:

$$A' = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}; \quad c = b' - A_{12}A_{22}^{-1}b''.$$

В частности, если $b'' = 0$, получаем сокращенную систему в виде $A'x' = b'$. В этом случае можно представить элементы a'_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, s$) матрицы A' через миноры матрицы A в виде:

$$a'_{ij} = \frac{\Delta_s^{ij}}{\Delta_s} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, s).$$

Здесь $\Delta_s = \Delta_{11,\,22,\,\dots,\,ss}$ — s-кратное алгебраическое дополнение матрицы A, получаемое вычеркиванием из ее определителя первых s строк и столбцов. Его можно рассматривать также как минор матрицы A, образованный последними $(n - s)$ строками и столбцами с номерами $s + 1$, $s + 2$, ..., n (рис. 77, *а*). Величина Δ_s^{ij} — это минор матрицы A $(n - s + 1)$-го порядка, образованный i-й строкой и j-м столбцом, а также последними $(n - s)$ строками и столбцами (рис. 77, *б*).



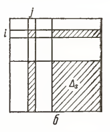


Рис. 77. Схема образования миноров матрицы системы:

а — минор Δ_s; *б* — минор Δ_s^{ij}.

Рассмотрим, например, систему уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Исключая переменные x_3, x_4, x_5, приходим к системе

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

где

$$a'_{11} = \frac{1}{\Delta_s} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}; \quad a'_{12} = \frac{1}{\Delta_s} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix};$$

$$a'_{21} = \frac{1}{\Delta_s} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}; \quad a'_{22} = \frac{1}{\Delta_s} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

а также

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дана определенная система уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=30 \\ -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10 \\ x_2-x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=10 \end{array}\right\}.$$

Найти ее решение с помощью:
а) правила Крамера;
б) обращения матрицы системы;
в) алгоритма Гаусса;
г) алгоритма Гаусса—Жордана.

2. Найти LU-разложение для матрицы системы уравнений из задачи 1, воспользовавшись:
а) компактной схемой;
б) методом исключения.

3. Существует ли решение приведенных ниже систем уравнений и является ли оно единственным?

а) $\left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-2x_3=8 \\ x_1+\frac{3}{4}x_2+x_3=5 \end{array}\right\}$; б) $\left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2+4x_3=7 \\ 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+3x_2+5x_3=2 \end{array}\right\}$;

в) $\left.\begin{array}{r} 2x_1+7x_2=4 \\ 3x_1+3x_2+6x_3=3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=2 \end{array}\right\}$; г) $\left.\begin{array}{r} 2x_1+8x_2+7x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=0 \end{array}\right\}$.

4. Решите с помощью алгоритма Гаусса те системы уравнений из задачи 3, решения которых существуют.

5. При каких значениях α система

$$\left.\begin{array}{r} (5-\alpha)x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 6x_1-(4+\alpha)x_2+4x_3=0 \\ 4x_1-4x_2+(5-\alpha)x_3=0 \end{array}\right\}$$

имеет ненулевые решения? Решите эту систему при одном из найденных значений α.

6. Дана система уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проверьте ее на совместимость и найдите решение, если оно существует.

7. Решить уравнение $Ax=b$ при заданной матрице A и различных значениях вектора $b=b^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad b^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix};\quad b^{(2)}=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};\quad b^{(3)}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Запишите условие этой задачи в виде единого матричного уравнения $AX=B$ и представьте его решение как матрицу X.

8. Решите матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Покажите, что матричное уравнение $AX = B$ не имеет решения для матрицы X, если ранг B больше ранга A.

10. Уравнение n-узловой электрической схемы с одним входом и одним выходом, имеющим общий узел O (рис. 78), можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \dots & y_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

или в матричной записи $Yu = i$, где Y — матрица проводимости схемы; $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ — вектор узловых напряжений, отсчитываемых от базисного узла O; i_1 и i_2 — соответственно входной и выходной токи.

а) Воспользовавшись правилом Крамера, покажите, что входное и выходное напряжения можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} i_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} i_2 \\ u_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} i_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} i_2 \end{aligned}\right\},$$

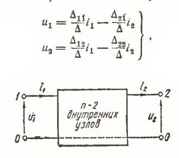


Рис. 78. Электрическая схема с одним входом и одним выходом, имеющими общий узел O.

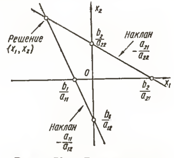


Рис. 79. Геометрическая интерпретация системы двух уравнений на плоскости.

где Δ — определитель матрицы Y; Δ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов этой матрицы.

б) Исключив переменные $u_3, u_4, \dots, u_n$, приведите исходную систему уравнений к виду:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{\Delta_{11,22}} (\Delta_{22} u_1 - \Delta_{21} u_2) \\ i_2 &= \frac{1}{\Delta_{11,22}} (\Delta_{12} u_1 - \Delta_{11} u_2) \end{aligned}\right\}.$$

в) Запишите общие выражения для передачи напряжения при холостом ходе K_U и передачи тока при коротком замыкании K_I, т. е.

$$K_U = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)_{i_2=0}; \qquad K_I = \left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{u_2=0}.$$

11. Система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\}$$

представляется на плоскости двумя прямыми (рис. 79). Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

то данная система определенная и ее решение:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\,(a_{22}b_1 - a_{12}b_2);$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\,(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)$$

изображается точкой (x_1, x_2) пресечения этих прямых. Рассмотрите геометрическое представление данной системы в случаях, когда она:

а) неоднородная ($b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$) и совместная при $\Delta = 0$;
б) неоднородная и несовместная;
в) однородная ($b_1 = b_2 = 0$) при $\Delta \neq 0$;
г) однородная при $\Delta = 0$.

12. Покажите, что в частном случае исключения переменных при $b' = 0$ и $s = 2$ система уравнений n-го порядка приводится к виду:

$$\frac{1}{\Delta_{11,22}}\begin{bmatrix} \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Представление в матричной форме. Теория матриц оказалась эффективным средством исследования и решения дифференциальных уравнений. Среди них наиболее простыми являются линейные *дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*, к которым приводятся многие задачи физики и техники. Здесь рассматриваются только такие уравнения и для краткости будем называть их просто дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$ имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t),$$

где a — постоянный коэффициент; $f(t)$ — непрерывная функция времени, определенная на некотором интервале $t_1 < t < t_2$.

Решением уравнения является функция $x(t)$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. При $f(t) = 0$ уравнение называется *однородным* и его общее решение выражается как

$x = ce^{at}$, где c — произвольная постоянная. Общее решение исходного *неоднородного* уравнения ($f(t) \neq 0$) выражается формулой

$$x = \left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau} v(\tau)\, d\tau\right) e^{at} = ce^{at} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Это решение представляет собой сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного дифференциальных уравнений. Оно удовлетворяет начальному условию $x(0) = x_0$ при $c = x_0$, т. е.

$$x = x_0 e^{at} + \int_{0}^{t} e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Переходя к системам дифференциальных уравнений, рассмотрим их представление в *нормальной форме*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{aligned}\right\},$$

к которой, как известно, можно привести любую систему линейных дифференциальных уравнений. В матричной записи эта система представляется одним уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f,$$

где x — вектор (столбец) неизвестных функций $x_1 = x_1(t)$; $x_2 = x_2(t)$; ...; $x_n = x_n(t)$; f — вектор (столбец) задающих функций $f_1 = f_1(t)$; $f_2 = f_2(t)$; ...; $f_n = f_n(t)$ и A — квадратная матрица постоянных коэффициентов a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Задачу об отыскании решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным значениям скаляра $t = 0$ и вектора $x_0 = x(0)$, называют *задачей Коши*. По аналогии

с дифференциальным уравнением первого порядка можно записать искомое решение для вектора неизвестных функций в виде:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$$

Необходимо установить допустимость такого представления решения, а также выяснить смысл и способы определения входящей в него матрицы e^{At}.

2. Решения нормальной однородной системы. В матричной форме нормальная однородная система дифференциальных уравнений ($f = 0$) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Будем искать ее решение в виде $x = he^{\lambda t}$, где h — вектор (столбец) произвольных постоянных. Подставляя x в исходное уравнение, получаем $h\lambda e^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t}$ или после сокращения на скаляр $e^{\lambda t}$ и перенесения Ah в левую часть равенства:

$$(\lambda E - A)\,h = 0.$$

Заметим, что сокращать на вектор h нельзя, так как операция деления на вектор в общем случае не имеет смысла. Вынося за скобки вектор h, необходимо умножить предварительно $h\lambda = \lambda h$ на единичную матрицу E.

Уравнение $(\lambda E - A)h = 0$ имеет нетривиальные решения при условии, что определитель матрицы $(\lambda E - A)$ обращается в нуль (4. 10), т. е. $|\lambda E - A| = 0$ или

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как порядок матрицы A равен n, то $\Delta(\lambda)$ является многочленом n-й степени относительно λ, т. е. $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ (нули многочлена $\Delta(\lambda)$), число которых в соответствии с основной теоремой алгебры равно n, дадут значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, при которых исходная система имеет нетривиальные решения.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда все корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ простые (попарно различные). Тогда при $\lambda = \lambda_i$ имеем однородное уравнение $(\lambda_i E - A)\,h^{(i)} = 0$, из которого можно определить вектор $h^{(i)}$. Таким образом, решение нормальной системы дифференциальных уравнений, соответствующее корню λ_i, будет

$x^{(i)} = h^{(i)}e^{\lambda_i t}$. Всего получим n таких решений, соответствующих n корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Для любой квадратной матрицы A по установившейся терминологии $(\lambda E - A)$ называется *характеристической матрицей*, а $\Delta(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ — *характеристическим уравнением*. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ называются *собственными значениями (характеристическими числами)*, а векторы $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$ — *собственными векторами* матрицы A.

3. Пространство решений однородной системы. Можно показать, что множество всех решений однородной системы дифференциальных уравнений образует n-мерное линейное пространство (2. 9. 5).

Действительно, если $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$ — какие-либо решения системы, то их сумма $x^{(i)} + x^{(j)}$ также будет решением, что вытекает из следующего:

$$\frac{d}{dt}(x^{(i)} + x^{(j)}) = \frac{dx^{(i)}}{dt} + \frac{dx^{(j)}}{dt} = Ax^{(i)} + Ax^{(j)} = A(x^{(i)} + x^{(j)}).$$

Если $x^{(i)}$ — решение системы, то его произведение на число α, т. е. $\alpha x^{(i)}$, также будет решением, что следует из соотношений:

$$\frac{d}{dt}(\alpha x^{(i)}) = \alpha \frac{dx^{(i)}}{dt} = \alpha A x^{(i)} = A(\alpha x^{(i)}).$$

Так как для суммы матриц и произведения матрицы на число выполняются все аксиомы линейного пространства, то с учетом полученных результатов следует, что множество всевозможных решений системы дифференциальных уравнений образует линейное пространство. Если все собственные значения матрицы A системы уравнений различны, то в качестве базиса этого пространства можно принять n решений $x^{(i)} = h^{(i)} e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда общее решение имеет следующий вид:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \cdots + c_n x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i h^{(i)} e^{\lambda_i t}.$$

4. Матричная запись решения однородной системы. Представим полученное выражение в матричной форме. Рассматривая векторы $x^{(i)}$ как столбцы матрицы X, а c_i — как элементы столбца произвольных постоянных c, запишем:

$$X = [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} = Xc.$$

В свою очередь, матрица X выражается следующим образом:

$$X = [h^{(1)}e^{\lambda_1 t},\ h^{(2)}e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ h^{(n)}e^{\lambda_n t}] =$$

$$= [h^{(1)},\ h^{(2)},\ \ldots,\ h^{(n)}] \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = H\varphi(t).$$

Здесь через H обозначена матрица n-го порядка, состоящая из столбцов $h^{(i)}$, а элементами диагональной матрицы $\varphi(t)$ являются экспоненциальные функции $e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Итак, решение нормальной однородной системы линейных дифференциальных уравнений представляется в виде:

$$x = H\varphi(t)\, c.$$

При $t = 0$ матрица $\varphi(t)$ равна единичной матрице, следовательно начальное условие $x_0 = Hc$, откуда $c = H^{-1}x_0$. Подставляя это значение c в общее решение, получаем

$$x = H\varphi(t)\, H^{-1}x_0 = \Phi(t)\, x_0.$$

Матрица n-го порядка

$$\Phi(t) = H_\varphi(t)\, H^{-1}$$

называется *фундаментальной матрицей*. Ее вычисление сводится к определению собственных значений и собственных векторов матрицы A системы дифференциальных уравнений.

5. Определение фундаментальной матрицы. В вычислительной математике задача отыскания собственных значений и векторов ставится применительно к любой квадратной матрице без непосредственной связи с дифференциальными уравнениями и называется *полной проблемой собственных значений*. Для ее решения разработано большое число различных алгоритмов, которые изложены в специальной литературе. Естественно, любой из них можно использовать для определения фундаментальной матрицы $\Phi(t)$.

Ограничимся лишь иллюстрацией использования основных соотношений при вычислении $\Phi(t)$. Матрица H, называемая *модальной матрицей*, может быть получена как совокупность n столбцов $h^{(i)}$, которые являются решениями однородных уравнений $(\lambda_i E - A)h^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ранг матрицы $(\lambda_i E - A)$ при различных собственных значениях равен $n - 1$. Действительно, так как определитель этой матрицы равен нулю, то она особенная и ее ранг не может быть больше, чем $n - 1$. В то же время он не может быть и меньше, чем $n - 1$, так как при этом все миноры $(n - 1)$-го порядка равнялись бы нулю, что означало бы кратность собствен-

ных значений. Таким образом, ранг $(\lambda_i E - A)$ точно равен $n - 1$, поэтому при вычислении столбцов модальной матрицы можно воспользоваться методом, изложенным в (4. 10).

Рассмотрим в качестве примера однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 8x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 5x_1 - 9x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 4x_1 - 6x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}.$$

Для этой системы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку для вычисления h^i необходимы алгебраические дополнения какой-либо строки матрицы $(\lambda E - A)$, то определитель этой матрицы удобно получать разложением по элементам той же строки.

Алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$\Delta_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 9 & -1 \\ 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 15;$$

$$\Delta_{12}(\lambda) = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 5\lambda + 9; \quad \Delta_{13}(\lambda) = \begin{vmatrix} -5 & \lambda + 9 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 4\lambda + 6.$$

Характеристический многочлен и собственные значения:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda^2 + 10\lambda + 15) + 8(5\lambda + 9) - 1(4\lambda + 6) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3);$$

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3.$$

Собственные векторы:

$$h^{(i)} = k_i \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_i) \\ \Delta_{12}(\lambda_i) \\ \Delta_{13}(\lambda_i) \end{bmatrix}; \quad h^{(1)} = k_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad h^{(2)} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$h^{(3)} = k_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Принимая $k_1 = \frac{1}{2}$; $k_2 = -1$ и $k_3 = -\frac{1}{6}$ (эти значения произвольны и выбираются по соображениям удобства), получаем модальную матрицу, а также обратную к ней:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная матрица

$$\Phi(t) = H\varphi(t)H^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

что после перемножения матриц приводит к следующему результату:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t} & -3e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 2e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t} & -2e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} & -e^{-t} - 4e^{-2t} + 5e^{-3t} & 2e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с соотношением $x = \Phi(t)x_0$ общее решение рассматриваемой однородной системы дифференциальных уравнений:

$$x_1 = (3e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t})\,x_{10} + (-3e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t})\,x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t})\,x_{30};$$

$$x_2 = (2e^{-t} + e^{-2t} - 3e^{-3t})\,x_{10} + (-2e^{-t} - 2e^{-2t} + 5e^{-3t})\,x_{20} + (e^{-2t} - e^{-3t})\,x_{30};$$

$$x_3 = (e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t})\,x_{10} + (-e^{-t} - 4e^{-2t} + 5e^{-3t})\,x_{20} + (2e^{-2t} - e^{-3t})\,x_{30},$$

где x_{10}, x_{20}, x_{30} — элементы вектора x_0, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t = 0$.

6. Экспоненциальная функция от матрицы. Воспользовавшись разложением в степенной ряд экспоненциальной функции от скалярной переменной

$$e^{\lambda t} = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^s}{s!},$$

представим функциональную матрицу $\varphi(t)$ в виде:

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^s}{s!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n t)^s}{s!}\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^s}{s!}\begin{bmatrix} \lambda_1^s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^s\end{bmatrix}.$$

Диагональную матрицу под знаком суммы можно рассматривать как результат возведения в s-ю степень диагональной матрицы Λ, элементами которой являются собственные числа матрицы A, т. е.

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}; \quad \Lambda^s=\begin{bmatrix} \lambda_1^s & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^s\end{bmatrix}.$$

Таким образом, по аналогии со скалярным случаем можно записать:

$$\varphi(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Lambda^s t^s}{s!}=e^{\Lambda t}=\exp(\Lambda t),$$

т. е. матрица $\varphi(t)$ представляет собой экспоненциальную функцию от матрицы Λt.

Выясним характер фундаментальной матрицы $\Phi(t)$. Подставляя решение в однородное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt}=Ax$, получаем тождества:

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t)x_0]=A\Phi(t)x_0; \quad \frac{d\Phi(t)}{dt}x_0=A\Phi(t)x_0.$$

Так как в этих тождествах x_0 — вектор начальных значений не зависящий от времени, то $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$, т. е. $\Phi(t)$ — это такая матрица, производная которой по времени равна произведению матрицы A на саму матрицу. Аналогичными свойствами обладает единственная скалярная функция $\exp(at)$, поэтому интуиция подсказывает соотношения:

$$\Phi(t)=e^{At}; \quad \frac{d\Phi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=A\Phi(t).$$

Можно привести и более строгие соображения в пользу этих соотношений. Подставив $\Phi(t) = H\varphi(t)H^{-1}$ в тождество $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, имеем:

$$\frac{\partial}{dt}(H\varphi(t)H^{-1}) = A(H\varphi(t)H^{-1}); \quad H\frac{\partial\varphi(t)}{dt}H^{-1} = AH\varphi(t)H^{-1}.$$

Умножая слева на H^{-1} и справа на H, получаем:

$$\frac{\partial\varphi(t)}{dt} = H^{-1}AH\varphi(t); \quad \Lambda\varphi(t) = (H^{-1}AH)\varphi(t).$$

Здесь дифференцирование диагональной матрицы выполнено по формуле $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\exp(\Lambda t) = \Lambda\exp(\Lambda t)$, справедливость которой вытекает из следующего:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d}{dt}e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} = \Lambda\varphi(t) = \Lambda e^{\Lambda t}.$$

В результате получаем важные соотношения, устанавливающие связь между матрицами Λ и A посредством модальной матрицы H:

$$\Lambda = H^{-1}AH; \quad A = H\Lambda H^{-1}.$$

Как видно, любая квадратная матрица A, все собственные значения которой различны, преобразуется в диагональную матрицу, элементами которой являются эти собственные значения. Это частный случай *преобразования подобия*, которое играет большую роль в теории матриц и ее приложениях. Воспользуемся полученными соотношениями для представления $\Phi(t)$ в экспоненциальной форме. Так как $\Phi(t) = H\varphi(t)H^{-1}$, то

$$\Phi(t) = H\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Lambda^s t^s}{s!}H^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^s}{s!}(H\Lambda^s H^{-1}).$$

Но $\Lambda^s = \Lambda\Lambda^{s-1} = (H^{-1}AH)\ \Lambda\Lambda^{s-2} = (H^{-1}AH)\ (H^{-1}AH)\ \ldots$ $(H^{-1}AH) = H^{-1}A\,(HH^{-1})\,A\,(HH^{-1})\,A\ \ldots\ AH = H^{-1}A^sH$. Следовательно,

$$\Phi(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s t^s}{s!} = e^{At}.$$

Вообще, экспоненциальную функцию от любой квадратной матрицы X можно представить в виде сходящегося ряда:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots = \sum^{\infty} \frac{X^s}{s!}.$$

Обратной к матрице e^X является функциональная матрица

$$(e^X)^{-1} = e^{-X} = 1 - X + \frac{X^2}{2!} - \frac{X^3}{3!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{X^s}{s!}.$$

Дифференцирование экспоненциальной функции от матрицы выполняется по обычному правилу

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

Следует иметь в виду, что вообще $e^X e^Y \neq e^Y e^X$, причем соотношение $e^X e^Y = e^{X+Y}$ имеет смысл только в случаях, когда X и Y — перестановочные матрицы. Через экспоненциальную функцию выражаются также другие функции от матриц:

$$\sin X = \frac{1}{2i}(e^{iX} - e^{-iX}); \quad \cos X = \frac{1}{2}(e^{iX} + e^{-iX});$$

$$\operatorname{sh} X = \frac{1}{2}(e^X - e^{-X}); \quad \operatorname{ch} X = \frac{1}{2}(e^X + e^{-X});$$

$$e^{iX} = \cos X + i \sin X; \quad e^{-iX} = \cos X - i \sin X.$$

Разложение в ряд также используется для вычисления $\Phi(t) = \exp(At)$, так как доказано, что этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

7. Преобразование подобия и замена переменных. Преобразование подобия $\Lambda = H^{-1}AH$ приводит матрицу A с различными собственными значениями к диагональной форме Λ (к диагональной форме приводятся и некоторые другие типы матриц, например симметричные). Так как экспоненциальная функция от диагональной матрицы определяется без труда, то при вычислении экспоненциальной функции от матрицы удобно пользоваться соотношением:

$$\exp(At) = H \exp(\Lambda t) H^{-1}.$$

В то же время H можно рассматривать как матрицу преобразования переменных дифференциального уравнения, т. е. $x = Hy$, где y — новый вектор неизвестных функций. Подставив x в исходное уравнение, получим:

$$H\frac{\partial y}{dt} = AHy; \quad \frac{\partial y}{dt} = (H^{-1}AH)\,y; \quad \frac{dy}{dt} = \Lambda y,$$

т. е. замена переменных приводит к дифференциальному уравнению с диагональной матрицей Λ. Фундаментальная матрица при этом будет также диагональна и решение получаем в виде:

$$y = e^{\Lambda t}y_0; \quad y_0 = H^{-1}x_0$$

Преобразование $x = Hy$ можно рассматривать как переход к новому базису n-мерного пространства с *нормальными координатами*. Значение этого преобразования состоит в том, что исходная система уравнений «развязывается» относительно новых переменных. Действительно, представив преобразованное уравнение $\frac{dy}{dt} = \Lambda y$ в развернутом виде

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 & & & \\ & \lambda_2 y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n y_n \end{bmatrix},$$

найдем:

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1; \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2; \quad \dots; \quad \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n.$$

Соответственно и в решении относительно преобразованных координат собственные значения не связаны между собой:

$$y_1 = y_{10}e^{\lambda_1 t}; \; y_2 = y_{20}e^{\lambda_2 t}; \; \dots; \; y_n = y_{n0}e^{\lambda_n t}.$$

Такая форма представляет существенные удобства при анализе линейных дифференциальных систем. Так, для примера из (5) имеем:

$$y_1 = y_{10}e^{-t}; \quad y_2 = y_{20}e^{-2t}; \quad y_3 = y_{30}e^{-3t},$$

где начальные значения

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} - x_{20} \\ x_{10} - 2x_{20} + x_{30} \\ -3x_{10} + 5x_{20} - x_{30} \end{bmatrix}.$$

Переходим к исходным функциям:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 + & y_2 + y_3 \\ 2y_1 + & y_2 + y_3 \\ y_1 + & 2y_2 + y_3 \end{bmatrix}.$$

$$x_1 = (x_{10} - x_{20})\, 3e^{-t} + (x_{10} - 2x_{20} + x_{30})\, e^{-2t} + \\ + (-3x_{10} + 5x_{20} - x_{30})\, e^{-3t},$$

$$x_2 = (x_{10} - x_{20})\, 2e^{-t} + (x_{10} - 2x_{20} + x_{30})\, e^{-2t} + \\ + (-3x_{10} + 5x_{20} - x_{30})\, e^{-3t};$$

$$x_3 = (x_{10} - x_{20})\, e^{-t} + (x_{10} - 2x_{20} + x_{30})\, 2e^{-2t} + \\ + (-3x_{10} + 5x_{20} - x_{30})\, e^{-3t}.$$

Эти выражения можно получить из решения в (5) группированием слагаемых относительно экспонент.

8. Неоднородная система уравнений. Будем искать решение неоднородной системы дифференциальных уравнений в матричной форме $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ в виде $x(t) = \exp(At)\xi(t)$, где $\xi(t)$ — векторная функция времени, подлежащая определению. Подставляя выражение для $x(t)$ и ее производной в исходное уравнение, имеем:

$$Ae^{At}\xi(t) + e^{At}\frac{d\xi(t)}{dt} = Ae^{At}\xi(t) + f(t)$$

или после очевидных упрощений

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = e^{-At} f(t).$$

При начальных условиях $x(0) = x_0$ начальное значение искомой функции $\xi(0) = [\exp(-At)\, x(t)]_{t=0} = x_0$. Интегрированием получаем

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Используя это выражение, находим решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$,

$$x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau\right) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

которое совпадает с выражением, приведенным в (1), и называется *формулой Коши*. Его можно рассматривать как сумму решения соответствующего однородного уравнения (при $f(t) = 0$) и решения

неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях ($x_0 = 0$).

Пусть дана неоднородная система дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -2x_2 + 3t\\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + 4\end{aligned}\right\}.$$

Найдем фундаментальную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4;$$

$$\lambda_1 = 2i; \quad \lambda_2 = -2i; \quad \Delta_{11}(\lambda) = \lambda; \quad \Delta_{12}(\lambda) = 2;$$

$$h^{(1)} = k_1 \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) \\ \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2i \\ 2 \end{bmatrix}; \quad h^{(2)} = k_2 \begin{bmatrix} -2i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Полагая $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, имеем:

$$H = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix};$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i(e^{2it} + e^{-2it}) & -(e^{2it} - e^{-2it}) \\ e^{2it} - e^{-2it} & i(e^{2it} + e^{-2it}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Решение задачи Коши для однородной системы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10}\cos 2t - x_{20}\sin 2t \\ x_{10}\sin 2t + x_{20}\cos 2t \end{bmatrix}.$$

Найдем интеграл в выражении для частного решения неоднородной системы при $x_0 = 0$:

$$\int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\tau \\ 4 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 3\tau\cos 2\tau + 4\sin 2\tau \\ -3\tau\sin 2\tau + 4\cos 2\tau \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4}\cos 2t + \frac{3}{2}t\sin 2t + \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t\cos 2t \end{bmatrix}.$$

Частное решение неоднородной системы:

$$e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-\frac{5}{4}\cos 2t+\frac{3}{2}t\sin 2t+\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\cos 2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение неоднородной системы, удовлетворяющей начальным условиям $x(0)=x_0$, запишется следующим образом:

$$x = \begin{bmatrix}x_{10}\cos 2t - x_{20}\sin 2t\\ x_{10}\sin 2t + x_{20}\cos 2t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\left(x_{10}+\frac{5}{4}\right)\cos 2t - x_{20}\sin 2t - \frac{5}{4}\\ \left(x_{10}+\frac{5}{4}\right)\sin 2t + x_{20}\cos 2t + \frac{3}{2}t\end{bmatrix}.$$

9. Модальная матрица. Значение этой матрицы в теории дифференциальных уравнений и других приложениях столь велико, что она заслуживает более детального рассмотрения. Обозначим характеристическую матрицу $[\lambda E - A]$ через $F(\lambda)$ и присоединенную к ней Adj $[\lambda E - A]$ — через $G(\lambda)$. В соответствии с (3.1) $F(\lambda)G(\lambda) = G(\lambda)F(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, где $\Delta(\lambda) = \det[\lambda E - A]$. Для значений $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\Delta(\lambda_i) = 0$ и, следовательно, $F(\lambda_i)G(\lambda_i) = 0$. Это матричное уравнение распадается на n уравнений относительно столбцов $g_i^{(j)}$ матрицы $G(\lambda_i)$:

$$F(\lambda_i)g_i^{(1)} = 0,\ F(\lambda_i)g_i^{(2)} = 0,\ \ldots,\ F(\lambda_i)g_i^{(n)} = 0,$$

решения которых с точностью до постоянных совпадают с решением однородного уравнения, рассмотренного в (2). Отсюда следует вывод, что в матрице $G(\lambda_i)$ ранга единицы все столбцы пропорциональны, поэтому любой ненулевой из них (или произведение его на произвольное число) можно принять в качестве столбца $h^{(i)}$ модальной матрицы H. Сама матрица $G(\lambda_i)$ при этом имеет вид

$$G(\lambda_i) = [h^{(i)}\nu_{i1},\ h^{(i)}\nu_{i2},\ \ldots,\ h^{(i)}\nu_{in}] = h^{(i)}[\nu_{i1},\ \nu_{i2},\ \ldots,\ \nu_{in}] = h^{(i)}\nu_{(i)},$$

где числа $\nu_{i1}, \nu_{i2}, \ldots, \nu_{in}$ — коэффициенты пропорциональности между столбцами матрицы $G(\lambda_i)$ и собственными векторами $h^{(i)}$; $\nu_{(i)}$ — строка, элементами которой являются эти числа.

Таким образом, для определения модальной матрицы H можно воспользоваться присоединенной матрицей $G(\lambda)$, причем векторы $h^{(i)}$ получаются подстановкой $\lambda = \lambda_i$ в $G(\lambda)$ и выбором из $G(\lambda_i)$ одного из столбцов или пропорционального ему столбца. Этот путь представляется избыточным, так как для решения этой задачи достаточно располагать одним столбцом матрицы $G(\lambda)$, совпадающим с соответствующей строкой матрицы алгебраических дополнений (5). Однако, как будет показано дальше, $G(\lambda)$ понадобится и для получения обратной модальной матрицы H^{-1}. Для вычисления $G(\lambda_i)$ существуют различные методы. Один из них основан на соотношении

$$G(\lambda_j) = (-1)^{n-1} \prod_{i \neq j} F(\lambda_i).$$

Так, для примера из (5) имеем $(\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3)$:

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix};$$

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 10\lambda + 15 & -8\lambda - 14 & \lambda + 1 \\ 5\lambda + 9 & \lambda^2 - 3\lambda - 8 & \lambda + 1 \\ 4\lambda + 6 & -6\lambda - 8 & \lambda^2 + 5\lambda + 4 \end{bmatrix};$$

$$G(-1) = F(-2)\,F(-3) = \begin{bmatrix} -6 & 8 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ -5 & 6 & -1 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G(-2) = F(-1)\,F(-3) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix};$$

$$G(-3) = F(-1)\,F(-2) = \begin{bmatrix} -6 & 10 & -2 \\ -6 & 10 & -2 \\ -6 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Приняв модальные столбцы пропорциональными столбцам каждой из полученных матриц, получим

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом

$$G(-1) = h^{(1)}\nu_{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [2,\ -2,\ 0];$$

$$G(-2) = h^{(2)}\nu_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [-1,\ 2,\ -1];$$

$$G(-3) = h^{(3)}\nu_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-6,\ 10,\ -2].$$

Строки $\nu_{(1)}$, $\nu_{(2)}$, $\nu_{(3)}$ образуют матрицу констант

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Интересно отметить, что $NH = D$, где D — диагональная матрица с элементами $\Delta'(\lambda_i)$, которые равны значениям производной $\Delta(\lambda)$ по λ при $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Действительно, в нашем примере $\Delta'(\lambda) = 3\lambda^2 + 12\lambda + 11$ и $\Delta'(-1) = 2$; $\Delta'(-2) = -1$; $\Delta'(-3) = 2$. В то же время

$$NH = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta'(\lambda_1) & & \\ & \Delta'(\lambda_2) & \\ & & \Delta'(\lambda_3) \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что это соотношение всегда имеет место, если все собственные значения различны. Обращая обе его части $H^{-1}N^{-1} = D^{-1}$ и умножая справа на N, находим

$$H^{-1} = D^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\Delta'(\lambda_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{(1)} \\ \cdots \\ \nu_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)}\nu_{(1)} \\ \cdots \\ \frac{1}{\Delta'(\lambda_n)}\nu_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Итак, обращение модальной матрицы при известной матрице N сводится в основном к вычислению значений производной опреде-

лителя для различных собственных значений. В рассматриваемом примере:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 10 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

10. Формула Коши. Используем полученное в (7) соотношение для фундаментальной матрицы $\Phi(t) = He^{\Lambda t}H^{-1}$. Обозначив через $h^{(i)}$ столбцы матрицы H и через $\tilde{h}_{(i)}$ — строки матрицы H^{-1}, запишем:

$$\Phi(t) = [h^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ h^{(n)}e^{\lambda_n t}] \begin{bmatrix} \tilde{h}_{(1)} \\ \cdots \\ \tilde{h}_{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} h^{(i)}e^{\lambda_i t}\tilde{h}_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} h^{(i)}\tilde{h}_{(i)}e^{\lambda_i t}.$$

Как следует из $H^{-1} = D^{-1}N$, i-я строка матрицы H^{-1} имеет вид:

$$\tilde{h}_{(i)} = \frac{\nu_{(i)}}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

Тогда

$$h^{(i)}\tilde{h}_{(i)} = h^{(i)}\nu_{(i)}\frac{1}{\Delta'(\lambda_i)} = \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

Это важное соотношение позволяет представить фундаментальную матрицу формулой:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{n} \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}.$$

Решение задачи Коши для однородной системы линейных дифференциальных уравнений получаем в виде:

$$x(t) = \Phi(t)\, x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} x_0,$$

где x_0 — вектор начальных значений неизвестных при $t_0 = 0$.

Приведем к соответствующему виду частное решение при нулевых начальных значениях. Интеграл в формуле Коши (8) преобразуем следующим образом:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = \int_0^t He^{\Lambda(t-\tau)}H^{-1} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t [h^{(1)}e^{\lambda_1(t-\tau)}, \; \ldots, \; h^{(n)}e^{\lambda_n(t-\tau)}] \begin{bmatrix} \tilde{h}_{(1)} \\ \cdots \\ \tilde{h}_{(n)} \end{bmatrix} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^n h^{(i)}\tilde{h}_{(i)} e^{\lambda_i(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = \sum_{i=1}^n \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Записав сумму полученных решений, получим выражение для формулы Коши

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} f(\tau)\, d\tau \right),$$

или

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{G(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \left(x_0 e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \right).$$

Решим, например, уравнения электрической схемы (рис. 80, a) при $L = 1$ Г, $C = 0{,}5$ Ф, $R = 3$ Ом и входном воздействии в виде единичной ступенчатой функции $e(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $e(t) = 0$ при $t < 0$ (рис. 80, $б$):

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u(t) = e(t);$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}.$$

Рис. 80. Электрическая схема (a) и график входного воздействия ($б$).

Преобразовав к нормальной форме и подставив значения параметров, получим

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для рассматриваемой системы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}; \quad f(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определим присоединенные матрицы и производные характеристического определителя для собственных значений:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2; \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2;$$
$$\Delta'(\lambda) = 2\lambda + 3; \quad \Delta'(\lambda_1) = 1; \quad \Delta'(\lambda_2) = -1;$$

$$G(\lambda_1) = -F(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad G(\lambda_2) = -F(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле Коши имеем

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} \left(\begin{bmatrix} i(0) \\ u(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} i(0) \\ u(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{2\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \right),$$

что приводит к решению ($t \geqslant 0$):

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ u\ t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(0) \\ u(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

11. Уравнение n-го порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = \xi(t).$$

Задача Коши для такого уравнения состоит в отыскании решения $x(t)$, удовлетворяющего начальным условиям при $t = 0$,

$$x = x_0, \ \frac{dx}{dt} = x_0', \ \ldots, \ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x_0^{(n-1)}.$$

Уравнение n-го порядка приводится к нормальной форме серией подстановок:

$$x = x_1; \ \frac{dx}{dt} = x_2; \ \ldots; \ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x^n.$$

Тогда получаем эквивалентную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \ \ldots, \ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \xi(t) \end{array} \right\}.$$

В матричной записи эта система имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица

$$F(\lambda) = (\lambda E - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы раскроем по элементам последней строки. После удаления этой строки и j-го столбца получаем определитель, элементы которого выше главной диагонали равны нулю, а по главной диагонали располагаются $j - 1$ элементов λ и $n - j$ элементов, равных -1. Следовательно, алгебраические дополнения элементов последней строки

$$\Delta_{nj}(\lambda) = (-1)^{n+j}(-1)^{n-j}\lambda^{j-1} = \lambda^{j-1} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и характеристическое уравнение получаем в виде:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Заметим, что это уравнение можно получить непосредственно из однородного дифференциального уравнения n-го порядка заменой операторов дифференцирования $\frac{d^i}{dt^i}$ на λ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Воспользовавшись выражениями для $\Delta_{nj}(\lambda)$ запишем модальную

матрицу, которая в случае различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ принимает стандартную форму:

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{n1}(\lambda_1) & \Delta_{n1}(\lambda_2) & \cdots & \Delta_{n1}(\lambda_n) \\ \Delta_{n2}(\lambda_1) & \Delta_{n2}(\lambda_2) & \cdots & \Delta_{n2}(\lambda_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{nn}(\lambda_1) & \Delta_{nn}(\lambda_2) & \cdots & \Delta_{nn}(\lambda_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы известен под названием *определитель Вандермонда*.

Так как решением однородного дифференциального уравнения n-й степени является только первый элемент $x_1 = x$ общего решения $H\exp(\Lambda t)H_{x_0}^{-1} = H\exp(\Lambda t)c$, то при перемножении матриц достаточно использовать только первую сроку H, все элементы которой равны единице, т. е.

$$x = [1, \ 1, \ \ldots, \ 1] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \cdots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \cdots \\ x_0^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}.$$

Следует заметить, что обращение модальной матрицы H всегда возможно, ибо определитель Вандермонда не равен нулю.

12. Формула Коши для неоднородного уравнения n-го порядка. Выражение для первого элемента $x_1 = x$ получим, заменив в формуле Коши (10) матрицу $G(\lambda_i)$ ее первой строкой $g_{(1)} = [g_{11}, \ldots, g_{1n}]$, т. е.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_{(1)}(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)} \left(x_0 e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \right).$$

Найдем общее выражение для элементов первой строки $g_{(1)}$ присоединенной матрицы $G(\lambda) = \mathrm{Adj}\,[\lambda E - A]$. На основании соотношения $G(\lambda)F(\lambda) = \Delta(\lambda)E$ можно записать:

$$[g_{11},\ g_{12},\ \ldots,\ g_{1n}]\begin{bmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \lambda + a_1 \end{bmatrix} = [\Delta(\lambda),\ 0,\ \ldots,\ 0].$$

Отсюда получаем систему уравнений относительно подлежащих определению элементов g_{1j} $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ первой строки матрицы $G(\lambda)$:

$$g_{11}\lambda + g_{1n}a_n = \Delta(\lambda);$$
$$-g_{1j} + g_{1,\,j+1}\lambda + g_{1n}a_{n-j} = 0\ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2);$$
$$-g_{1,\,n-1} + g_{1n}(\lambda + a_1) = 0.$$

Рис. 81. Процесс образования элементов g_{1j} $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Так как $g_{1n} = \Delta_{n1}(\lambda) = 1$, то приходим к рекуррентной формуле

$$g_{1j} = g_{1,\,j+1}\lambda + a_{n-j}$$
$$(j = n-1,\ \ldots,\ 1).$$

Элемент g_{1j} представим в общем виде

$$g_{1j} = \lambda^{n-j} + a_1\lambda^{n-j-1} + \cdots + a_{n-j-1}\lambda + a_{n-j}.$$

Это выражение соответствует и первому уравнению. Действительно,

$$g_{11} = \frac{1}{\lambda}(\Delta(\lambda) - a_n) = \frac{1}{\lambda}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n - a_n) = $$
$$= \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1},$$

что совпадает с приведенным выше при $j = 1$. Процесс образования элементов g_{1j} можно представить как последовательный сдвиг коэффициентов характеристического уравнения $\Delta(\lambda)$ (рис. 81).

Полученные результаты позволяют записать формулу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка следующим образом:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)}\left(g_{(1)}(\lambda_i)\,x_0 e^{\lambda_i t} + g_{(1)}(\lambda_i)\int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\right).$$

Заменив произведение строки $g_{(i)}$ на столбец x_0 начальных значений суммой и учтя, что все элементы столбца $f(\tau)$, кроме последнего, равны нулю и $g_{1n} = 1$, получим окончательно

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}(\lambda_i) x_0^{(j-1)} e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \xi(\tau)\, d\tau \right).$$

Найдем, например, решение данного ниже уравнения при начальных условиях $x_0 = 2$; $x_0' = 5$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 36t.$$

Определим величины, входящие в общую формулу:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3); \quad \lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = -3;$$
$$\Delta'(\lambda) = 2\lambda + 5; \quad \Delta'(\lambda_1) = 1; \quad \Delta'(\lambda_2) = -1;$$
$$g_{11} = \lambda + 5; \quad g_{12} = 1; \quad g_{11}(\lambda_1) = 3; \quad g_{11}(\lambda_2) = 2;$$
$$g_{12}(\lambda_1) = g_{21}(\lambda_2) = 1.$$

По формуле имеем

$$x(t) = (3x_0 + x_0')e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 36\tau\, d\tau - (2x_0 + x_0')\, e^{-3t} -$$
$$- \int_0^t e^{-3(t-\tau)} 36\tau\, d\tau = (3x_0 + x_0' + 9)\, e^{-2t} -$$
$$- (2x_0 + x_0' + 4)\, e^{-3t} + 6t - 5,$$

откуда при заданных начальных значениях получаем решение задачи Коши:

$$x(t) = 20e^{-2t} - 13e^{-3t} + 6t - 5.$$

Алгебраические дополнения последней строки характеристической матрицы $F(\lambda)$, полученные в (11), являются по определению элементами последнего столбца $g^{(n)}$ присоединенной матрицы $G(\lambda)$, т. е. $g_{jn} = \Delta_{nj}(\lambda) = \lambda^{j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Они же приняты в качестве общего выражения элементов столбца модальной матрицы H. Поэтому можно записать присоединенную матрицу как $G(\lambda) = g^{(n)}(\lambda)\, g_1(\lambda)$. Строки $g_{(1)}(\lambda_1)$, $g_{(1)}(\lambda_2), \ldots, g_{(1)}(\lambda_n)$ обра-

зуют матрицу N и, следовательно, обратная модальная матрица может быть получена из соотношения:

$$H^{-1} = D^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)} g_{(1)}(\lambda_1) \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{\Delta'(\lambda_n)} g_{(1)}(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Так, для нашего примера

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)} g_{11}(\lambda_1) & \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)} g_{12}(\lambda_1) \\ \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)} g_{11}(\lambda_2) & \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)} g_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Действительно, проверка подтверждает правильность полученного результата

$$HH^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Приведение системы уравнений к нормальной форме. Если система дифференциальных уравнений первого порядка задана в произвольной форме

$$\left.\begin{aligned} q_{11}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + q_{1n}\frac{dx_n}{dt} &= w_{11}x_1 + \cdots + w_{1n}x_n + \\ &+ u_{11}v_1(t) + \cdots + u_{1m}v_m(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + q_{nn}\frac{dx_n}{dt} &= w_{n1}x_1 + \cdots + w_{nn}x_n + \\ &+ u_{n1}v_1(t) + \cdots + u_{nm}v_m(t) \end{aligned}\right\},$$

где $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ — m задающих функций времени.

В матричной записи эта система имеет вид:

$$Q\frac{dx}{dt} = Wx + Uv.$$

Приведение ее к нормальной форме означает преобразование матрицы Q в единичную, что можно осуществить умножением уравнения слева на Q^{-1}, если $\det Q \neq 0$. Тогда находим

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv,$$

где $A = Q^{-1}W$ и $B = Q^{-1}U$.

В общем случае более целесообразно применить процедуру исключения Гаусса-Жордана (4.3) к матрице $[Q, W, U]$ по столбцам матрицы Q. В результате получим матрицу $[1, A, B]$, которая и определяет нормальную форму исходной системы дифференциальных уравнений. Пример:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Преобразование матрицы (Q, W, U) выполняется следующим образом:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & -6 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & 4 & 4 & -2 & 6 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -10 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Эквивалентная система уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} v(t).$$

Если матрица Q особенная, то в процессе исключения в этой матрице образуется нулевая строка, которая указывает на алгебраическую зависимость переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Производная одной из них может быть исключена. Для этого алгебраическое уравнение, соответствующее нулевой строке матрицы Q, дифференцируется, из него определяется производная исключаемой переменной, которая, наряду с самой переменной, подставляется в остальные уравнения. Затем процедура исключения продолжается.

Видоизменим, например, матрицу Q так, чтобы она была особенной и проведем исключение

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & -1 & -6 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 4 & 4 & -2 & 6 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & -6 & 3 \end{array}\right].$$

Преобразованная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4v_1 + 2v_2 \\ &\frac{dx_2}{dt} + 2\frac{dx_3}{dt} = 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 4v_1 - 3v_2 \\ &0 = -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6v_1 + 3v_2 \end{aligned}\right\}.$$

Последнее уравнение не содержит производных и указывает на зависимость переменных x_1, x_2 и x_3. Выразим из него одну из переменных (например, x_2)

$$x_2 = -x_1 + \frac{2}{3}x_3 - 2v_1 + v_2$$

и продифференцируем это выражение

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{2}{3}\frac{dx_3}{dt} - 2\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt}.$$

Подставляя значение x_2 и ее производной в остальные уравнения, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + \frac{16}{3}x_3 - 6v_1 + 7v_2 \\ &-\frac{dx_1}{dt} + \frac{8}{3}\frac{dx_3}{dt} = 10x_1 - \frac{20}{3}x_3 + 10v_1 - 10v_2 + 2\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} \end{aligned}\right\},$$

или в матричной записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & \frac{16}{3} \\ 10 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \end{bmatrix}.$$

Как видим, в правой части системы появились производные задающих функций и уравнения принимают более общую форму:

$$Q\frac{dx}{dt} = Wx + Uv + U'\frac{dv}{dt}.$$

Процедура исключения продолжается над матрицей $[Q, W, U, U']$ по столбцам матрицы Q:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & -7 & \frac{16}{3} & -6 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} & 10 & -\frac{20}{3} & 10 & -10 & 2 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & -7 & \frac{16}{3} & -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \end{array}\right].$$

Таким образом, приходим к системе в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -7x_1 + \frac{16}{3}x_3 - 6v_1 + 7v_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{9}{8}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}v_1 - \frac{9}{8}v_2 + \frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} - \frac{3}{8}\frac{dv_2}{dt} \end{aligned}\right\}.$$

Если в процессе исключения появляется нулевая строка во всей матрице $[Q, W, U]$, то это свидетельствует о неопределенности системы. Если же в какой-либо строке элементы матриц Q и W нулевые, а некоторые из элементов матрицы U в этой строке отличны от нуля, то система несовместна. Очевидно, условием совместимости является равенство рангов матриц $[Q, W]$ и $[Q, W, U]$.

В общем случае система линейных уравнений может включать и производные высших порядков. Устранение высших производных осуществляется заменой переменных и введением дополнительных уравнений подобно тому, как это делалось в (12) при приведении к нормальной форме уравнения n-го порядка.

В настоящем параграфе рассмотрен простейший класс дифференциальных уравнений при условии, что все нули характеристического многочлена различны. В случае кратных корней структура решения усложняется. Соответствующий аппарат удобно рассматривать на языке теории функций от матриц, основы которой излагаются в следующем параграфе.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Для данной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

а) запишите характеристическую матрицу $F(\lambda) = (\lambda E - A)$;
б) выразите алгебраические дополнения матрицы $F(\lambda)$ и запишите присоединенную матрицу $G(\lambda) = \mathrm{Adj}(\lambda E - A)$;
в) представьте определитель $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ как многочлен от λ;

г) из решения уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ найдите собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A.

2. Для матрицы из задачи 1:

а) определите собственные векторы $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$, используя алгебраические дополнения элементов какой-либо строки матрицы;

б) запишите модальную матрицу H и найдите обратную к ней H^{-1};

в) проверьте соотношения $\Lambda = H^{-1}AH$ и $A = H\Lambda H^{-1}$, где $\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$.

3. Запишите в матричной форме однородную систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{aligned}\right\}.$$

Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, найдите:

а) общее решение этой системы в векторной форме $x = H\varphi(t)c$ и выражения для переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$;

б) фундаментальную матрицу $\Phi(t) = H\varphi(t)H^{-1}$;

в) решение системы при начальных значениях $x_{10} = 3$, $x_{20} = -2$, $x_{30} = 0$.

4. Решите систему дифференциальных уравнений из задачи 3 с помощью преобразования переменных $x = Hy$. Запишите решения для векторов y и x, а также выразите переменные y_1, y_2, y_3 при начальных значениях x_{10}, x_{20}, x_{30}.

5. Запишите решение системы дифференциальных уравнений из задачи 3 с помощью формулы Коши.

6. Решите неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_2 + 2e^t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 2x_2 - 3e^{4t} \end{aligned}\right\}$$

при начальных значениях $x_{10} = 2$ и $x_{20} = -1$ с помощью а) фундаментальной матрицы; б) формулы Коши.

7. Приведите однородное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

к нормальной форме и покажите, что решение полученной системы при начальных значениях $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Как записать решение исходного уравнения?

8. Покажите, что уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 4e^t$$

при начальных условиях $x(0) = 4$ и $x'(0) = -3$ имеет решение

$$x = 2\cos t - 5\sin t + 2e^t.$$

9. Дана система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 33 & 20 & 18 & 7 \\ -24 & -16 & -9 & -9 \\ 43 & 28 & 11 & 20 \\ -21 & -14 & -4 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

а) Покажите, что данная система приводится к нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -5 & 2 \\ -6 & -4 & 0 & -4 \\ -6 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ -12 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

б) Определите фундаментальную матрицу $\Phi(t) = H\varphi(t)H^{-1}$ нормальной системы и найдите решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = (1;\ 0;\ 0;\ 0)$.

в) Получите решение системы при тех же начальных условиях по формуле Коши.

6. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

1. Многочлены и матрицы. Функции от матриц — это один из важнейших и, пожалуй, наиболее сложных разделов теории матриц.

В предыдущем параграфе на примере дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами был выяснен смысл экспоненциальной функции от матрицы и установлена ее связь с проблемой собственных значений для простого случая, когда все они различны. В интересах многочисленных приложений следует обобщить понятие функции от матрицы и снять ограничения на характер собственных значений.

Подобно тому, как всякая аналитическая функция $f(x)$ может быть представлена сходящимся рядом (многочленом) от x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s,$$

функция от матрицы $f(X)$ представима в виде *многочлена от матрицы* (1.7), который формально получается заменой скалярной переменной x матрицей X:

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = \sum_{s=1}^{\infty} a_s X^s.$$

Например,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots; \quad \sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \cdots$$

Если ряд сходится достаточно быстро, то функцию от матрицы можно вычислить суммированием членов. Однако часто такой путь связан с огромными вычислительными трудностями. Кроме того, из поля зрения ускользают общие свойства и закономерности, которые нередко имеют первостепенное значение. Аппарат аналитической теории функций от матриц содержит методы их компактного представления, которые могут использоваться для вычисления таких функций.

Различные способы представления и определения функции от матрицы $f(X)$ сводятся в основном к двум подходам:

1) разложение функции $f(X)$ в ряд приводится к более простому виду, для которого можно найти эффективные методы ее определения;

2) матрица X преобразуется к некоторой другой матрице $\tilde{X}$, для которой $f(X)$ выражается просто через скалярные функции (например, в (5. 6) было использовано преобразование к диагональной матрице).

При изложении этих вопросов приходится иметь дело с различными многочленами. Многочлен от скалярной переменной x называют *скалярным многочленом*. Многочлен от матрицы, в котором роль переменной x играет матрица X, является стандартной формой представления функции от матрицы $f(X)$. Его не следует смешивать с *матричным многочленом*, который может быть формально получен из скалярного многочлена заменой его коэффициентов числовыми матрицами одного и того же размера:

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

Матричный многочлен может быть представлен *многочленной матрицей (λ-матрицей)*, элементы которой являются многочленами относительно скалярной переменной x (или λ). К этому типу матриц относятся, в частности, характеристическая и присоединенная матрицы. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}; \quad F(\lambda) = [\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 8 & -1 \\ -5 & \lambda + 9 & -1 \\ -4 & 6 & \lambda + 1 \end{bmatrix};$$

$$G(\lambda) = \mathrm{Adj}\,[\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 10\lambda + 15 & -8\lambda - 14 & \lambda + 1 \\ 5\lambda + 9 & \lambda^2 - 3\lambda - 8 & \lambda + 1 \\ 4\lambda + 6 & -6\lambda - 8 & \lambda^2 + 5\lambda + 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 10 & -8 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 15 & -14 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3).$$

Здесь $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — многочленные матрицы, которые могут быть представлены в виде матричных многочленов; $\Delta(\lambda)$ — скалярный многочлен от λ. Экспоненциальная функция от A выражается многочленом от матрицы A:

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}^2 + \cdots$$

Замена в матричном многочлене скалярной переменной на матрицу приводит к многочлену от матрицы с матричными коэффициентами, причем вследствие некоммутативности матричного произведения различают правое $F(X)$ и левое $\hat{F}(X)$ значения:

$$F(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \cdots;$$

$$\widehat{F}(X) = A_0 + XA_1 + X^2A_2 + X^3A_3 + \cdots$$

Пусть $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — многочленные матрицы одинаковых порядков, выражающиеся как матричные многочлены соответственно степени m и n. Их произведение

$$M(\lambda) = P(\lambda)\,Q(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} P_i\lambda^i \sum_{j=0}^{n} Q_i\lambda^j \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_iQ_j\lambda^{i+j}.$$

Ясно, что замена скаляра λ на матрицу X допустима только при условии, что X — перестановочна со всеми матричными коэффициентами P_i и Q_i ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Соответственно получим правое и левое произведения:

$$M(A) = P(A)\,Q(A); \quad \widehat{M}(A) = \widehat{P}(A)\,\widehat{Q}(A).$$

2. Теорема Кэли—Гамильтона. Пусть функция от матрицы A выражается многочленом $f(A)$, которому соответствует скалярный многочлен $f(\lambda)$. Разделим $f(\lambda)$ на некоторый многочлен $p(\lambda)$ более низкой степени. Тогда получим

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda),$$

где $q(\lambda)$ — частное; $r(\lambda)$ — остаток, выражающийся многочленом, степень которого ниже степени $p(\lambda)$.

Заменив скаляр λ на матрицу A, имеем

$$f(A) = q(A)p(A) + r(A).$$

Очевидно, $f(A) = r(A)$ при условии, что $p(A) = 0$. Многочлен $p(\lambda)$, тождественно равный нулю при замене λ на A, является *анну-*

лирующим многочленом для матрицы A. При этом $f(A)$ приводится к $r(A)$ — матричному многочлену более низкой степени. Многочлен $r(\lambda)$ такой, что $f(A) = r(A)$, называется *интерполяционным многочленом*. Таким образом, задача упрощения функции $f(A)$ сводится к нахождению двух многочленов (если они существуют) — аннулирующего и интерполяционного.

Можно показать, что аннулирующим многочленом для матрицы A является ее характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = \det[\lambda E - A]$. Воспользуемся для этого тождеством $[\lambda E - A]G(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, где $G(\lambda) = \mathrm{Adj}[\lambda E - A]$ — присоединенная матрица для A. Так как коэффициенты E и A матричного двучлена $[\lambda E - A]$ перестановочны с матрицей A, то при замене λ на A правое и левое произведения совпадают, т. е. $\Delta(A) = (A - A)G(\lambda) = G(\lambda)(A - A)$, или $\Delta(A) = 0$. Полученное тождество выражает теорему *Кэли—Гамильтона*: матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Проиллюстрируем теорему Кэли—Гамильтона на примере матрицы из (1):

$$\Delta(A) = A^3 + 6A^2 + 11A + 6E =$$

$$= \begin{bmatrix} 70 & -116 & 19 \\ 71 & -117 & 19 \\ 64 & -102 & 11 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -20 & 34 & -5 \\ -21 & 35 & -5 \\ -18 & 28 & -1 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+ 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\Delta(A) = (A + 1E)(A + 2E)(A + 3E) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -8 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Важным следствием полученной теоремы является возможность представления любого многочлена $f(A)$ от квадратной матрицы A n-го порядка многочленом $r(A)$ степени $n - 1$, т. е. $f(A) = r(A)$. Пусть, например,

$$f(A) = A^4 + 4A^3 + 2A^2 - 12A - 10E.$$

Разделив соответствующий скалярный многочлен $f(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 - 12\lambda - 10$ на характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$, получим остаток $r(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$. Следовательно, $f(A) = 3A^2 + 4A + 2E$.

Теорему Кэли—Гамильтона можно также использовать для вычисления степеней матрицы и определения обратной матрицы. Так как $\Delta(A) = 0$, то и $A^k \Delta(A) = 0$, где k — любое целое число. Поэтому любая степень матрицы линейно выражается через ее первые $(n - 1)$ степеней. Так, для нашего примера:

$$A^3 = -6A^2 - 11A - 6E;$$
$$A^4 = -6A^3 - 11A^2 - 6A = 25A^2 + 60A + 36E \text{ и т. д.}$$

Для обратной матрицы нообходимое соотношение получаем умножением $\Delta(A) = 0$ на A^{-1}, т. е. $A^{-1}(A^3 + 6A^2 + 11A + 6E) = 0$, откуда имеем: $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 + 6A + 11E)$.

3. Минимальный многочлен. Естественно стремиться свести функцию $f(A)$ к многочлену $r(A)$ возможно меньшей степени. Поскольку степень $r(\lambda)$ всегда на единицу ниже степени аннулирующего многочлена, то эта задача означает поиск аннулирующего многочлена $\psi(\lambda)$ наименьшей степени (со старшим коэффициентом, равным единице), называемого *минимальным многочленом*.

Если все собственные значения матрицы A различны, то характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ является одновременно и минимальным. В общем же случае может быть несколько аннулирующих многочленов, степень которых не превышает n, и среди них только один минимальный многочлен степени $m \leqslant n$.

Пусть $d(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех элементов присоединенной матрицы, т. е. $G(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda)$, где $C(\lambda)$ — многочленная матрица, называемая *приведенной присоединенной матрицей*. Так как $F(\lambda)G(\lambda) = F(\lambda)d(\lambda)C(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, то $\Delta(\lambda)$ делится без остатка на $d(\lambda)$, и частное как раз и будет минимальным многочленом, т. е.

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}.$$

При этом имеет место соотношение $F(\lambda)\, C(\lambda) = \psi(\lambda)\, E$ или

$$[\lambda E - A]\, C(\lambda) = \psi(\lambda)\, E.$$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+3 & -3 & 2 \\ -1 & \lambda+5 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda \end{bmatrix};$$
$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 20\lambda + 16 = (\lambda + 2)^2(\lambda + 4).$$

Матрица имеет двукратное собственное значение $\lambda_1 = -2$ и простое $\lambda_1 = -4$. Присоединенная матрица:

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda+3) & 3(\lambda+2) & -2(\lambda+2) \\ \lambda+2 & (\lambda+2)(\lambda+1) & 2(\lambda+2) \\ \lambda+2 & -3(\lambda+2) & (\lambda+2)(\lambda+6) \end{bmatrix} = (\lambda+2)\,C(\lambda).$$

Общий наибольший делитель $d = (\lambda + 2)$, следовательно:

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = (\lambda+2)(\lambda+4);$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda+6 \end{bmatrix}.$$

В общем случае будем считать, что характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы n-го порядка имеет q различных нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, каждый из которых может повторяться с кратностью n_k. Так как всего должно быть n корней, то $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$. При этом характеристический многочлен представляется в виде:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_q)^{n_q}.$$

Можно показать, что совокупность нулей минимального многочлена содержит все различные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ с кратностями, не превышающими кратностей соответствующих собственных значений, т. е.

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_q)^{m_q},$$

где $0 < m_i \leqslant n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

Степень минимального многочлена $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_q$.

В (5. 5) было показано, что $F(\lambda_k) = [\lambda_k E - A]$ — всегда вырожденная матрица, причем для простого собственного значения λ_k она просто вырожденная (ее дефект равен единице), а дефект присоединенной матрицы $G(\lambda_k)$ равен $n - 1$. Если λ_k — кратное собственное значение, то дефект s матрицы $F(\lambda_k)$ не превышает кратности m_k нуля λ_k минимального многочлена, но может быть и меньше m_k. Пусть дефект $F(\lambda_k)$ равен s; тогда имеют место следующие свойства:

1) кратность собственного значения λ_k не меньше s $(m_k \geqslant s)$;

2) все элементы присоединенной матрицы $G(\lambda)$ делятся на $(\lambda - \lambda_k)^{s-1}$ (этот общий делитель не обязательно является наибольшим);

3) $G(\lambda)$ вместе со всеми своими производными по меньшей мере до $(s - 2)$-й включительно при $\lambda = \lambda_k$ равна нулевой матрице.

Из свойства 2 следует, что для матрицы $F(\lambda)$, полностью вырожденной для всех своих собственных значений (дефект $F(\lambda_k)$ при $k = 1, 2, \ldots, q$ равен ее порядку), минимальный многочлен содержит только линейные множители, т. е. $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_q)$.

Рассмотрим, например, матрицы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Все матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены $\Delta(\lambda) = (\lambda - \alpha)^4$ и собственное значение $\lambda_1 = \alpha$ кратности $m_1 = 4$, но их минимальные многочлены различны. Матрица $F_1(\lambda) = [\lambda_1 E - A_1]$ полностью вырождена (ее дефект равен четырем, т. е. кратности α), поэтому в соответствии с приведенным выше свойством 2 $G(\alpha)$ делится на $(\lambda - \alpha)^3$ и $\psi_1(\lambda) = \lambda - \alpha$. Дефекты матрицы $F_2(\alpha)$ и $F_3(\alpha)$ одинаковы и равны двум, значит присоединенные к ним матрицы $G_2(\lambda)$ и $G_3(\lambda)$ должны иметь общий делитель $(\lambda - \alpha)$, но этот делитель не обязательно наибольший. Действительно:

$$G_2(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda-\alpha)^3 & (\lambda-\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-\alpha)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^3 & (\lambda-\alpha)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^3 \end{bmatrix};$$

$$G_3(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda-\alpha)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-\alpha)^3 & (\lambda-\alpha)^2 & (\lambda-\alpha) \\ 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^3 & (\lambda-\alpha)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^3 \end{bmatrix}.$$

Для $G_2(\lambda)$ общий наибольший делитель $d_2(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ и, следовательно, $\psi_2(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$. Для $G_3(\lambda)$ общий наибольший делитель $d_3(\lambda) = \lambda - \alpha$, и поэтому $\psi_3(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$. Матрица $F_4(\alpha)$ просто вырождена, и поэтому ее минимальный многочлен совпадает с характеристическим: $\psi_4(\lambda) = \Delta(\lambda) = (\lambda - \alpha)^4$.

4. Интерполяционный многочлен. Приняв $\psi(\lambda)$ в качестве аннулирующего многочлена, можно записать: $f(\lambda) = q(\lambda)\psi(\lambda) + r(\lambda)$. Так как $\psi(\lambda)$ со своими производными до $(m_k - 1)$-й включительно при $\lambda = \lambda_k$ обращается в нуль, то

$$f(\lambda_k) = r(\lambda_k),\ f'(\lambda_k) = r'(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = r^{(m_k-1)}(\lambda_k).$$

Эти соотношения для $k = 1, 2, \ldots, q$ составляют систему m уравнений, решив которую можно определить m коэффициентов интерполяционного многочлена

$$r(\lambda) = \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \alpha_{m-2}\lambda^{m-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Заменив в этом многочлене скаляр λ на матрицу A и приняв во внимание, что в соответствии с теоремой Кэли — Гамильтона $f(A) = r(A)$, получим выражение для функции от матрицы в виде:

$$f(A) = \alpha_{m-1}A^{m-1} + \alpha_{m-2}A^{m-2} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i.$$

Значения $f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, q$ определяют функцию $f(\lambda)$ на *спектре матрицы* A. Например, для экспоненциальной функции $f(\lambda) = \exp(\lambda t)$

$$f(\lambda_k) = e^{\lambda_k t},\ f'(\lambda_k) = te^{\lambda_k t},\ \ldots,\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}.$$

Если минимальный многочлен содержит только линейные множители $(\lambda - \lambda_k)$, то достаточно определить функцию $f(\lambda)$ в характеристических точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. При этом система уравнений для коэффициентов интерполяционного многочлена имеет вид:

$$f(\lambda_k) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_k + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_k^{m-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \cdots \\ f(\lambda_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему относительно $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, получим

$$f(A) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i.$$

Определим, например, экспоненциальную функцию от матрицы, рассмотренную в (5.5)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как все собственные значения различны ($\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -3$), то $\psi(\lambda) = \Delta(\lambda)$. Тогда:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \\ \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix};$$

$$\exp(At) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 =$$

$$= \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -20 & 34 & -5 \\ -21 & 35 & -5 \\ -18 & 28 & -1 \end{bmatrix}.$$

После выполнения соответствующих операций и приведения подобных членов, придем к результату, полученному в (5.5).

5. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра. Рассмотрим общий случай, когда минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ содержит кратные нули. Разложим отношение $r(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ на простые дроби:

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{q}\left[\frac{\mu_{k1}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}} + \frac{\mu_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k - 1}} + \cdots + \frac{\mu_{k,\, m_k}}{\lambda - \lambda_k}\right].$$

Так как степень $r(\lambda)$ на единицу ниже степени $\psi(\lambda)$, то μ_{k1}, μ_{k2}, ..., $\mu_{k,\, m_k}$ — числовые коэффициенты, определив которые, получим выражение для интерполяционного многочлена в виде:

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} \mu_{kj}(\lambda - \lambda_k)^{j-1}\psi_k(\lambda),$$

где

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}.$$

Для определения коэффициента μ_{kj} продифференцируем $j - 1$ раз выражение

$$\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} = \sum_{k=1}^{q}[\mu_{k1} + \mu_{k2}(\lambda - \lambda_k) + \cdots + \mu_{k,\, m_k}(\lambda - \lambda_k^{m_k - 1}]$$

и положим $\lambda = \lambda_k$. Тогда все слагаемые, кроме $(j-1)!\,\mu_{kj}$, обратятся в нули и в результате получим

$$\mu_{kj} = \frac{1}{(j-1)!}\,\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}.$$

Так как значения $r(\lambda)$ и $f(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ совпадают до $(m_k - 1)$-й производной включительно, то заменой $r(\lambda)$ на $f(\lambda)$ находим

$$\mu_{kj} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q;\ j = 1, 2, \ldots, m_k).$$

Подставив значения μ_{kj} в выражение для $r(\lambda)$, приходим к формуле для *интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра:*

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k}(\lambda-\lambda_k)^{j-1}\psi_k(\lambda).$$

Заслуживают внимания два частных случая:

1) Все нули минимального многочлена простые, т. е. $\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_q)$. Так как $m_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ j принимает только значение 1, следовательно, получаем выражение

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{q}\frac{f(\lambda_k)}{\psi_k(\lambda_k)}\psi_k(\lambda) = \sum_{k=1}^{q}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(\lambda-\lambda_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(\lambda_k-\lambda_i)}f(\lambda_k),$$

широко известное как *интерполяционный многочлен Лагранжа*.

2) Минимальный многочлен имеет только один нуль λ_0 кратности m, т. е. $\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m$. Тогда $k = 1$, $m_k = m_1 = m$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Так как $\psi_k(\lambda) = 1$, то из общей формулы находим

$$r(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(j-1)!}f^{(j-1)}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^{j-1} = f(\lambda_0) +$$

$$+\frac{f'(\lambda_0)}{1!}(\lambda-\lambda_0) + \frac{f''(\lambda_0)}{2!}(\lambda-\lambda_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}(\lambda-\lambda_0)^{m-1},$$

что совпадает с первыми m членами разложения в *ряд Тейлора* функции $f(\lambda)$.

Например, для матрицы A из (4), все собственные значения которой различны ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$) и $\psi(\lambda) = \Delta(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$, имеем:

$$r(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} f(\lambda_1) + \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} f(\lambda_2) + \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_3) = \frac{1}{2}(\lambda + 2)(\lambda + 3) f(-1) - (\lambda + 1)(\lambda + 3) f(-2) + \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda + 2) f(-3).$$

Для экспоненциальной функции $f(\lambda) = \exp(\lambda t)$ находим $f(-1) = \exp(-t)$, $f(-2) = \exp(-2t)$, $f(-3) = \exp(-3t)$. Подставляя вместо λ матрицу A, получаем

$$e^{At} = \frac{1}{2}(A + 2E)(A + 3E)e^{-t} - (A + E)(A + 3E)e^{-2t} + \frac{1}{2}(A + E)(A + 2E)e^{-3t},$$

что после вычисления совпадает с результатом в (5.5).

Проиллюстрируем применение полученной формулы на примере матрицы с кратными собственными значениями:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}; \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -2 & 3 \\ 10 & \lambda - 4 & 5 \\ 5 & -4 & \lambda + 6 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2);$$

$$\lambda_1 = -1\ (m_1 = 2); \quad \lambda_2 = -2\ (m_2 = 1).$$

Так как $F(\lambda_1)$ — просто вырожденная матрица (ее дефект равен единице), то $\psi(\lambda) = \Delta(\lambda)$, а также $\psi_1(\lambda) = \lambda + 2$ и $\psi_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$.

Поэтому можно записать:

$$r(\lambda) = [\mu_{11} + \mu_{12}(\lambda - \lambda_1)]\,\psi_1(\lambda) + \mu_{21}\psi_2(\lambda),$$

где

$$\mu_{11} = \frac{f(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)} = f(\lambda_1);$$

$$\mu_{12} = \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}\right]'_{\lambda = \lambda_1} = \frac{f'(\lambda_1)\,\psi_1(\lambda_1) - f(\lambda_1)\,\psi_1(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)^2} = f'(\lambda_1) - f(\lambda_1);$$

$$\mu_{21} = \frac{f(\lambda_2)}{\psi_2(\lambda_2)} = f(\lambda_2).$$

Подставляя значения коэффициентов, получаем

$$r(\lambda) = \{f(\lambda_1) + [f'(\lambda_1) - f(\lambda_1)](\lambda + 1)\}(\lambda + 2) + f(\lambda_2)(\lambda + 1)^2 = -f(\lambda_1)(\lambda + 2)\lambda + f'(\lambda_1)(\lambda + 1)(\lambda + 2) + f(\lambda_2)(\lambda + 1)^2.$$

Обозначим многочлены от λ, входящие в полученные выражения, $\varphi_{11} = (\lambda + 2)\lambda$; $\varphi_{12} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$; $\varphi_{21} = (\lambda + 1)^2$; тогда:

$$r(\lambda) = -f(\lambda_1)\varphi_{11}(\lambda) + f'(\lambda_1)\varphi_{12}(\lambda) + f(\lambda_2)\varphi_{21}(\lambda).$$

Заменив λ на матрицу A, с учетом $r(A) = f(A)$, получим:

$$f(A) = -f(\lambda_1)(A + 2E)A + f'(\lambda_1)(A + E)(A + 2E) +$$

$$+ f(\lambda_2)(A + E)^2 = -f(\lambda_1)\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix} +$$

$$+ f'(\lambda_1)\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix} + f(\lambda_2)\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= f(\lambda_1)\begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 15 & 16 & -30 \\ 10 & 10 & -19 \end{bmatrix} + f'(\lambda_1)\begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -25 & -10 & 25 \\ -15 & -6 & 15 \end{bmatrix} +$$

$$+ f(\lambda_2)\begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -15 & -15 & 30 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Определив $f(\lambda_1)$, $f'(\lambda_1)$ и $f\ (\lambda_2)$ для данной скалярной функции $f(\lambda)$ и подставив в это выражение, получим функцию от матрицы $f(A)$, определенную на ее спектре.

6. Теорема Сильвестра. Как видно из рассмотренного примера, при вычислении коэффициентов μ_{kj} необходимо раскрывать производные отношения функций $f(\lambda)$ и $\psi_k(\lambda)$ и после подстановки их значений при $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ группировать члены по скалярной функции $f(\lambda)$ и ее производным. В результате получаем выражение вида

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{q} [f(\lambda_k)\varphi_{k1}(\lambda) + f'(\lambda_k)\varphi_{k2}(\lambda) + \cdots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\varphi_{k,\,m_k}(\lambda)],$$

или

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} f^{(j-1)}(\lambda_k)\varphi_{kj}(\lambda).$$

Здесь $\varphi_{kj}(\lambda)$ — многочлены, степени которых ниже степени m минимального многочлена $\psi(\lambda)$. Они не зависят от вида функции $f(\lambda)$ и вполне определяются заданием $\psi(\lambda)$. Заменив скаляр λ

на матрицу A и приняв во внимание соотношение $f(A)=r(A)$, получим основную формулу для функции от матрицы:

$$f(A)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} f^{(j-1)}(\lambda_k)\, Z_{kj},$$

где

$$Z_{kj}=\varphi_{kj}(A) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_k).$$

Матрицы Z_{kj} называются *компонентами матрицы* A (не смешивать со скалярными элементами матрицы!). Они, как и $\varphi_{kj}(\lambda)$, не зависят от вида функции $f(\lambda)$ и вполне определяются матрицей A. Это значит, что Z_{kj} можно определить из основной формулы, подставив в нее некоторую функцию, наиболее подходящую для этой цели. Пусть $f(\beta)=\frac{1}{\lambda-\beta}$, где λ рассматривается как некоторый параметр. Эта функция определяется на спектре матрицы A с собственными значениями $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q$ следующей совокупностью величин (4):

$$f(\lambda_k)=\frac{1}{\lambda-\lambda_k};\quad f'(\lambda_k)=\frac{1!}{(\lambda-\lambda_k)^2};\ \ldots;\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k)=\frac{(m_k-1)!}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}.$$

В то же время из выражения $(\lambda-\beta)f(\beta)=1$ после замены скаляра β на матрицу A имеем $(\lambda E-A)f(A)=E$, т. е. $f(A)=(\lambda E-A)^{-1}$. Учитывая соотношение $[\lambda E-A]\,C(\lambda)=\psi(\lambda)\,E$ из (3) и подставляя в основную формулу значения функции на спектре матрицы A, получаем:

$$[\lambda E-A]^{-1}=\frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{Z_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\frac{1!\ Z_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{(m_k-1)!\ Z_{k,\ m_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}\right]=\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{(j-1)!}{(\lambda-\lambda_k)^j}\ Z_{kj}.$$

Это выражение по форме совпадает с разложением на простые дроби с матричными коэффициентами $(j-1)!\ Z_{kj}$. Действуя аналогично (5) и умножая обе части равенства на $(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, имеем

$$\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}=\sum_{k=1}^{q}\left[Z_{k1}(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}+Z_{k2}(\lambda-\lambda_k)^{m_k-2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\ (m_k-1)!\ Z_{km_k}\right].$$

Для определения коэффициента Z_{kj} продифференцируем это равенство $m_k - j$ раз, приняв $\lambda = \lambda_k$. Тогда все члены в правой части, кроме члена с Z_{kj}, обратятся в нули, в результате чего имеем

$$\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-j)} = (m_k - j)!\,(j-1)!\,Z_{kj},$$

откуда

$$Z_{kj} = \frac{1}{(m_k - j)!\,(j-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-j)}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_k).$$

Подставив эти значения в основную формулу, получаем выражение, представляющее *теорему Сильвестра*:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_k)}{(m_k - j)!\,(j-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-j)}.$$

Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель на $(m_k - 1)!$ Так как

$$\frac{(m_k-1)!}{(m_k-1)!\,(m_k-j)!(j-1)!} = \frac{1}{(m_k-1)!}C_{m_k-1}^{j-1},$$

то в соответствии с известной формулой для высших производных произведения двух функций

$$\sum_{j=1}^{m_k} C_{m_k-1}^{j-1} f^{(j-1)}(\lambda)\left[\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-j)} = \left[f(\lambda)\frac{C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(m_k-1)},$$

получим другую форму теоремы Сильвестра:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{f(\lambda)\,C(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k-1)}.$$

В этой формуле приведенную присоединенную матрицу $C(\lambda)$ можно в соответствии с (3) заменить присоединенной матрицей $G(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda)$, где $d(\lambda)$ — многочлен, являющийся общим наибольшим делителем всех элементов матрицы $G(\lambda)$. Тогда вместо $\psi(\lambda)$ следует рассматривать $\Delta(\lambda) = d(\lambda)\psi(\lambda)$ и определять $\psi_k(\lambda)$ по формуле

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}.$$

Такой подход более удобен, если используются специальные алгоритмы определения присоединенной матрицы $G(\lambda)$.

7. Алгоритм Фаддеева. Для определения присоединенной матрицы $G(\lambda)$ можно воспользоваться *алгоритмом Фаддеева.* При этом одновременно получаем и коэффициенты характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$.

Пусть для данной матрицы A

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n;$$
$$G(\lambda) = G_1\lambda^{n-1} + G_2\lambda^{n-2} + \cdots + G_{n-1}\lambda + G_n.$$

Скалярные коэффициенты $a_1, a_2, \dots a_n$ и матричные коэффициенты $G_1, G_2, \dots, G_n$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$a_i = -\frac{1}{i}\,\mathrm{tr}\,B_i; \quad G_{i+1} = B_i + a_iE,$$

причем $B_i = G_iA$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и $G_1 = E$. Здесь символ $\mathrm{tr}\,B$ означает *след матрицы*, равный сумме ее диагональных элементов (иногда для этой величины употребляют термин *шпур* и обозначают ее через $\mathrm{sp}\,B$).

Для доказательства этих формул подставим многочлены $\Delta(\lambda)$ и $G(\lambda)$ в соотношение $G(\lambda)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda)E$:

$$(G_1\lambda^{n-1} + G_2\lambda^{n-2} + \cdots + G_{n-1}\lambda + G_n)(\lambda E - A) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \\ + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)E.$$

Перемножив многочленные матрицы и сравнив матричные коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим

$$G_{i+1} - G_iA = a_iE \text{ или } G_{i+1} = B_i + a_iE,$$

так как $B_i = G_iA$ и $G_1 = E$, $B_1 = A$, а также $B_n = G_nA = -a_nE$. Далее, продифференцировав $\Delta(\lambda)$ по λ, получим

$$\Delta'(\lambda) = n\lambda^{n-1} + (n-1)a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)a_i\lambda^{n-i-1},$$

где $a_0 = 1$. Так как в определителе $\Delta(\lambda) = \det[\lambda E - A]$ скаляр λ расположен только на главной диагонали, то производная $\Delta'(\lambda)$ равна сумме всех главных миноров (алгебраических дополнений диагональных элементов) матрицы $[\lambda E - A]$. А эти миноры являются диагональными элементами присоединенной матрицы $G(\lambda) = \mathrm{Adj}[\lambda E - A]$. Следовательно, можно записать:

$$\Delta'(\lambda) = \mathrm{tr}\,G(\lambda) = \mathrm{tr}\,(G_1\lambda^{n-1} + G_2\lambda^{n-2} + \cdots + G_{n-1}\lambda + G_n).$$

При суммировании матриц их элементы суммируются, поэтому след суммы матриц равен сумме их следов, и можно записать:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)a_i\lambda^{n-i-1} = \mathrm{tr}\,G(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{tr}\,G_{i+1}\lambda^{n-i-1}.$$

Это равенство должно соблюдаться для любого λ, значит $(n-i)a_i = \operatorname{tr} G_{i+1}$. Кроме того, из $G_{i+1} = B_i + a_i E$ следует $\operatorname{tr} G_{i+1} = \operatorname{tr} B_i + n a_i$, откуда с учетом предыдущего соотношения получаем формулу для коэффициента характеристического уравнения

$$a_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr} B_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Таким образом, соотношения алгоритма Фаддеева доказаны. Проиллюстрируем его применение на примере матрицы из (1). Полагая $G_1 = E$, имеем:

$$B_1 = G_1 A = A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}; \quad a_1 = -\operatorname{tr} B_1 = -(4 - 9 - 1) = 6;$$

$$G_2 = B + a_1 E = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}; \qquad B_2 = G_2 A = \begin{bmatrix} 4 & -14 & 1 \\ 9 & -19 & 1 \\ 6 & -8 & -7 \end{bmatrix};$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} B_2 = -\frac{1}{2}(4 - 19 - 7) = 11;$$

$$G_3 = B_2 + a_2 E = \begin{bmatrix} 15 & -14 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B_3 = G_3 A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix};$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} B_3 = -\frac{1}{3}(-6 - 6 - 6) = 6.$$

Соотношение $G_n A = -a_n E$ можно использовать для проверки правильности вычислений. Действительно, в нашем примере $G_3 A = B_3 = -a_3 E$. Таким образом, получаем

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6;$$

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 10 & -8 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 15 & -14 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Изложенный алгоритм требует выполнения $n-1$ операций умножения матриц $G_i A$, каждая из которых сводится к n^3 операций умножения, т. е. всего $(n-1)n^3 \approx n^4$. Кроме того, при каждом умножении матриц необходимо выполнить $(n-1)n^2$ операций сложения (или вычитания) чисел, т. е. всего $(n-1)^2 n^2 \approx n^4$. При этом вычитание близких по величине чисел может привести к существенному снижению точности.

8. Значения присоединенной матрицы. Рассмотрим разность $\Delta(\lambda) - \Delta(\gamma)$, где γ — некоторая скалярная переменная. Легко убедиться в том, что эта разность без остатка делится на $\lambda - \gamma$,

и частное представляет собой многочлен от λ и γ $(n-1)$-й степени, т. е.

$$\delta(\lambda, \gamma) = \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\gamma)}{\lambda - \gamma} =$$
$$= \lambda^{n-1} + (\gamma + a_1)\lambda^{n-2} + (\gamma^2 + a_1\gamma + a_2)\lambda^{n-3} + \ldots$$

Подставив в тождество $\delta(\lambda, \gamma)(\lambda - \gamma) = \Delta(\lambda) - \Delta(\gamma)$ вместо скаляра γ матрицу A, получим $\delta(\lambda E, A)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E - \Delta(A)$, где в соответствии с теоремой Кэли—Гамильтона $\Delta(A) = 0$, т. е. $\delta(\lambda E, A)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E$. Сравнивая с соотношением $G(\lambda)(\lambda E - A) = \Delta(\lambda) E$, записываем $G(\lambda) = \delta(\lambda E, A)$.

Значение $G(\lambda_k)$ для простого λ_k можно получить, подставив в исходное выражение λ_k вместо γ. Так как $\Delta(\lambda_k) = 0$, то

$$\delta(\lambda, \lambda_k) = \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_k} = \prod_{i \neq k} (\lambda - \lambda_i).$$

Заменив λ через матрицу A с учетом, что $\delta(\lambda_k E, A) = G(\lambda_k)$, получим формулу, которая уже использовалась в (5.10):

$$G(\lambda_k) = \prod_{i \neq k} (A - \lambda_i E) = (-1)^{n-1} \prod_{i \neq k} (\lambda_i E - A).$$

Можно также показать, что значение j-й производной присоединенной матрицы при $\lambda = \lambda_k$, кратность которого m_k, выражается соотношением:

$$\frac{1}{j!} G^{(j)}(\lambda_k) = (A - \lambda_k E)^{m_k - j - 1} \prod_{i \neq k} (A - \lambda_i E)^{m_i}.$$

Определим, например, значения присоединенной матрицы и ее производной для матрицы третьего порядка из (5), собственные значения которой — двукратное $\lambda_1 = -1$ и простое $\lambda_2 = -2$. В соответствии с полученными формулами

$$G(\lambda_1) = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E); \quad G'(\lambda_1) = A - \lambda_2 E;$$
$$G(\lambda_2) = (\lambda_1 E - A)^2;$$

$$G(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -25 & -10 & 25 \\ -15 & -6 & 15 \end{bmatrix};$$

$$G'(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix};$$

$$G(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -15 & -15 & 30 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты можно проверить подстановкой значений λ_1 и λ_2 в общее выражение для $G(\lambda)$.

9. Применение теоремы Сильвестра. Если нули характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ простые, то $C(\lambda_k) = G(\lambda_k) = \prod_{i \neq k} (A - \lambda_i E)$, и основная формула приводится к виду:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) Z_{k1} = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{G(\lambda_k)}{\psi_k(\lambda_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (A - \lambda_i E)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}.$$

Это выражение можно получить непосредственно из интерполяционного многочлена Лагранжа (5), заменив в нем λ матрицей A. Использование теоремы Сильвестра в общем случае кратных характеристических чисел (нулей минимального многочлена) иллюстрируется на примере матрицы из (5), для которой $\lambda_1 = -1$ $(m_1 = 2)$ и $\lambda_2 = -2$ $(m_2 = 1)$:

$$f(A) = f(\lambda_1) Z_{11} + f'(\lambda_1) Z_{12} + f(\lambda_2) Z_{21};$$

$$Z_{11} = \frac{1}{1!\,0!} \left[\frac{C(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_1} = \frac{C'(\lambda_1)\psi_1(\lambda_1) - C(\lambda_1)\psi'(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)^2};$$

$$Z_{12} = \frac{C(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)}; \quad Z_{21} = \frac{C(\lambda_2)}{\psi_2(\lambda_2)}.$$

Так как $\psi_1(\lambda) = \lambda + 2$ и $\psi_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, то $\psi_1(\lambda_1) = 1$, $\psi_1'(\lambda_1) = 1$; $\psi_2(\lambda_2) = 1$, и с учетом полученных в (8) значений $G(\lambda)$, которые в данном случае совпадают с соответствующими значениями $C(\lambda)$, имеем:

$$Z_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 15 & 16 & -30 \\ 10 & 10 & -19 \end{bmatrix}; \quad Z_{12} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -25 & -10 & 25 \\ -15 & -6 & 15 \end{bmatrix};$$

$$Z_{21} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -15 & -15 & 30 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

В результате по формуле Сильвестра получаем выражение для функции от матрицы $f(A)$, которое совпадает с полученным ранее (5).

Для экспоненциальной функции от матрицы формула Сильвестра запишется следующим образом:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} t^{j-1} e^{\lambda_k t} Z_{kj}.$$

Так, для нашего примера имеем:

$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 15 & 16 & -30 \\ 10 & 10 & -19 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -25 & -10 & 25 \\ -15 & -6 & 15 \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{-2t} \begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -15 & -15 & 30 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5(1-t)e^{-t} - 4e^{-2t} & 2(2-t)e^{-t} - 4e^{-2t} & (-8+5t)e^{-t} + 8e^{-2t} \\ 5(3-5t)e^{-t} - 15e^{-2t} & 2(8-5t)e^{-t} - 15e^{-2t} & 5(-6+5t)e^{-t} + 30e^{-2t} \\ 5(2-3t)e^{-t} - 10e^{-2t} & 2(5-3t)e^{-t} - 10e^{-2t} & (-19+15t)e^{-t} + 20e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Полученное выражение можно рассматривать как фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в нормальной форме $\frac{dx}{dt} = Ax$, в которой матрица A совпадает с заданной.

10. Компоненты матрицы. Так как компоненты матрицы Z_{kj} не зависят от вида функции $f(\lambda)$, то их можно определить из системы m уравнений, которые получаем подстановкой в основное уравнение (6) m независимых аналитических функций. В качестве таких функций удобно использовать многочлены, получаемые последовательным делением минимального многочлена $\Psi(\lambda)$ на простейшие сомножители. В результате всегда получим m функций, включая и $f(\lambda) = 1$.

Определим этим способом компоненты матрицы из (5). Так как $\psi(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)$, то в качестве простейших множителей принимаем $f_1(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $f_2(\lambda) = \lambda + 1$ и $f_3(\lambda) = 1$. По основной формуле

$$f(A) = f(-1)\, Z_{11} + f'(-1)\, Z_{12} + f(-2)\, Z_{21}.$$

Подставляя сюда простейшие многочлены, получаем систему уравнений:

$$(A + E)^2 = Z_{21}; \quad (A + E) = Z_{12} - Z_{21}; \quad E = Z_{11} + Z_{21},$$

откуда последовательной подстановкой находим:

$$Z_{21} = (A + E)^2; \quad Z_{12} = (A + E) - Z_{21}; \; Z_{11} = E - Z_{21}.$$

Для данной матрицы A после выполнения соответствующих операций получаем компоненты, совпадающие с найденными в (8).

Компоненты матрицы связаны общими соотношениями, которые можно использовать для проверки правильности вычислений:

$$\sum_{k=1}^{q} (\lambda_k Z_{k1} + Z_{k2}) = A; \quad \sum_{k=1}^{q} Z_{k1} = E; \quad Z_{k1}^2 = Z_{k1} \quad (k = 1, 2, \ldots, q);$$
$$Z_{kj} Z_{li} = 0; \quad (k \neq l; \quad 1 \leqslant j \leqslant m_k; \quad 1 \leqslant i \leqslant m_l).$$

Первая пара соотношений получается подстановкой в основную формулу функций $f(\lambda) = \lambda$ и $f(\lambda) = 1$.

11. Сводка методов определения функции от матрицы. Рассмотренные методы определения аналитической функции $f(A)$ от матрицы A сводятся к следующим:

1) Подстановка матрицы A в степенной ряд соответствующей скалярной функции $f(\lambda)$ и вычисление частичной суммы членов ряда для $f(A)$, дающей достаточно точное приближение (1).

2) Использование интерполяционного многочлена $r(\lambda)$ и соотношения $f(A) = r(A)$, вытекающего из теоремы Кэли—Гамильтона (4).

3) Использование интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра с определением числовых коэффициентов μ_{kj} разложения на простые дроби (5).

4) Определение компонент Z_{kj} матрицы A через значения приведенной присоединенной матрицы $C(\lambda)$ на спектре данной матрицы с использованием теоремы Сильвестра (6).

5) Определение компонент Z_{kj} из системы m уравнений, получаемых на основе теоремы Сильвестра для m простейших многочленов (9).

При использовании всех этих методов, кроме первого, необходимо знать собственные значения характеристической матрицы $F(\lambda) = [\lambda E - A]$. Вычисление собственных значений требует решения алгебраического уравнения n-й степени и представляет собой самостоятельную задачу высшей алгебры, непосредственно не связанную с теорией матриц.

Прямое использование теоремы Сильвестра связано с определением значений присоединенной матрицы на спектре данной матрицы, которые могут быть получены с помощью алгоритма Фаддеева (7) или формул, приведенных в (8). Последний метод свободен от вычисления значений присоединенной матрицы.

При определении компонент Z_{kj} вместо минимального многочлена $\psi(\lambda)$ можно пользоваться характеристическим многочленом $\Delta(\lambda)$, однако при этом некоторые компоненты будут равны нулевым матрицам. Таким образом, тот же результат потребует большего объема вычислений.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сравните понятия скалярного многочлена, многочлена от матрицы, матричного многочлена и многочленной матрицы. Приведите примеры.

2. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 6 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

а) Найдите присоединенную матрицу $G(\lambda) = \mathrm{Adj}(\lambda E - A)$ и характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ через алгебраические дополнения характеристической матрицы $F(\lambda) = \lambda E - A$.

б) Определите $G(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ с помощью алгоритма Фаддеева и сравните с полученным ранее результатом.

в) Проверьте соотношение $F(\lambda)G(\lambda) = \Delta(\lambda)E$.

г) Запишите $G(\lambda)$ в виде матричного многочлена.

3. Проверьте справедливость теоремы Кэли—Гамильтона на примере матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Покажите, что с помощью теоремы Кэли—Гамильтона можно представить многочлен $N(A)$ любой степени $m > n$ от квадратной матрицы A n-го порядка через многочлен от A, степень которого не превышает $n - 1$. Определите $N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + E$ для матрицы A из предыдущей задачи

а) прямым вычислением;

б) с помощью понижения порядка многочлена.

5. Используя теорему Кэли—Гамильтона, получите формулу обращения неособенной квадратной матрицы A n-го порядка

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 E),$$

где a_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) — коэффициенты характеристического многочлена $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$. Найдите с помощью этой формулы обратную для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

и проверьте результат каким-либо другим способом.

6. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -5 & 2 \\ -6 & -4 & 0 & -4 \\ -6 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

собственные значения которой $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$. Найдите общее выражение для функции от матрицы A с помощью:

а) интерполяционного многочлена $f(A)=\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i A^i$;

б) интерполяционного многочлена Лагранжа;

в) теоремы Сильвестра;

г) решения уравнений для компонент матрицы A.

7. По результатам задачи 6 запишите функции e^A, $\sin A$, $\ln A$.

8. Для каждой из приведенных ниже матриц:

$$X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 6 & 0 & 2\\ -5 & 2 & 4\end{bmatrix};\quad Y=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{bmatrix};\quad Z=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

а) найдите с помощью алгоритма Фаддеева выражения для $G(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$;

б) определите минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ и приведенную присоединенную матрицу $C(\lambda)$;

в) получите значения $G(\lambda_k)$ и $\Delta(\lambda_k)$, а также их производных с помощью формул, приведенных в (10), и проверьте результат непосредственной подстановкой значений $\lambda=\lambda_k$ в $G(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$, вычисленные по алгоритму Фаддеева.

9. Найдите общие выражения функций от матриц из предыдущей задачи с помощью:

а) интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра;

б) теоремы Сильвестра;

в) решения уравнений для компонентов матрицы.

10. На основе общих выражений, полученных в предыдущей задаче, найдите e^X, e^Y, e^Z, а также $\sin X$, $\sin Y$, $\sin Z$.

11. Исходя из алгоритма Фаддеева, выведите рекуррентные соотношения для определения коэффициентов характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$:

$$a_1=-\operatorname{tr}A;\quad a_i=-\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}a_{i-j}\operatorname{tr}A^j\quad (i=2,\ 3,\ \dots,\ n),$$

известные под названием формул Ньютона. Получите на основании этих формул характеристический многочлен матрицы из задачи 2.

12. Дана система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=-4x_1+4x_2\\ \frac{dx_3}{dt}&=-2x_1+x_2+2x_3+e^{3t}\end{aligned}\right\}.$$

а) Воспользовавшись каким-либо способом определения функции от матрицы, найдите фундаментальную матрицу системы $\Phi(t)=e^{At}$.

б) Найдите решение системы дифференциальных уравнений при начальных значениях $x_{10}=2$, $x_{20}=-1$, $x_{30}=5$.

1. Основные типы матричных преобразований. При решении систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений уже встречались преобразования вещественных матриц (LU-разложение и приведение матрицы к диагональной форме), которые являются частными случаями общих типов матричных преобразований (рис. 82).

Наиболее общим является *эквивалентное преобразование* $\tilde{A} = PAQ$, где P и Q — неособые квадратные матрицы. Матрицы A и $\tilde{A}$ называются *эквивалентными*. Треугольное разложение (4.4) является частным случаем эквивалентных преобразований, когда $\tilde{A}$ — единичная матрица E. Из $PAQ = E$ следует $A = P^{-1}Q^{-1} = LU$, т. е. $L = P^{-1}$ и $U = Q^{-1}$ — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы.

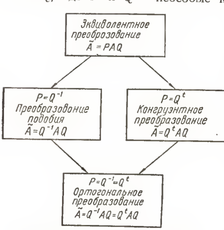


Рис. 82. Матричные преобразования.

При $P = Q^{-1}$ имеем *преобразование подобия* $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$, где $\tilde{A}$ и A называют *подобными матрицами*. Приведение матрицы A к диагональной форме (5.7) представляет собой случай этого преобразования $A = H^{-1}AH$, причем $Q = H$ является модальной матрицей.

При $P = Q^{t}$ имеем *конгруэнтное преобразование* $\tilde{A} = Q^{t}AQ$, которое, как и преобразование подобия, является частным случаем эквивалентного преобразования. Если преобразование удовлетворяет одновременно свойствам конгруэнтности и подобия, то оно называется *ортогональным*. При этом $\tilde{A} = Q^{-1}AQ = Q^{t}AQ$, где $Q = (Q^{-1})^{t}$, называется *ортогональной матрицей*.

Матричные преобразования тесно связаны с различными типами линейных преобразований в n-мерном евклидовом пространстве, которые рассматриваются ниже.

2. Эквивалентные преобразования. Рассмотрим линейное преобразование $y = Ax$ в n-мерном пространстве. Умножив это уравнение слева на неособенную матрицу n-го порядка P, получим $Py = PAx$ или $y' = PAx$, что соответствует преобразованию вектора y в вектор $y' = Py$. Если вместо вектора x рассматривать

вектор x', связанный с x неособенным преобразованием $x = Qx'$, то исходное уравнение приводится к виду $y' = PAQx'$ или $y' = \tilde{A}x'$. Матрица $\tilde{A}$ связана с A *эквивалентным преобразованием*

$$\tilde{A} = PAQ.$$

Строки произведения PA можно представить как сумму произведений строк матрицы A на элементы матрицы P, т. е.

$$PA = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ \dots \\ a_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{(i)} p_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{(i)} p_{2i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{(i)} p_{ni} \end{bmatrix}.$$

Аналогично, столбцы произведения AQ можно представить как сумму произведений столбцов матрицы A на элементы матрицы Q, т. е.

$$AQ = [a^{(1)},\ a^{(2)},\ \dots,\ a^{(n)}] \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} a^{(i)} q_{i1},\ \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} q_{i2},\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} q_{in} \right].$$

Отсюда легко понять, что эквивалентное преобразвание матрицы сводится к последовательности *элементарных преобразований* следующих типов:

1) перестановке произвольных двух строк (столбцов);
2) умножению строки (столбца) на отличный от нуля скаляр;
3) прибавлению к некоторой строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на скаляр.

Эти преобразования осуществляются с помощью *элементарных матриц*, которые получаются из единичной матрицы n-го порядка соответствующими операциями над ее строками (столбцами). С помощью элементарных преобразований произвольную матрицу A ранга $r > 0$ можно привести к *нормальной (канонической)* форме, которая для неособенной матрицы A $(r = n)$ является единичной

матрицей E, а для особенной ($r < n$) имеет блочную структуру с единичной матрицей E_r r-го порядка в верхнем левом углу:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При решении систем линейных уравнений преобразование к нормальной форме ($\tilde{A} = E$) осуществляется с помощью алгоритма Гаусса—Жордана (4.3) и LU-разложения (4.4). В первом случае $P = A^{-1}$ и $Q = E$, а во втором $L = P^{-1}$ и $U = Q^{-1}$. Например, LU-разложению матрицы из (4.4) соответствует последовательность элементарных преобразований:

$$P_1\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to P_2\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to P_3\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} Q_1 \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} Q_2 \to P_4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \to P_5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} Q_3 \to P_6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта последовательность сводится к эквивалентному преобразованию $E = PAQ$, где $P = P_6P_5P_4P_3P_2P_1$ и $Q = Q_1Q_2Q_3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{26} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ \frac{7}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{1}{26} \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$L = P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 26 \end{bmatrix}; \quad U = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом, полученным в (4.5).

Так как элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы A, то эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг. Иначе говоря, ранг матрицы инвариантен относительно эквивалентного преобразования. Можно также показать, что матрицы одинаковых порядков и рангов эквивалентны между собой.

3. **Преобразование подобия.** Эквивалентное преобразование можно рассматривать как результат перехода к новым (вообще различным) координатным базисам для векторов x и y, т. е. $x' = Q^{-1}x$ и $y' = Py$. Иначе говоря, преобразование $\tilde{A} = PAQ$ соответствует независимым преобразованиям координат, определяемым матрицами Q^{-1} и P.

Если векторы x и y преобразуются к одному и тому же координатному базису, то приняв $P = Q^{-1}$, приходим к преобразованию подобия:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ.$$

Оно означает, что уравнение $y = Ax$ при переходе к новому координатному базису, определяемому матрицей Q^{-1}($x' = Q^{-1}x$ и $y' = Q^{-1}y$), преобразуется к $y' = \tilde{A}x'$. Важнейшее свойство преобразования подобия состоит в том, что определитель матрицы инвариантен относительно этого преобразования:

$$\det \tilde{A} = \det Q^{-1} \det A \det Q = \det A,$$

так как определитель обратной матрицы $\det Q^{-1}$ равен обратному значению определителя $\det Q$. Ясно, что и собственные значения матрицы не изменяются при преобразовании подобия. Действительно,

$$\lambda E - \tilde{A} = \lambda E - Q^{-1}AQ = Q^{-1}[\lambda QQ^{-1} - A]\,Q = Q^{-1}[\lambda E - A]\,Q.$$

Откуда следует

$$\det[\lambda E - \tilde{A}] = \det[\lambda E - A].$$

При определенных условиях преобразование подобия приводит матрицу A к диагональной

$$\Lambda = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A, а роль преобразующей матрицы Q играет модальная матрица H.

Можно указать, по крайней мере, три случая, когда матрица приводится к диагональной форме:

1) все собственные значения матрицы A различны;

2) дефекты матриц $[\lambda_k E - A]$ равны кратностям m_k (ранги равны $n - m_k$) соответствующих собственных значений λ_k *(кратная вырожденность)*;

3) симметричные матрицы.

Первый из них рассмотрен в (5.6), второй будет исследован ниже, а третий связан с ортогональным преобразованием. В общем случае преобразование подобия приводит к *квазидиагональной канонической форме*.

4. Матрица простой структуры. В случае кратной вырожденности говорят, что матрица имеет *простую структуру*. При этом каждое из уравнений $(\lambda_k E - A)h = 0$ даст m_k независимых решений для собственных векторов h, соответствующих m_k-кратному корню λ_k. Таким образом, получим всего $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = n$ независимых векторов, которые и составят модальную матрицу H. Если при определении модальных столбцов исходить из присоединенной матрицы $F(\lambda) = \mathrm{Adj}[\lambda E - A]$, то следует иметь в виду, что ее значение и значения всех производных до $(m_k - 2)$-й включительно при $\lambda = \lambda_k$— нулевые матрицы. Поэтому m_k независимых модальных столбцов для λ_k выбираем из $(m_k - 1)$-х производных

$$\left[\frac{d^{m_k-1}}{d\lambda^{m_k-1}} F(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

В результате получаем $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = n$ модальных столбцов матрицы H, которая преобразует матрицу A к диагональной форме, причем каждое из собственных значений кратности m_k повторяется на главной диагонали m_k раз. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad [\lambda E - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = F(\lambda).$$

Определив $\Delta(\lambda)$ и $G(\lambda)$ с помощью алгоритма Фаддеева (6.7), получим:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3);$$

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & (\lambda-2)(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{bmatrix}.$$

Так как дефект $F(\lambda_1)$ равен двум и дефект $F(\lambda_2)$ — единице, то матрица A имеет простую структуру и приводится к диагональной форме. Модальные столбцы, соответствующие двукратному корню $\lambda_1 = 1$, выбираем из независимых столбцов матрицы $G'(\lambda_1)$:

$$G'(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & 2\lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda-4 \end{bmatrix}; \quad G'(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Для простого корня $\lambda_2 = 3$ в качестве модального столбца выбираем пропорциональный одному из столбцов матрицы:

$$G(3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad h^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом имеем:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Каноническая форма Жордана. В общем случае матрица A может не иметь простой структуры. Это значит, что хотя бы для одного собственного значения λ дефект матрицы $\lambda_k E - A$ отличается от m_k — кратности λ_k. Тогда преобразование подобия приводит к *канонической матрице Жордана* $J = H^{-1}AH$, для которой характерна квазидиагональная структура.

Главную диагональ матрицы J, как и в случае матрицы простой структуры, занимают собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \ldots, q$), причем каждое из них представлено m_i раз. Над главной диагональю (по первой наддиагонали) располагаются единичные элементы, но они не обязательно занимают все клетки наддиагонали.

Расположение единичных элементов зависит от структуры матрицы A. Остальные элементы матрицы Жордана равны нулю.

С каждым собственным значением λ_k связаны одна или несколько *клеток Жордана r-го порядка* ($r \leqslant m_k$), имеющих следующую структуру:

$$J_r(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Все такие клетки являются блоками квазидиагональной матрицы J и сумма их порядков равна порядку n исходной матрицы A. Количество клеток Жордана, соответствующих кратному собственному значению λ_k, равно дефекту матрицы $\lambda_k E - A$, а сумма их порядков равна кратности m_k. Это позволяет выяснить структуру матрицы Жордана лишь в следующих случаях.

1) При кратной вырожденности, когда дефект матрицы $\lambda_k E - A$ для m_k-кратного λ_k равен m_k, имеем m_k клеток первого порядка, т. е. справа от диагональных элементов λ_k единицы отсутствуют. Этот случай был рассмотрен в (4).

2) При простой вырожденности, когда для m_k-кратного λ_k дефект матрицы $\lambda_k E - A$ равен единице, собственному значению λ_k соответствует только одна клетка m_k-го порядка. Это значит, что везде справа от λ_k в клетке Жордана стоят единицы. При этом матрицы

$$G^{(j-1)}(\lambda_k) = \left[\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} \operatorname{Adj}(\lambda E - A)\right]_{\lambda=\lambda_k} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_k)$$

содержат в совокупности m_k (и только m_k) независимых столбцов, которые (или пропорциональные им) можно принять в качестве m_k собственных векторов.

Рассмотрим, например, матрицу из (6.5):

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}; \quad \lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -2 & 3 \\ 10 & \lambda-4 & 5 \\ 5 & -4 & \lambda+6 \end{bmatrix} = F(\lambda);$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+2); \quad \lambda_1 = -1 \quad (m_1 = 2); \ \lambda_2 = -2 \quad (m_2 = 1).$$

Здесь имеется простая вырожденность для двукратного корня $\lambda_1 = -1$, так как дефект матрицы $F(-1)$ равен единице, а ранг

двум. Поэтому с точностью до порядка расположения клеток матрица Жордана имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2(\lambda_1) & \\ & J_1(\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

Клетка $J_2(\lambda_1)$ второго порядка соответствует $\lambda_1 = -1$, а $J_1(\lambda_2)$ — клетка первого порядка, совпадающая с элементом $\lambda_2 = -2$.

Для вычисления модальной матрицы воспользуемся значениями присоединенных матриц и их производных, полученных в (6. 8):

$$G(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -25 & -10 & 25 \\ -15 & -6 & 15 \end{bmatrix}; \quad G'(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix};$$

$$G(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ -15 & -15 & 30 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Хотя ранг $G(\lambda_1)$ равен единице, а $G'(\lambda_1)$ — двум, но в совокупности они имеют только два независимых столбца, пропорциональные которым принимаем в качестве собственных векторов для двукратного собственного значения λ_1. Третий вектор принимаем пропорциональным столбцу матрицы $G(\lambda_2)$, ранг которой равен единице. В результате получаем модальную матрицу:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 15 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}; \qquad H^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ -5 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверка по формуле $J = H^{-1}AH$ приводит к приведенной выше матрице Жордана.

3) Если для λ_k кратности m_k дефект d матрицы $\lambda_k E - A$ равен $m_k - 1$, то этому собственному значению соответствует $m_k - 1$ клеток Жордана, общий порядок которых равен m_k. Поэтому среди них может быть только одна клетка второго порядка, а остальные $m_k - 2$ клеток будут первого порядка. С точностью до расположения этих клеток блок для λ_k имеет при $d = m_k - 1$ следующую диагональную структуру:

$$J(\lambda_k) = \begin{bmatrix} J_2(\lambda_k) & & & \\ & J_1(\lambda_k) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (J_1\lambda_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{m_k-2} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{m_k-2}$$

Например:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\\ 4 & 10 & -12\\ 3 & 6 & -7\end{bmatrix};\quad F(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -2 & 3\\ -4 & \lambda-10 & 12\\ -3 & -6 & \lambda+7\end{bmatrix};$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3.$$

Так как при $\lambda=2$ ранг матрицы $F(2)$ равен единице, т. е. ее дефект равен двум, то каноническая матрица Жордана имеет вид:

$$J=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

6. Матрица Жордана в общем случае. Если дефект d_k матрицы $\lambda_k E-A$ для m_k-кратного λ_k больше единицы и меньше m_k, то определение соответствующих клеток Жордана встречает существенные трудности. Априори известно лишь количество d_k и суммарный порядок m_k клеток, соответствующих собственному значению λ_k, но выяснение порядка каждой из них требует дополнительного и довольно сложного исследования в каждом конкретном случае.

Если структура матрицы Жордана известна, то для вычисления модальной матрицы H можно воспользоваться уравнением $AH=HJ$, которое получается из преобразования подобия $J=H^{-1}AH$ умножением слева обеих частей равенства на H. Для клетки Жордана r-го порядка, соответствующей λ_k, из уравнения $AH=HJ$ имеем уравнение относительно r линейно-независимых собственных векторов $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(r)}$:

$$A[h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(r)}]=[h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(r)}]\,J_r(\lambda_k)=$$

$$=[h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(r)}]\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \cdots & \cdots\\ & & & \lambda_k\end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем систему r уравнений

$$Ah^{(1)}=\lambda_k h^{(1)};\quad Ah^{(2)}=h^{(1)}+\lambda_k h^{(2)};\ \ldots;\ Ah^{(r)}=h^{(r-1)}+\lambda_k h^{(r)},$$

или

$$(\lambda_k E-A)\,h^{(1)}=0;\quad (\lambda_k E-A)h^{(2)}=-h^{(1)};\ \ldots;$$
$$(\lambda_k E-A)h^{(r)}=-h^{(r-1)}.$$

Решая эти уравнения для каждой клетки Жордана, определяем соответствующие столбцы матрицы H. Вектор $h^{(1)}$ можно выбирать пропорциональным любому столбцу матрицы $G(\lambda_k)=\mathrm{Adj}\,[\lambda_k E-A]$.

При неизвестной структуре матрицы Жордана приведенные соотношения можно использовать для всевозможных вариантов расположения ее клеток. Если система уравнений для данного варианта совместна, то это свидетельствует о его соответствии истинной структуре матрицы Жордана, подобной данной матрице A.

Совокупность линейно-независимых собственных векторов $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(r)}$, соответствующих клетке $J_r(\lambda_k)$, образует *жорданову цепочку векторов* в r-мерном векторном пространстве, которое является подпространством n-мерного пространства. Совокупность всех жордановых цепочек составляет *жорданов базис* в этом n-мерном пространстве.

Рассмотрим, например, матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для нее

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^4 (\lambda + 1).$$

Подставляя значение четырехкратного корня $\lambda = 1$ в матрицу $\lambda E - A$, убеждаемся, что дефект этой матрицы равен двум. Следовательно, возможна одна из следующих двух форм матрицы Жордана:

$$J' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}; \qquad J'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Проверка с помощью уравнений для собственных векторов показывает, что правильной является вторая форма.

7. Функции от матрицы Жордана. Так как преобразование подобия $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ не изменяет собственных значений матрицы A, а матрица Q вещественная, то

$$f(\tilde{A}) = Q^{-1} f(A) Q; \quad f(A) = Q f(\tilde{A}) Q^{-1}.$$

Это значит, что определение функции от произвольной матрицы A можно свести к определению функции от подобной ей $\tilde{A}$ и, определив матрицу преобразования Q, найти затем $f(A)$ по приведенной выше формуле. Ясно, что наибольший для практики интерес представляет случай, когда $\tilde{A}$ имеет стандартную простейшую форму. Одной из таких форм и является каноническая матрица Жордана, которая для матрицы A простой структуры принимает диагональную форму. Последняя уже использовалась в (5.6) при определении экспоненциальной функции от матрицы с различными собственными значениями.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти общее выражение для функции от матрицы Жордана $f(J)$. В силу квазидиагональности J можно получить $f(J)$ заменой каждой клетки J_r Жордана на матрицу $f(J_r)$ и свести задачу к определению функции от этой клетки.

Воспользуемся интерполяционным методом. Так как характеристический многочлен для $J_r(\lambda_k)$ равен $(\lambda-\lambda_k)^r$, то интерполяционный многочлен имеет вид (6.5):

$$r(\lambda)=f(\lambda_k)+\frac{f'(\lambda_k)}{1!}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\frac{f^{(r-1)}(\lambda_k)}{(r-1)!}(\lambda-\lambda_k)^{r-1}.$$

Заменяя λ на матрицу J_r и учитывая, что $f(J_r)=r(J_r)$, получаем

$$f(J_r)=f(\lambda_k)E+\frac{f'(\lambda_k)}{1!}(J_r-\lambda_kE)+\cdots+\frac{f^{(r-1)}(\lambda_k)}{(r-1)!}(J_r-\lambda_kE)^{r-1}.$$

Учитывая структуру клетки J_r, легко убедиться, что $J_r-\lambda_kE$ представляет собой матрицу r-го порядка с единицами на первой наддиагонали, а остальные ее элементы равны нулю. При каждом умножении этой матрицы на себя единицы смещаются на следующую наддиагональ (1.6), так что матрица $(J_r-\lambda_kE)^j$ будет содержать единицы только на j-й наддиагонали. Очевидно, $(J_r-\lambda_kE)^{r-1}$ содержит единственный ненулевой элемент, равный единице, в правом верхнем углу. Таким образом, приходим к следующему виду функции от клетки J_r для собственного значения λ_k:

$$f(J_k)=\begin{bmatrix} f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(r-2)}(\lambda_k)}{(r-2)!} & \frac{f^{(r-1)}(\lambda_k)}{(r-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \cdots & \frac{f^{(r-3)}(\lambda_k)}{(r-3)!} & \frac{f^{(r-2)}(\lambda_k)}{(r-2)!} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} \\ & & & & f(\lambda_k) \end{bmatrix}.$$

Располагая такие блоки для всех собственных значений по диагонали, получаем квазидиагональную форму для функции $f(J)$ от матрицы Жордана. В частности, для диагональной матрицы

$$f(\Lambda) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

где функции для кратных собственных значений повторяются соответственно их кратности.

Зная $f(J)$ и модальную матрицу H, можно по формуле $f(A) = Hf(J)H^{-1}$ определить функцию от матрицы A, которой соответствует матрица J.

Экспоненциальную функцию от клетки Жордана $\exp(J_k t)$ запишем с учетом соотношений $f(\lambda_k) = \exp(\lambda_k t)$;

$$f'(\lambda_k) = \frac{1}{1!}\exp(\lambda_k t), \ \ldots, \ f^{(r-1)}(\lambda_k) = \frac{1}{(r-1)!}\exp(\lambda_k t)$$

в следующем виде

$$\exp(J_k t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1!}t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & \frac{1}{1!}t & \cdots & \frac{1}{(r-3)!}t^{r-3} & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & 1 & \cdots & \frac{1}{(r-4)!}t^{r-4} & \frac{1}{(r-3)!}t^{r-3} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & \frac{1}{1!}t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_k t}.$$

Например, для рассмотренной в (5) матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

имеем

$$\exp(Jt) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad \exp(At) = H\exp(Jt)H^{-1};$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 15 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ -5 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

что приводит к результату, полученному для рассматриваемого примера другим методом в (6.9).

8. Конгруэнтное преобразование. Пусть, как и при эквивалентном преобразовании, ссуществляется переход к различным координатным базисам для векторов x и y в линейном преобразовании $y = Ax$. Потребовав, чтобы при этом сохранялось неизменным скалярное произведение этих векторов, получим другой частный случай эквивалентного преобразования $\tilde{A} = PAQ$ — *конгруэнтное преобразование*. Так как $x' = Q^{-1}x$ и $y' = Py$, то условие $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ означает $x^t y = x'^t y'$, что соответствует $x^t y = x^t (Q^{-1})^t P y$. Это равенство имеет место только при $(Q^{-1})^t P = E$, откуда получаем $P = Q^t$ и, следовательно, $y' = Q^t y$. Таким образом, конгруэнтное преобразование выражается соотношением

$$\tilde{A} = Q^t AQ.$$

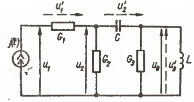


Рис. 83. Схема электрической цепи, на примере которой выполнено преобразование системы координат.

Наряду с инвариантностью скалярного произведения это преобразование характерно также тем, что сохраняет свойство симметричности матрицы A. Действительно, если A симметрична ($A = A^t$), то $\tilde{A}^t = Q^t A^t Q^{tt} = Q^{(t)} A^t Q = Q^t AQ = \tilde{A}$, т. е. преобразованная матрица $\tilde{A}$ также симметрична. Это обстоятельство широко используется в теории электрических цепей и других физических систем для преобразования системы координат.

Например, схема (рис. 83) относительно напряжений u_1, u_2, u_3 описывается системой дифференциальных уравнений (в операторной записи):

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + pC & -pC \\ 0 & -pC & pC + \frac{1}{pL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где p соответствует оператору дифференцирования $\frac{d}{dt}$; $\frac{1}{p}$ — оператору интегрирования $\int dt$. Пусть требуется перейти к другой системе независимых напряжений u_1', u_2', u_3'. Тогда матрица преобразования Q определяется из зависимостей между напряжениями, которые записываются по второму закону Кирхгофа:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -u_1' - u_2' + u_3' \\ u_2 &= -u_2' + u_3' \\ u_3 &= -u_3' \end{aligned}\right\}; \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Конгруэнтное преобразование переводит матричное уравнение схемы $Yu = j$ к виду $(Q^tYQ)u' = Q^tj$ или $\tilde{Y}u' = j'$, где матрично-векторные параметры в новой системе координат выражаются как $\tilde{Y} = Q^tYQ$ и $j' = Q^tj$. В нашем примере:

$$Y' = Q^tYQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + pC & -pC \\ 0 & -pC & pC + \frac{1}{pL} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 + pC & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + \frac{1}{pL} \end{bmatrix};$$

$$J' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(t) \\ -j(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, уравнения схемы в новой системе координат запишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 + pC & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + \frac{1}{pL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(t) \\ -i(t) \\ i(t) \end{bmatrix}.$$

Канонической формой, к которой можно привести симметричную матрицу ранга r с помощью конгруэнтного преобразования, является диагональная матрица вида:

$$\Lambda = Q^tAQ = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

где E_p и E_{r-p} — единичные матрицы порядков p и $r - p$. Число p называется *индексом матрицы*, а $s = p - (r - p) = 2p - r$ — *сигнатурой* (предполагается в общем случае, что $r \leqslant n$). Две матрицы n-го порядка считаются конгруэнтными, если они одинакового ранга и равны их индексы (или сигнатуры).

9. Биортонормированные базисы. При конгруэнтном преобразовании осуществляется переход к новым различным базисам для двух векторов x и y, участвующих в линейном преобразовании $y = Ax$. При этом $x' = Q^{-1}x = Bx$ и $y' = Q^ty = Cy$, что соответствует $y' = \tilde{A}x'$, где $\tilde{A} = Q^tAQ$. Столбцы матриц $B = Q^{-1}$ и $C =$

$= Q^t$ образуют два новых базиса для векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$x' = b^{(1)}x_1 + b^{(2)}x_2 + \cdots + b^{(n)}x_n;$$
$$y' = c^{(1)}y_1 + c^{(2)}y_2 + \cdots + c^{(n)}y_n.$$

Из условия инвариантности скалярного произведения $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle b^{(i)}, c^{(j)}\rangle x_i y_j,$$

откуда

$$\langle b^{(i)}, c^{(j)}\rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Две совокупности векторов $\{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}\}$ и $\{c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(n)}\}$, обладающие этим свойством, называют *биортонормированными*.

Таким образом, конгруэнтное преобразование соответствует переходу к *биортонормированным базисам*.

10. Ортогональное преобразование. Если потребовать, чтобы преобразование векторов x и y осуществлялось к одному базису (как в преобразовании подобия) с сохранением неизменным их скалярного произведения (как в конгруэнтном преобразовании), то следует положить $B = C$ или $Q^{-1} = Q^t$. При этом два биортонормированных базиса сливаются в общий ортонормированный. Матрица A линейного преобразования $x = Ay$ в старых координатах преобразуется в $\tilde{A} = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$, причем $Q = (Q^{-1})^t$.

Столбцы матрицы Q^t или строки Q образуют ортонормированную систему векторов в n-мерном евклидовом пространстве, так как они отвечают соотношению

$$< q_{(i)}, q_{(j)} > = \delta_{ij}.$$

В связи с этим матрица Q называется *ортогональной*, а преобразование $A = Q^tAQ$ с такой матрицей — *ортогональным преобразованием*. Ортогональными являются и соответствующие преобразования векторов $x' = Q^tx$ и $y' = Q^ty$.

Ортогональные матрицы обладают следующими свойствами:

1. Если Q ортогональна, то Q^t также ортогональна, так как из условия ортогональности $QQ^t = Q^tQ = E$. Следовательно, совокупность столбцов ортогональной матрицы также образует ортогональный базис.

2. Из соотношения $QQ^t = E$ следует $\det Q \det Q^t = 1$, и так как $\det Q = \det Q^t \neq 0$, то $(\det Q)^2 = 1$ и $\det Q = \pm 1$, т. е. определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

3. Произведение двух ортогональных матриц Q и R есть также ортогональная матрица. В самом деле, если $V = QR$, то $(V^{-1})^t = (R^tQ^t)^{-1} = (Q^{-1})^t(R^{-1})^t = QR = V$.

4. Если ортогональная матрица симметрична ($Q = Q^t$), то она инволютивна, т. е. равна своей обратной ($Q = Q^{-1}$). Действительно, из $QQ^t = E$ и $Q = Q^t$ следует $QQ = E$ или $Q = Q^{-1}$.

Ортогональное преобразование обладает всеми свойствами преобразования подобия и конгруэнтного преобразования. Его дополнительным свойством является инвариантность длины (нормы) векторов. Действительно, так как $x' = Q^tx$, то $\langle x', x'\rangle = x'^tx' = x^t(Q^t)^tQ^tx = x^tQQ^tx = x^tx = \langle x, x\rangle$, поскольку $QQ^t = E$. Ясно, что угол γ между векторами, определяемый соотношением $\cos\gamma = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \ \|y\|}$, где нормы векторов $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ и $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$, также не изменяется при ортогональном преобразовании.

Так как ортогональное преобразование (как и конгруэнтное) сохраняет симметрию матрицы A и в то же время обладает свойствами преобразования подобия, то любую симметричную матрицу можно привести к симметричной канонической форме Жордана. Но симметричность матрицы Жордана означает, что она должна быть диагональной. Таким образом, для симметричной матрицы, независимо от кратности собственных значений всегда можно найти такую матрицу Q, которая приводит ее преобразованием $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ к диагональной форме, на что указывалось в (3).

Можно показать, что собственные значения вещественной симметричной матрицы (а также эрмитовой матрицы) вещественны. Ее собственные векторы образуют ортогональную систему, причем с собственным значением λ_k кратности m_k связаны m_k собственных векторов.

11. Конъюнктивное и унитарное преобразования. До сих пор предполагалось, что матрица A вещественна и вещественны также преобразующие матрицы, т. е. рассмотренные преобразования относятся к евклидовым пространствам. Они легко обобщаются и для *унитарных пространств*, когда элементами векторов и матриц являются комплексные числа.

Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ в унитарном пространстве определяется как x^ty^*, где y^* — комплексно-сопряженный вектор, а преобразованию $y' = Py$ соответствует $y^{*\prime} = \bar{P}y^*$, где $\bar{P}$ — матрица, комплексно-сопряженная с P. Тогда для конгруэнтного преобразования из условия инвариантности скалярного произведения получим $\bar{P} = Q^t$ или $P = \bar{Q}^t = Q^*$, где Q^* — сопряженная с Q. Конгруэнтное преобразование в унитарном пространстве называют *конъюнктивным преобразованием*:

$$\tilde{A} = Q^*AQ.$$

Преобразование	$y=Ax\to y'=Ax'$		
	x'	y'	$\tilde{A}$
Эквивалентное	$Q^{-1}x$	Py	PAQ
Подобия	$Q^{-1}x$	$Q^{-1}y$	$Q^{-1}AQ$
Конгруэнтное	$Q^{-1}x$	$Q^{t}y$	$Q^{t}AQ$
Ортогональное	$Q^{-1}x=Q^{t}x$	$Q^{-1}y=Q^{t}y$	$Q^{-1}AQ= =Q^{t}AQ$
Конъюнктивное	$Q^{-1}x$	$Q^{*}y$	$Q^{*}AQ$
Унитарное	$Q^{-1}x= =Q^{*}x$	$Q^{-1}y= =Q^{*}y$	$Q^{-1}AQ= =Q^{*}AQ$

Если Q — вещественная матрица, то $Q^* = Q^t$ и формула преобразования имеет тот же вид, что и в евклидовом пространстве.

Аналогичное обобщение ортогонального преобразования на унитарное пространство характеризуется соотношением $Q\bar{Q}^t = E$ или $QQ^* = E$, откуда $Q = (Q^*)^{-1}$. Ортогональное преобразование в унитарном пространстве называется *унитарным* и характеризуется соотношением

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = Q^*AQ,$$

где $Q = (Q^*)^{-1}$. Матрица Q, обратная своей сопряженной Q^*, называется *унитарной*. Ее определитель выражается комплексным числом, модуль которого равен ± 1. Свойства рассмотренных видов матричных преобразований сведены в табл. 3.

Таблица 3

преобразования

Новые координатные базисы для x и y	Инварианты матричного преобразования
Различные произвольные в евклидовом пространстве	Ранг матрицы
Общий произвольный в евклидовом пространстве	Ранг, определитель и собственные значения матрицы
Различные биортонормированные в евклидовом пространстве	Ранг и симметрия матрицы, скалярное произведение векторов
Общий ортонормированный в евклидовом пространстве $Q^{-1} = Q^t$	Ранг, определитель, собственные значения и симметрия матрицы; скалярное произведение, углы и нормы векторов
Различные биортонормированные в унитарном пространстве	Ранг и сопряженность матрицы; скалярное произведение векторов
Общий ортонормированный в унитарном пространстве $Q^{-1} = Q^*$	Ранг, определитель, собственные значения и сопряженность матрицы; скалярное произведение, углы и нормы векторов

12. Преобразование квадратичных форм. Квадратичная форма от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — это сумма, каждый член которой является квадратом одной из них или произведением двух различных переменных:

$$\psi(x) = (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n) + (a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n) + \cdots + (a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Это выражение можно записать в матричной форме:

$$\psi(x) = [x_1, \ x_2, \ \dots, \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x^t A x = \langle x, \ Ax \rangle.$$

Матрица A коэффициентов формы называется *ассоциированной* с квадратичной формой $\psi(x)$ или просто *матрицей формы*, а ранг матрицы A является и рангом определяемой ею формы $\psi(x)$. В двойной сумме каждый член, содержащий x_i и x_j, встречается дважды как $a_{ij}x_ix_j$ и $a_{ji}x_jx_i$. Целесообразно положить a_{ij} и a_{ji} равными $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, от чего сумма не изменится, но зато матрицу A можно считать симметричной, что существенно упрощает исследование и преобразование квадратичных форм.

Обозначив $y = Ax$, можно рассматривать квадратичную форму как скалярное произведение $\langle x, \ y \rangle$. Очевидно, для преобразования квадратичной формы подходит всякое преобразование матрицы A, не изменяющее скалярного произведения. Так, при конгруэнтном преобразовании $\tilde{A} = Q^tAQ$ вектор x преобразуется к $x' = Q^{-1}x$, где Q — произвольная неособенная матрица.

Особый интерес представляет преобразование квадратичной формы к *канонической*, в которой она содержит только сумму членов с квадратами переменных $x_1^2, \ x_2^2, \ \dots, \ x_n^2$. Ясно, что для этого необходимо преобразовать симметричную матрицу A к диагональной, что всегда осуществимо с помощью ортогонального преобразования. При этом вектор x преобразуется к $x' = Q^tx$. Разработано несколько практических способов такого преобразования. Один из них иллюстрируется следующим примером.

Пусть дана квадратичная форма $\psi(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$. Тогда

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad \lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 6 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 5 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162; \quad \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 9.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие трем различным собственным значениям. Для этого воспользуемся, например, значениями присоединенной матрицы (6. 8):

$$G(\lambda_1) = (\lambda_2 E - A)(\lambda_3 E - A); \quad G(\lambda_2) = (\lambda_1 E - A)(\lambda_3 E - A);$$

$$G(\lambda_3) = (\lambda_1 E - A)(\lambda_2 E - A).$$

Так как все столбцы этих матриц пропорциональны, то достаточно вычислить лишь по одному столбцу и принять их или пропорциональные им в качестве столбцов модальной матрицы. После соответствующих вычислений получим:

$$h^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad h^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad h^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы применить ортогональное преобразование, пронормируем эти векторы, разделив их составляющие на норму, которая для всех векторов равна:

$$\| h \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Таким образом получаем ортогональную матрицу, которая является и нормированной модальной матрицей преобразования подобия:

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $Q^t = Q^{-1}$. По формуле $\tilde{A} = Q^t A Q$ приходим к диагональной матрице:

$$\tilde{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в новом ортонормированном базисе, который образуют столбцы матрицы Q, квадратичная форма принимает канонический вид

$$\psi(x') = 3(x_1')^2 + 6(x_2')^2 + 9(x_3')^2,$$

причем

$$x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = Q^t x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

13. Положительная определенность. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если она положительна для всех значений x, исключая $x = 0$. Ясно, что это возможно только при положительности всех собственных значений неособенной матрицы A данной формы.

Квадратичная форма $<x, Ax>$ называется *положительно полуопределенной*, если она неотрицательна для всех значений x и существуют значения $x \neq 0$, для которых она равна нулю. Этот случай обусловлен требованием неотрицательности всех собственных значений матрицы A, среди которых хотя бы одно равняется нулю, т. е. матрица A должна быть особенной.

Матрица положительно определенной (полуопределенной) формы также называется *положительно определенной (полуопределенной) матрицей*. Аналогично определяются отрицательно определенная и полуопределенная формы. Если матрица A обладает как положительными, так и отрицательными собственными значениями, то квадратичная форма является *неопределенной*.

Характер определенности квадратичной формы можно выяснить, если известны собственные значения ее матрицы или если эта матрица преобразована к канонической форме. Однако такой сложный путь можно обойти, исследуя главные миноры матрицы квадратичной формы.

Можно показать, что необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы (или симметричной матрицы) является положительность главных миноров ее матрицы:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0; \ \ldots$$

$$\ldots \ ; \ \Delta_n = |A| > 0.$$

Миноры Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), образованные первыми k строками и k столбцами матрицы, называются ее *дискриминантами*, а приведенное выше условие — *дискриминантным критерием*.

Например, $\psi(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ является положительно определенной, так как

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = 2 > 0.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Укажите операции над строками (столбцами) матрицы четвертого порядка, которым соответствует умножение ее слева (справа) на матрицы:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Какие из этих матриц являются элементарными? Выразите неэлементарные матрицы через произведения матриц, осуществляющих элементарные преобразования.

2. Найдите матрицу, при умножении которой на квадратную матрицу четвертого порядка (слева или справа) осуществляются следующие эквивалентные преобразования:

а) перестановка второй и четвертой строк, а также прибавление к первой строке второй строки, умноженной на 2, и вычитание из первой строки третьей строки (матрица P);

б) перестановка первого и второго столбцов, умножение четвертого столбца на 3 и вычитание из третьего столбца удвоенного первого столбца (матрица Q).

3. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

а) Используя результаты предыдущей задачи, выполните умножения PA и AQ и убедитесь в выполнении соответствующих преобразований над строками и столбцами матрицы A.

б) Определите эквивалентную матрицу по формуле $\widetilde{A} = PAQ$.

в) С помощью элементарных преобразований приведите матрицы A и $\widetilde{A}$ к канонической форме и покажите, что эти матрицы имеют одинаковые ранги.

4. Какие из приведенных ниже матриц являются эквивалентными:

а) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$?

5. Покажите, что эквивалентность матриц обладает всеми свойствами отношения эквивалентности (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

6. Найдите матрицу, подобную A, с помощью преобразующей матрицы Q, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. С помощью преобразования подобия приведите к диагональной форме следующие матрицы:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

а) Найдите подобную ей диагональную матрицу и объясните, почему такая матрица существует?

б) Покажите, что преобразующая матрица H в преобразовании подобия $\tilde{A} = H^{-1}AH$ является ортогональной, т. е. $H^{-1} = H^t$.

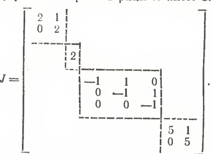
9. Найдите каноническую форму Жордана для следующих матриц:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

10. Для каждой из матриц, приведенных в предыдущей задаче, найдите модальную матрицу H, преобразующую к канонической форме Жордана, и проверьте результат по формуле $J = H^{-1}AH$.

11. Запишите экспоненциальные функции от матриц, приведенных в задаче 9.

12. Жорданова форма некоторой матрицы A имеет вид:



Что можно сказать о характеристических числах λ_k и дефектах матриц $F(\lambda_k) = \lambda_k E - A$?

13. Покажите, что любая числовая квадратная матрица подобна треугольной (верхней или нижней) матрице над полем комплексных чисел. В каких случаях элементы треугольной матрицы комплексные?

14. Покажите, что в преобразовании подобия $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ роль преобразующей матрицы, наряду с Q, может играть также любая матрица $Q' = CQ$, где C — произвольная неособенная матрица, перестановочная с A.

15. Покажите, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

приводится к канонической форме Жордана J с помощью преобразующей матрицы H, где

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix};\quad H=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 5\\ -1 & 11 & 0 & 7\end{bmatrix}.$$

Проверьте, что $J=H^{-1}AH$ (или $HJ=AH$).

16. Матрицы являются подобными, если преобразованием подобия они приводятся к одинаковой канонической форме. Являются ли подобными матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{bmatrix}?$$

17. Найдите модальную матрицу, каноническую форму и экспоненциальную функцию для каждой из следующих матриц:

а) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

18. С помощью преобразования подобия найдите фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=3x_1-x_2-4x_3+2x_4\\ \frac{dx_2}{dt}&=2x_1+3x_2-2x_3-4x_4\\ \frac{dx_3}{dt}&=2x_1-x_2-3x_3+2x_4\\ \frac{dx_4}{dt}&=x_1+2x_2-x_3-3x_4\end{aligned}\right\}.$$

19. Дана квадратичная форма

$$\psi(x)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

а) Запишите матрицу A формы и представьте ее в виде $\psi(x)=x^tAx$.

б) Приведите данную форму к каноническому виду.

в) Выразите векторы, образующие новый ортонормированный базис, через компоненты вектора x.

г) Установите, является ли данная форма положительно определенной.

20. Какие из приведенных ниже матриц являются положительно определенными:

а) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$?

8. ПРОСТРАНСТВО ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

1. Переменные состояния. При рассмотрении физической системы как объекта исследования или проектирования целесообразно распределить все переменные, характеризующие систему или имеющие к ней какое-либо отношение, на три множества:

1) *входные переменные* $v_1, v_2, \ldots, v_m$, характеризующие внешние воздействия на входы системы;

2) *переменные состояния* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — внутренние (промежуточные) переменные, совокупность которых полностью характеризует свойства системы;

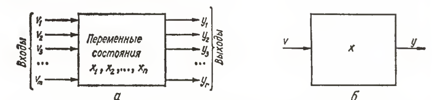


Рис. 84. Система с m входами и r выходами (a) и ее обобщенное представление ($б$).

3) *выходные переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_r$, представляющие те реакции на внешние воздействия и те состояния системы, которые представляют интерес для исследователя или конструктора.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора: входной (задающий) вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, вектор состояний $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и выходной вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$. Сама система в общем виде представляется «черным ящиком» с m входами и r выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная (рис. 84, a). Можно рассматривать совокупность входов как один обобщенный вход, на который воздействует входной вектор v, а совокупность выходов — как обобщенный выход, который характеризуется выходным вектором y (рис. 84, $б$). Переменные состояния связаны с внутренними свойствами системы и поэтому указываются внутри «черного ящика».

Собственно система, ее входы и выходы — это три взаимосвязанных объекта, которые в каждой конкретной ситуации определяются соответственно описанием системы (структура и свойства компонент или математическая модель системы), а также заданием множеств входных и выходных переменных. В зависимости от того, какой из этих объектов подлежит определению (при остальных двух заданных) различают три типа задач исследования и проектирования систем:

Тип задачи	Входы	Система	Выходы
Анализ	×	×	?
Синтез	×	?	×
Измерение	?	×	×

Решение любой из этих задач непосредственно связано с исследованием состояний системы, множество которых образует пространство состояний.

2. Основные уравнения. Непрерывные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать парой матричных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t), \quad v(t)]; \quad y(t) = \varphi[x(t), \quad v(t)].$$

Первое из них является *уравнением состояния* системы, решение которого, удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(t_0)$, дает вектор состояния

$$x(t) = \psi[x(t_0), \quad v(t)].$$

Второе уравнение определяет выходные переменные в зависимости от $x(t)$ и $v(t)$, и потому оно называется *выходным уравнением*.

В частных случаях эти уравнения принимают специфическую форму в соответствии со свойствами системы. Для линейных систем имеем:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)v(t);$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t),$$

где A — *матрица системы* (квадратная n-го порядка); $B(t)$ — *матрица управления* размера $(n \times m)$; $C(t)$ — *матрица выхода* размера $r \times n$ и $D(t)$ — *матрица входа* размера $r \times m$. Если элементы этих матриц зависят от времени t, то система называется *линейной нестационарной* (или *параметрической*). Для *линейных стационарных* систем (часто их называют просто *линейными системами*) элементы матриц A, B, C, D выражаются постоянными числами, которые являются функциями параметров компонент системы.

Наиболее сложную структуру имеют уравнения *нелинейных систем*, компоненты которых характеризуются нелинейными зависимостями между переменными на их входах и выходах. В ряде практически важных случаев уравнения состояния нелинейной системы можно представить в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bv(t) + Fz(t); \quad f[x(t), \quad z(t), \quad v(t)] = 0,$$

где A, B и F — постоянные матрицы; $f(x, z, v) = 0$ — нелинейное алгебраическое уравнение, решение которого относительно вектора z позволяет исключить этот вектор из дифференциального уравнения. В более сложных случаях элементы матриц A, B и F могут зависеть от состояния системы.

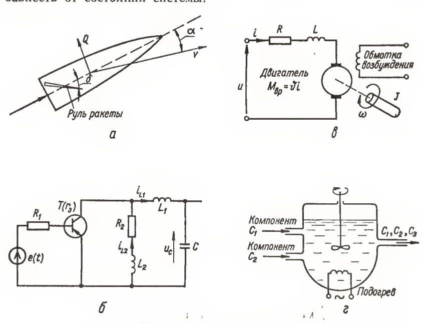


Рис. 85. Примеры физических систем:
а — управляемая ракета; *б* — электронная схема; *в* — двигатель постоянного тока; *г* — химический реактор

3. Примеры физических систем. Математическое моделирование в пространстве переменных состояний широко используется при исследовании физических систем. Приведем несколько примеров, относящихся к системам различной природы.

Управляемая ракета (рис. 85, *а*) при малых значениях угла атаки α и угла отклонения рулевой поверхности δ описывается линеаризированной системой уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\omega\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{Q}{J}C_{m\alpha}\\ 1 & -\frac{1}{mv}(QC_{L\alpha}+T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{Q}{J}C_{m\delta}\\ -\frac{Q}{mv}C_{L\delta}\end{bmatrix}\delta;$$

$$\alpha_N=\frac{QC_{N\alpha}}{mg}\alpha+\frac{QC_{N\delta}}{mg}\delta.$$

Переменными состояния являются угловая скорость ω и угол атаки α, а задающей величиной — угол отклонения руля δ. Поперечное ускорение ракеты α_N (в единицах g) является выходной величиной. Момент инерции J относительно оси тангажа, масса m и скорость v ракеты предполагаются постоянными. Динамические коэффициенты $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta}$, $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta}$, $C_{N\alpha}$, $C_{N\delta}$ также постоянны (их значения получают в результате аэродинамических продувок).

Электронная схема (транзисторный усилитель со сложной коррекцией, рис. 85, *б*) в квазилинейном режиме на низких частотах описывается системой уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C} & 0\\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r}{L_1} & -\frac{r}{L_1}\\ 0 & -\frac{r}{L_2} & -\frac{1}{L_2}(r+R_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{r_{21}}{L_1(r_{11}+R_1)}\\ -\frac{r_{21}}{L_2(r_{11}+R_1)}\end{bmatrix}e(t),$$

где

$$r=\frac{(r_{11}+R_1)r_{22}-r_{12}r_{21}}{r_{11}+R_1}.$$

Переменными состояния являются напряжение u_C на емкости и токи i_{L1}, i_{L2} в индуктивностях, а задающей функцией — напряжение $e(t)$ источника на входе. Низкочастотные параметры транзистора r_{11}, r_{12}, r_{21} и r_{22} определены по схеме с общим эмиттером.

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 85, *в*) в предположении, что поток возбуждения постоянен, описывается уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\theta}{J}\\ -\frac{\lambda}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u.$$

Здесь переменные состояния — угловая скорость двигателя ω и ток i в цепи якоря, а задающая величина — напряжение u на входе двигателя. Параметры двигателя определяются сопротивлением R и индуктивностью L цепи якоря, моментом инерции J и коэффициентом пропорциональности θ между вращающим моментом и током в цепи якоря.

Химический реактор с мешалкой и подогревом (рис. 85, *г*), в котором протекают одновременно две реакции: экзотермическая $C_1 \to C_2$ со скоростью ν_1 и теплотой h_1 и эндотермическая $C_2 \to C_3$ со скоростью ν_2 и теплотой h_2, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1 - (v_1 - v_2 - \nu_1)\,x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \nu_1(1 - x_1 - x_3) - (v_1 + v_2)\,x_3 \\ \frac{d\tau}{dt} &= h_1\nu x_1 + h_2\nu_2(1 - x_1 - x_3) + v_1(\tau_1 - \tau) + v_2(\tau_2 - \tau) + c \end{aligned}\right\}.$$

Переменные состояния x_1 и x_3 означают весовые доли компонентов C_1 и C_3, которые связаны с весовой долью x_2 компоненты C_2 зависимостью $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Третья переменная состояния τ — температура реактора. Уравнение составлено в предположении, что компоненты C_1, C_2, C_3 имеют одинаковые теплоемкости и плотности, молекулярный вес компонент в ходе реакции не изменяется. Скорости v_1 и v_2 поступления компонент C_1 и C_2 соответственно и их температуры τ_1 и τ_2 являются задающими воздействиями, а c — скорость теплообмена реактора. Скорости реакций выражаются экспоненциальными функциями

$$\nu_1 = x_1 \exp\frac{\alpha_1 - \beta_1}{\tau} \quad \text{и} \quad \nu_2 = x_2 \exp\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\tau},$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ — константы.

Обозначив вектор переменных состояния $x = (x_1,\ x_3,\ \tau)$ и вектор воздействий $v = (v_1,\ v_2,\ \tau_1,\ \tau_2)$, нелинейное уравнение можно записать в матричной форме через вектор-функцию f:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ v,\ t).$$

Приведенные примеры иллюстрируют высокую степень общности представления физических систем в пространстве переменных состояния.

4. Линейные (стационарные) системы. Уравнение состояния линейной стационарной системы $\dot{x}(t) = Ax + Bv$ представляет собой матричную запись системы дифференциальных уравнений

с постоянными коэффициентами в нормальной форме. Его решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = x(0)$, для вектора состояния и выходного вектора имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bv(\tau)\, d\tau;$$

$$y(t) = C\Phi(t)\, x(0) + \int_0^t C\Phi(t-\tau)\, Bv(\tau)\, d\tau + Dv(t).$$

Первые слагаемые соответствуют реакции, зависящей от начальных условий (свободное движение системы), а остальные слагаемые — реакции на входные воздействия (вынужденное движение). Фундаментальная матрица

$$\Phi(t) = e^{At} = \exp At$$

называется *переходной матрицей состояния* системы. Она осуществляет линейное преобразование, которое переводит начальное состояние $x(0)$ системы в некоторое состояние для момента времени t (при нулевых входах), т. е. $x(t) = \Phi(t)\, x(t_0)$.

При нулевых начальных условиях $x(0) = 0$ связь между реакцией на выходах и воздействиями на входах описывается соотношением

$$y(t) = \int_0^t [C\Phi(t-\tau)\, B + D]\, v(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau.$$

Матрица $g(t) = C\Phi(t)\, B + D$ представляет собой обобщенную характеристику системы относительно ее входов и выходов. Реакция на i-м выходе

$$y_i(t) = \int_0^t [g_{i1}(t-\tau)\, v_1(\tau) + g_{i2}(t-\tau)\, v_2(\tau) + \cdots + g_{1m}(t-\tau)\, v_m(\tau)]\, d\tau,$$

где $g_{ij}(t)$ — ij-элемент матрицы $g(t)$. Каждый член подынтегральной функции отражает вклад соответствующего входного воздействия и равен реакции $y_{ij}(t)$ на i-м выходе относительно j-го входа при условии, что все остальные входы нулевые, т. е.

$$y_{ij}(t) = \int_0^t g_{ij}(t-\tau)\, v_j(\tau)\, d\tau \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ r;\quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Правая часть этого скалярного равенства является *интегралом свертывания (сверткой функций)*. Для двух интегрируемых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ он определяется в общем виде соотношениями:

$$f_1(t) \ast f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$$

и обладает следующими свойствами (верхние индексы k и $-k$ указывают соответственно на кратность операций дифференцирования и интегрирования):

$$f_1(t) \ast f_2^{(k)}(t) = f_1^{(k)}(t) \ast f_2(t); \quad f_1(t) \ast f_2^{(-k)}(t) = f_1^{(-k)}(t) \ast f_2(t).$$

В соответствии с приведенными соотношениями выражение для $y_{ij}(t)$ можно записать четырьмя различными способами (в дальнейшем скалярные функции $y_{ij}(t)$ и $v_j(t)$ для упрощения обозначаются через $y(t)$ и $v(t)$):

$$y(t) = g(t) \ast v(t) = \int_0^t g(t-\tau) v(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau) v(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t h(t-\tau) v'(\tau)\, d\tau = \int_0^t h(\tau) v'(t-\tau)\, d\tau,$$

где $h(t)$ — функция, производная которой по ее аргументу определяет $g(t)$, т. е.

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t); \quad g(t-\tau) = \frac{d}{d(t-\tau)} h(t-\tau).$$

Скалярные функции $g(t)$ и $h(t)$ называются соответственно *импульсной* и *переходной характеристиками*. Им можно дать наглядное истолкование, вводя в рассмотрение специальные функции.

5. Импульсная и переходная характеристики. Пусть на входе системы в момент времени τ приложен кратковременный импульс $v(t)$ длительностью $\Delta\tau$. Используя известную теорему о среднем значении, выражение для реакции на выходе можно представить в виде:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) v(\tau)\, d\tau = g(t-\theta) \int_0^t v(\tau)\, d\tau = g(t-\theta) s_u,$$

где $0 < \theta < t$; s_u — площадь импульса.

Реакция равна значению импульсной характеристики $g(t-\tau)$, если $s_u = 1$ и $\theta = \tau$, что соответствует воздействию на входе в момент времени τ импульса единичной площади и бесконечно малой длительности. В пределе при $\Delta\tau \to 0$ амплитуда такого импульса

неограниченно возрастает, но его площадь остается конечной, численно равной единице. Мгновенный импульс, обладающий такими свойствами, представляет собой *единичную импульсную функцию* $\delta(t-\tau)$, действующую в момент времени τ (рис. 86, *а*), т. е.

$$\delta(t-\tau)=0 \quad (\text{при } t \neq \tau); \qquad \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau)\, d\tau = 1 \quad (\text{для всех } \varepsilon > 0).$$

Итак, $g(t-\tau)$ можно рассматривать как реакцию системы на единичную импульсную функцию $\delta(t-\tau)$, приложенную на входе в момент τ. Соответственно *импульсная характеристика* $g(t)$ определяется как реакция на единичную импульсную функцию, воздействующую на систему в начальный момент времени $t=0$. То

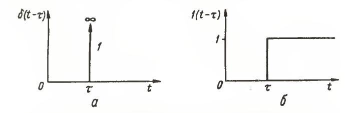


Рис. 86. Стандартные входные воздействия:
а — единичная импульсная функция; *б* — единичная ступенчатая функция.

обстоятельство, что единичная импульсная функция не имеет конечного значения при $t=\tau$ не препятствует ее использованию, так как реакция зависит не от ее значения, а от конечной площади. Определение единичной импульсной функции не укладывается в обычные представления о функции, поэтому ее относят к классу обобщенных функций и называют также *дельта-функцией* или *функцией Дирака*.

Рассмотрим теперь интеграл свертывания в форме

$$y(t)=\int\limits_0^t h(t-\tau)\, v'(\tau)\, d\tau$$

и выясним свойства входной функции $v(t)$, при воздействии которой реакция $y(t)$ на выходе равна переходной характеристике $h(t-\tau)$. Очевидно, производная $v'(t)$ должна представлять собой единичную импульсную функцию $\delta(t-\tau)$. Это значит, что $v(t)$ имеет скачок при $t=\tau$, а ее значения определяются интегралом

$$v(t)=\int\limits_0^t \delta(t-\tau)\, d\tau.$$

В соответствии с определением $\delta(t-\tau)$ этот интеграл должен быть равен нулю при $t<\tau$ и единице при $t>\tau$. Такими свойствами обладает *единичная ступенчатая функция*, или *функция Хевисайда* (рис. 86, *б*), определяемая как

$$1(t-\tau)=\begin{cases} 0 \text{ при } t<\tau \\ 1 \text{ при } t>\tau \end{cases}.$$

При $t=\tau$ функция $1(t-\tau)$ не определена, хотя иногда ее каким-либо образом доопределяют в точке разрыва, полагая равной 1/2 или 1.

Итак, $h(t-\tau)$ — это реакция на единичную ступенчатую функцию $1(t-\tau)$, приложенную на входе в момент времени τ. Соответственно *переходная характеристика* $h(t)$ определяется как реакция на единичную ступенчатую функцию, воздействующую на систему в начальный момент времени $t=0$.

Многомерная система характеризуется относительно ее входов и выходов матрицами $g(t)$ или $h(t)$, элементами которых являются соответственно импульсные $g_{ij}(t)$ или переходные $h_{ij}(t)$ характеристики для i-го выхода относительно j-го входа (при нулевых состояниях на всех остальных входах).

6. Принцип суперпозиции. Выражения для выходной функции (4) линейной системы можно рассматривать с позиций *принципа суперпозиции*. Так как $g(t-\tau)$ является реакцией на воздействие единичной импульсной функции, то

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)\,v(\tau)\,d\tau$$

представляет собой суммарную реакцию в момент t на элементарные воздействия, каждое из которых является импульсной функцией со значением $v(\tau)d\tau$, действующей в момент τ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$. Другая форма интеграла свертывания

$$y(t)=\int_0^t g(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau$$

содержит входную функцию $v(t-\tau)$, сдвинутую на τ по отношению к моменту времени t. При $\tau=0$ она равна $v(t)$ и с ростом τ функция $v(t-\tau)$ представляет собой воздействия для все более ранних моментов времени в прошлом, становясь при $\tau=t$ равной $v(0)$. Выходную реакцию $y(t)$ в момент t можно рассматривать как сумму элементарных реакций на импульсные функции со значениями $v(t-\tau)d\tau$, действующие в начальный момент времени $t=0$.

Различие между двумя рассмотренными представлениями интеграла свертывания чисто формальное. В первом случае импульс-

ные функции, на которые разлагается входное воздействие $v(t)$, как бы образуются стробирующим импульсом бесконечно малой длительности движущимся от 0 до t (рис. 87, *а*). Во втором случае (рис. 87, *б*) стробирующий импульс неподвижен и расположен в точке $t = 0$, а сама функция $v(t)$ перемещается в обратном направлении от t до 0. Ясно, что результат получим один и тот же.

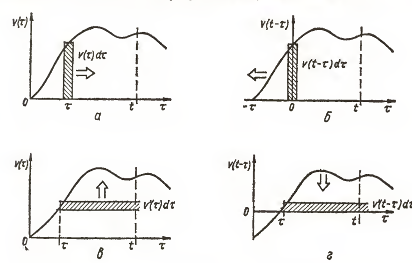


Рис. 87. Представления интеграла свертывания с помощью подвижного (*а*) и неподвижного (*б*) стробирующих импульсов, а также подвижной (*в*) и неподвижной (*г*) ступенчатых функций.

В двух остальных выражениях для выходной реакции через интегралы свертывания

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, v'(\tau)\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\, v'(t-\tau)\, d\tau$$

роль элементарных воздействий играют соответственно ступенчатые функции со значениями $v'(\tau)d\tau$ (рис. 87, *в*) и $v'(t-\tau)d\tau$ (рис. 88, *г*). Интерпретация интеграла свертывания на основе разложения по специальным функциям служит основанием для другого его названия — *интеграла суперпозиции*.

7. Связь с преобразованием Лапласа. Уравнения линейной стационарной системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bv(t); \qquad y(t) = Cx(t) + Dv(t)$$

можно представить на основе преобразования Лапласа в операторной форме

$$pX(p) - X(0) = AX(p) + BV(p); \quad Y(p) = CX(p) + DV(p).$$

Отсюда получаем решения для вектора состояния и выходного вектора в функции комплексной частоты $p = \sigma - j\omega$:

$$X(p) = (pE - A)^{-1}[X(0) + BV(p)];$$
$$Y(p) = C(pE - A)^{-1}X(0) + [C(pE - A)^{-1}B + D]V(p).$$

Здесь матрица $\Phi(p) = (pE - A)^{-1}$ является изображением переходной матрицы состояния $\Phi(t)$. Действительно, из выражения

$$X(p) = \Phi(p)X(0) + \Phi(p)BV(p)$$

на основе свойств преобразования Лапласа получаем

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bv(\tau)d\tau,$$

что совпадает с решением, приведенным в (4). Здесь, в частности, использовано то обстоятельство, что оригинал произведения двух функций $\Phi(p)$ и $BV(p)$ выражается через интеграл свертывания соответствующих им оригиналов $\Phi(t)$ и $Bv(t)$.

Таким образом, переходная матрица состояния $\Phi(t) = \exp(At)$ может быть вычислена путем обращения матрицы $F(p) = pE - A$ и последующего перехода от $(pE - A)^{-1}$ к ее оригиналу. Для обращения матрицы подходит, например, алгоритм Фаддеева (6. 7) или любой другой способ обращения матрицы. В результате имеем

$$\Phi(p) = (pE - A)^{-1} = \frac{G(p)}{\Delta(p)},$$

где $G(p)$ — присоединенная матрица для $F(p)$ и $\Delta(p)$ — характеристический многочлен n-й степени матрицы A, т. е. $\Delta(p) = \det(pE - A)$.

Если все элементы $G(p)$ имеют общие множители, то после сокращения на них $G(p)$ переходит в приведенную присоединенную матрицу $C(p)$, а $\Delta(p)$ — в минимальный многочлен $\psi(p)$.

Так как элементы матрицы $\Phi(p)$ являются дробно-рациональными функциями от p, причем степени их числителя всегда ниже степени знаменателя, то каждый из них можно разложить на простые дроби. В общем случае при наличии кратных собственных значений $\Delta(p) = (p - \lambda_1)^{m_1}(p - \lambda_2)^{m_2}\ldots(p - \lambda_q)^{m_q}$, и в соответствии с результатом, полученным в (6. 6), имеем:

$$(pE - A)^{-1} = \frac{C(p)}{\psi(p)}\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{Z_{k1}}{p - \lambda_k} + \frac{1!\,Z_{k2}}{(p - \lambda_k)^2} + \cdots + \frac{(m_k - 1)!\,Z_{km_k}}{(p - \lambda_k)^{m_k}}\right],$$

где

$$Z_{kj} = \frac{1}{(j-1)!\,(m_k-j)!}\left[\frac{C(p)}{\psi_k(p)}\right]^{(m_k-j)}_{p=\lambda_k}; \quad \psi_k(p) = \frac{\psi(p)}{(p-\lambda)^{m_k}}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{q} [Z_{k1}e^{\lambda_k t} + Z_{k2}te^{\lambda_k t} + \cdots + Z_{km_k}t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} Z_{kj}t^{j-1}e^{\lambda_k t},$$

что совпадает с теоремой Сильвестра (6.9) для экспоненциальной функции.

8. Передаточная матричная функция. При нулевых начальных условиях $x(0) = 0$ операторное выражение для выходного вектора принимает вид:

$$Y(p) = [C\Phi(p)B + D]\,V(p) = F(p)V(p).$$

Матрица $F(p) = C\Phi(p)B + D$ называется *передаточной матричной функцией*. Так как изображение i-й выходной переменной

$$Y_i(p) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(p)V_j(p) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

то элементы $F_{ij}(p)$ матрицы $F(p)$ можно рассматривать как *скалярные передаточные функции* от i-го входа к j-му выходу, причем

$$F_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{V_j(p)} \ \text{при}\ V_k(p) = 0 \qquad (k \neq j).$$

Зная $F_{ij}(p)$, легко получить импульсную $g_{ij}(t)$ и переходную $h_{ij}(t)$ характеристики. Для этого подставим в выражение $Y_i(p) = F_{ij}(p)V_j(p)$ вместо $V_j(p)$ соответственно изображения единичной импульсной функции $\delta(t)$, равное 1, и единичной ступенчатой функции $1(t)$, равное $\frac{1}{p}$.

Тогда получим изображения для $g_{ij}(t)$ и $h_{ij}(t)$:

$$g_{ij}(p) = F_{ij}(p); \quad h_{ij}(p) = \frac{F_{ij}(p)}{p}.$$

Отсюда видно, что передаточная функция $F_{ij}(p)$ является изображением импульсной функции, а изображение переходной характеристики равно $F_{ij}(p)$, деленной на p. Для получения $g_{ij}(t)$ и $h_{ij}(t)$ достаточно перейти от их изображений к оригиналам на основе обратного преобразования Лапласа. Определив эти

характеристики для всевозможных пар «вход — выход», можно записать матрицы $g(t)$ и $h(t)$. Их также можно получить обратным преобразованием по Лапласу соответственно из матриц $F_{ij}(p)$ и $\frac{1}{p}\ F_{ij}(p)$.

Рассмотрим простой пример. Уравнения электрической схемы (рис. 88) для переменных состояния u_C и i_L, а также выходных переменных i_G и u_R можно получить в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j(t) \\ e(t) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} i_G \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}.$$

Рис. 88. Электрическая схема к примеру.

При $C = 1\Phi$, $L = \frac{1}{2}\Gamma$, $G = 2\,\frac{1}{\text{Ом}}$, $R = 2{,}5$ Ом соответствующие матрицы получают следующие численные выражения:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix};\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с изложенным выше находим:

$$\Phi(p) = \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -2 & p+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)}\begin{bmatrix} p+5 & -1 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(p) = p^2 + 7p + 12 = (p+3)(p+4);$$

$$F(p) = C\Phi(p)B + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}\frac{1}{\Delta(p)}\begin{bmatrix} p+5 & -1 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(p+3)(p+4)}\begin{bmatrix} 2p+10 & 4 \\ 5 & -5p-10 \end{bmatrix}.$$

Разлагая элементы матрицы $F(p)$ на простые дроби и переходя к оригиналам, получаем

$$F_{11}(p) = \frac{2p+10}{(p+3)(p+4)} = \frac{4}{p+3} - \frac{2}{p+4};\quad g_{11}(t) = 4e^{-3t} - 2e^{-4t};$$

$$F_{12}(p) = \frac{4}{(p+3)(p+4)} = \frac{4}{p+3} - \frac{4}{p+4};\quad g_{12}(t) = 4e^{-3t} - 4e^{-4t};$$

$$F_{21}(p) = \frac{5}{(p+3)(p+4)} = \frac{5}{p+3} - \frac{5}{p+4};\quad g_{21}(t) = 5e^{-3t} - 5e^{-4t};$$

$$F_{22}(p) = \frac{-5p-10}{(p+3)(p+4)} = \frac{5}{p+3} - \frac{10}{p+4};\quad g_{22}(t) = 5e^{-3t} - 10e^{-4t}.$$

Таким образом, имеем

$$g(t)=\begin{bmatrix}4e^{-3t}-2e^{-4t} & 4e^{-3t}-4e^{-4t}\\ 5e^{-3t}-5e^{-4t} & 5e^{-3t}-10e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

Этот же результат можно получить через переходную матрицу состояния. Определив каким-либо способом $\Phi(t)=\exp(At)$, по формуле $g(t)=C\Phi(t)B+D$ находим

$$g(t)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{-3t}-e^{-4t} & -e^{-3t}+e^{-4t}\\ 2e^{-3t}-2e^{-4t} & -e^{-3t}+2e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4e^{-3t}-2e^{-4t} & 4e^{-3t}-4e^{-4t}\\ 5e^{-3t}-5e^{-4t} & 5e^{-3t}-10e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

9. Управляемость и наблюдаемость. Линейное преобразование переменных состояния $x=H\tilde{x}$ и $\tilde{x}=H^{-1}x$, где H — модальная матрица, приводит уравнение состояния $\dot{x}=Ax+Bv$ к виду

$$H\frac{dx}{dt}=AH\tilde{x}+Bv;\quad \frac{d\tilde{x}}{dt}=(H^{-1}AH)\tilde{x}+(H^{-1}B)v.$$

В новых координатах матрица системы A преобразуется к диагональной или жордановой форме $\tilde{A}=H^{-1}AH$, а матрица B к $\tilde{B}=H^{-1}B$. Уравнение состояния и выходное уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=A\tilde{x}+\tilde{B}v;\quad y=\tilde{C}\tilde{x}+Dv,$$

где $\tilde{C}=CH$.

Если $\tilde{A}$ — диагональная матрица, соответствующая различным собственным значениям матрицы A, то уравнение состояния распадается на n скалярных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt}=\lambda_i\tilde{x}_i+\tilde{b}_{(i)}v\quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

где $b_{(i)}$ — i-я строка матрицы $\tilde{B}$.

Каждая из n преобразованных переменных $\tilde{x}_i$ связана только с одним собственным значением.

Система называется *управляемой*, если все переменные $\overline{x}_i$ зависят от входных воздействий v. Это значит, что переменные состояния $x=H\overline{x}$, не содержат *свободных (неуправляемых) компонентов*. Очевидным условием управляемости является отсутствие нулевой строки в матрице B, т. е. все $\tilde{b}_{(i)}$ $(i=1, 2, \dots, n)$ должны быть ненулевыми векторами-строками. В общем случае кратных собственных значений доказывается необходимое и достаточное условие полной

управляемости системы: матрица $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ должна иметь ранг n. Полная управляемость означает, что с помощью некоторого воздействия $v(t)$, определенного на конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, система может быть переведена из заданного начального состояния $x(0)$ в конечное состояние $x(T)$.

Система называется *наблюдаемой*, если каждая из переменных $\tilde{x}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ связана хотя бы с одним выходом (элементом выходного вектора y). Так как

$$y_i = [\tilde{c}^{(1)}, \tilde{c}^{(2)}, \dots, \tilde{c}^{(n)}] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{n} = \tilde{c}^{(s)}\tilde{x}_s,$$

где $\tilde{c}^{(s)}$ — столбцы матрицы $\tilde{C}$, то очевидным условием наблюдаемости является отсутствие в матрице $\tilde{C}$ нулевого столбца. В общем случае кратных собственных значений доказывается необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости: матрица $[C^*, A^*C^*, A^{*2}C^*, \dots, A^{*n-1}C^*]$ должна иметь ранг n (A^* и C^* — сопряженные матрицы). Полная наблюдаемость означает, что существует такое воздействие $v(t)$, что по реакциям на выходах $y(t)$ на заданном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$ можно определить начальное состояние $x(0$ системы.

10. Устойчивость. Система называется *устойчивой по Ляпунову* при нулевом входе ($v = 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при любых начальных значениях $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$, меньших по модулю числа δ, переменные состояния $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ во все время движения $(t \geqslant 0)$ по модулю остаются меньше числа ε, т. е. если $|x_i(0)| < \delta$, то $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ t \geqslant 0)$. Если кроме этого $x_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то система называется *асимптотически устойчивой*. Линейная система при ограниченных воздействиях устойчива, если ее реакция также ограничена.

Для линейных стационарных систем имеется непосредственная связь между ее устойчивостью и характером собственных значений матрицы системы A. В соответствии с теоремой Сильвестра переходная матрица состояния

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=1}^{q} (Z_{k1} + tZ_{k2} + \dots + t^{m_k-1}Z_{km_k}) e^{\lambda_k t},$$

где Z_{kj} $(k = 1, 2, \dots, q;\ j = 1, 2, \dots, m_k)$ — компоненты матрицы A. Ясно, что при вещественных отрицательных собственных значениях $(\lambda_k < 0)$ система асимптотически устойчива, так как в этом

случае $x(t) = \Phi(t)x(0)$ при $t \to \infty$ будет стремиться к нулевому вектору $(x(t) \to 0)$.

Если среди собственных значений имеются комплексные, то они при вещественной матрице A могут появляться только комплексно-сопряженными парами. Пусть $\lambda'_k = \alpha + i\omega$ и $\lambda''_k = \alpha - i\omega$ — пара комплексно-сопряженных собственных значений кратности m_k. В выражении для $\Phi(t)$ им будут соответствовать слагаемые

$$t^{j-1}[Z_{kj}e^{(\alpha+i\omega)t} + \overline{Z}_{kj}e^{(\alpha-i\omega)t}] = t^{j-1}e^{\alpha t}[Z_{kj}e^{i\omega t} + \overline{Z}_{kj}e^{-i\omega t}],$$

где комплексно-сопряженные матрицы $Z_{kj} = Z'_{kj} + iZ''_{kj}$ и $\overline{Z}_{kj} = Z'_{kj} - iZ''_{kj}$. Элементарными преобразованиями это выражение приводится к виду

$$2t^{j-1}e^{\alpha t}(Z'_{kj}\cos\omega t - Z''_{kj}\sin\omega t) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_k).$$

Если вещественная часть комплексно-сопряженных значений $\alpha < 0$, то система асимптотически устойчива. В случае чисто мнимых собственных значений $\alpha = 0$ система устойчива только при отсутствии множителя t^{j-1}, что означает, что $m_k = 1$, т. е. собственные значения должны быть простыми. При $\alpha > 0$ — система всегда неустойчива.

11. Критерий Рауса—Гурвица. Для суждения об устойчивости системы вовсе не обязательно вычислять собственные значения. Разработано много различных критериев устойчивости, один из которых известен как алгебраический *критерий Рауса—Гурвица*.

В соответствии с критерием Рауса—Гурвица необходимое и достаточное условие устойчивости сводится к требованию положительности определителей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, элементами которых являются коэффициенты характеристического многочлена $\Delta(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Определитель D_n образуется следующим образом: на главной диагонали располагаются коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, строки влево от главной диагонали заполняются коэффициентами с возрастающими индексами и вправо от главной диагонали — с убывающими индексами, а остальные позиции заполняются нулями. Например, для многочлена пятой степени $\Delta(\lambda) = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$ имеем:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Определители D_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) образуются из определителей D_{k+1} вычеркиванием последней строки и последнего столбца:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \; D_1 = a_1.$$

12. Нестационарные системы. Решение дифференциального уравнения первого порядка с переменным коэффициентом $\dot{x}(t) = a(t)x + v(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x(t_0)$, имеет вид:

$$x = (x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-b(\tau)} v(\tau)\, d\tau)\, e^{b(t)} = e^{b(t)} x_0 + e^{b(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-b(\tau)} v(\tau)\, d\tau,$$

где

$$b(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

По аналогии с решением однородного скалярного уравнения ($v(t) = 0$) можно попытаться найти решение матричного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ в виде

$$x(t) = (\exp \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau)\, x(t_0) = e^{B(t)} x(t_0).$$

Подставляя это выражение в уравнение, приходим к соотношению

$$\frac{dB(t)}{dt} e^{B(t)} = A(t)\, e^{B(t)},$$

являющемуся условием, при котором $x(t) = e^{B(t)} x(t_0)$ — решение уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Можно показать, что это условие равнозначно требованию, чтобы матрицы $A(t_1)$ и $A(t_2)$ для всех t_1 и t_2 в интервале определения $t_0 \leqslant (t_1, t_2) \leqslant t_1$ были перестановочными, т. е. $A(t_1)\, A(t_2) = A(t_2)\, A(t_1)$. При выполнении данного условия переходная матрица состояния

$$\Phi(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau.$$

Общее решение уравнений нестационарной системы для вектора состояния $x(t)$ и выходного вектора $y(t)$ имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, v(\tau)\, d\tau;$$

$$y(t) = C(t)\,\Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t)\,\Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, v(\tau)\, d\tau + D(\tau)\, v(\tau).$$

В общем случае переходная матрица состояния выражается рядом

$$G(A) = E + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau d\tau + $$

$$+ \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau d\tau d\tau + \cdots,$$

называемым *матрициантом*. Доказывается, что для ограниченной матрицы A на интервале интегрирования этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Дифференцируя обе части, получаем основное свойство матрицианта:

$$\frac{dG(A)}{dt} = A(t)\, G(A).$$

Ясно, что $G(A)$ удовлетворяет уравнению состояния и поэтому представляет собой переходную матрицу состояния нестационарной системы, т. е. $\Phi(t, t_0) = G(A)$. Практическое использование матрицианта затрудняется в связи с тем, что ряд может сходиться медленно и для получения решения потребуется большой объем вычислений. В таких случаях используют специальные методы интегрирования дифференциальных уравнений с переменными параметрами.

Для стационарной системы (при постоянной матрице A) матрициант переходит в ряд, выражающий экспоненциальную функцию:

$$E + (t - t_0) A + \frac{(t - t_0)^2}{2!} A^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!} A^3 + \cdots = e^{A(t - t_0)}.$$

В то время как переходная матрица состояния стационарной системы является функцией только одной переменной (разности $t - t_0$ или t при $t_0 = 0$), для нестационарной системы решение зависит от двух переменных, одной из которых является момент t_0 воздействия и другой — момент t наблюдения реакции. Соответственно интегралы свертывания обобщаются к *интегралам совмещения*.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Система описывается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 3x_2 + v \end{aligned}\right\}.$$

а) Запишите уравнение переменных состояния $\dot{x} = Ax + B$ и матрицы A и B.

б) Определите переходную матрицу состояния $\Phi(t) = e^{At}$ как экспоненциальную функцию от матрицы и операторным методом.

в) Найдите импульсную и передаточную характеристики для выходной переменной $y = x_1$.

2. Уравнения переменных состояния системы имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v;$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

а) Найдите передаточную матричную функцию $F(p) = C\Phi(p)B + D$.

б) Определите с помощью обратного преобразования Лапласа импульсную и переходную матричные характеристики системы.

3. Система с двумя входами (v_1, v_2) и двумя выходами (y_1, y_2) описывается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dt^2} + 3\frac{dy_1}{dt} + 2y_2 &= v_1 \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} + y_2 &= v_2 \end{aligned}\right\}.$$

а) Положив $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2$, покажите, что матрицы A, B, C и D в уравнениях

$$\dot{x} = Ax + Bv,\ y = Cx + D$$

имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

б) Определите изображение переходной матрицы состояния с помощью алгоритма Фаддеева.

в) Найдите передаточную матричную функцию системы.

4. Дана система, описываемая в пространстве переменных состояния уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{7}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + 2v;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 - 2x_3 - v;$$

$$y = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3.$$

а) Запишите уравнения системы в матричной форме.

б) Найдите переходную матрицу состояния $\Phi(t) = e^{At}$ как экспоненциальную функцию от матрицы и операторным методом.

в) Выразите вектор переменных состояния $x(t)$ при $v = 0$ и начальных значениях x_{10}, x_{20}, x_{30}.

г) Преобразуйте матрицу системы A к диагональной форме заменой переменных состояния с помощью модальной матрицы (5. 7) и запишите решение для новых переменных в «развязанной» форме.

д) Найдите передаточную матричную функцию, а также импульсную и переходную характеристики системы.

е) Исследуйте систему на управляемость, наблюдаемость и устойчивость.

5. Найдите операторным методом импульсную матричную характеристику системы, представленной уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v;$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

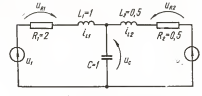


Рис. 89. Электрическая схема к задаче 7.

6. Исследуйте управляемость, наблюдаемость и устойчивость следующих систем:

а) $$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v;$$
$$y = [1 \; -1]\, x.$$

б) $$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v;$$
$$y = [1 \; -1]\, x + v.$$

в) $$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v;$$
$$y = [1 \quad 1]\, x - v.$$

г) $$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} v;$$
$$y = [-2 \quad 1 \quad 0]\, x.$$

7. В электрической схеме (рис. 89) действует два источника напряжения u_1 и u_2, выходы характеризуются напряжениями u_{k1} и u_{k2}, а переменными состояния являются напряжение на емкости u_C и токи в индуктивностях i_{L1} и i_{L2}. Уравнение переменных состояния $\dot{x} = Ax + Bv$ для рассматриваемой системы при заданных значениях параметров ее компонентов можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

а) Покажите, что выходное уравнение $y = Cx$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

б) Определите переходную матрицу состояния $\Phi(t) = e^{At}$ как функцию от матрицы и операторным методом.

в) Найдите передаточную матричную функцию, а также импульсную и переходную характеристики схемы.

г) Представьте полученные результаты в тригонометрической форме.

Литература

Среди книг по этому разделу современной математики выдающееся место занимает монография Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц» (М., «Наука», 1966), которая получила широкую известность в нашей стране и за рубежом. Наряду с глубоким и систематическим изложением матричного исчисления, в ней значительное внимание уделяется специальным и прикладным вопросам, в частности, исследованию и решению дифференциальных уравнений, проблеме устойчивости и т. д.

Сочетанием глубины с доступностью отличается книга Р. Фрезера, В. Дункана и А. Коллара «Теория матриц и ее приложение к дифференциальным уравнениям и динамике» (М., Изд. иностр. лит., 1950). В ней содержится много решенных примеров, которые содействуют усвоению материала и ориентируют на методы практического применения матричного аппарата в инженерном деле.

Многие вопросы теории матриц освещены в руководствах по линейной алгебре. Среди них можно отметить следующие: Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский и В. Я. Турин «Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения» (М., «Высшая школа», 1971), Дж. Хедли «Линейная алгебра» (М., «Высшая школа», 1966), А. П. Мишина и И. В. Проскуряков «Высшая алгебра» (М., Физматгиз, 1962). Полезные сведения содержатся в справочнике М. Маркуса и Х. Минка «Обзор по теории матриц и матричных неравенств» (М., «Наука», 1972). Теория дифференциальных уравнений с позиций матричного аппарата изложена, например, в книгах Н. Е. Еругина, И. З. Штокало и др. «Курс обыкновенных дифференциальных уравнений» (Киев, «Вища школа», 1974), В. А. Иванова, Б. К. Чемоданова, В. С. Медведева «Математические основы теории автоматического регулирования» (М., «Высшая школа», 1971).

Среди книг по численным методам матричной алгебры следует назвать: Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева «Вычислительные методы линейной алгебры» (М.— Л., Физматгиз, 1963), Дж. Х. Уилкинсон «Алгебраическая проблема собственных значений» (М., «Наука», 1970), В. И. Крылов, В. В. Бобков и П.И. Монастырский «Вычислительные методы высшей математики» (Минск, «Вышейшая школа», 1972).

Матричные методы теории электрических и электронных цепей развиты в монографиях: Э. В. Зелях «Основы общей теории линейных электрических схем» (М., Изд-во АН СССР, 1951), Ю. Т. Величко «Прохідні чотириполюсники» (Київ, Держтехвидав, 1958), Г. Е. Пухов «Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей» (Киев, «Наукова думка», 1967), Н. Г. Максимович «Линейные электрические цепи и их преобразование» (М.— Л., Госэнергоиздат, 1961), В. П. Сигорский «Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами» (Киев, Изд-во АН УССР, 1958) и «Анализ электронных схем» (Киев, Гостехиздат, 1964), В. П. Сигорский

и А. И. Петренко «Основы теории электронных схем» (Киев, «Вища школа», 1971).

Широким использованием матричного аппарата при решении задач теории систем характеризуются работы: П. Деруссо, Р. Рой и Ч. Клоуз «Пространство переменных состояния в теории управления» (М., «Наука», 1970), С. Директор и Р. Рорер «Введение в теорию систем» (М., «Мир»,1974), П. В. Бромберг «Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования» (М., «Наука», 1967), Р. Калман, П. Фалб и М. Арбиб «Очерки по математической теории систем» (М., «Мир», 1971), Д. Сю и А. Майер «Современная теория автоматического управления и ее применение» (М., «Машиностроение», 1972), У. Портер «Современные основания общей теории систем» (М., «Наука», 1971), Г. Крон «Исследование сложных систем по частям — диакоптика» (М., «Наука», 1972).

Вопросы строительной механики с применением матричного аппарата излагаются в книгах: А. П. Филин «Матрицы в статике стержневых систем» (Л.— М., Стройиздат, 1966), К. К. Пономарев «Расчет элементов конструкций с применением ЭЦВМ» (М., «Машиностроение», 1972).

В этот перечень можно было бы включить много других работ, в которых при решении прикладных задач успешно используется и развивается аппарат теории матриц. Широкое использование матриц в современной научно-технической литературе является лучшим свидетельством их полезности и эффективности.

Глава 4

ГРАФЫ

Сейчас количество важных практических и теоретических задач самого разнообразного конкретного содержания и самой различной степени сложности, сводящихся к задачам и проблемам чистой теории графов, растет столь бурно, что для решения их «в розницу» кустарными методами или остроумными индивидуальными приемами не хватает и не может хватать квалифицированных работников. Единственный выход — учиться решать эти задачи «оптом», используя, с одной стороны, новейшие достижения и идеи теоретической математики, а с другой стороны, современную вычислительную технику.

А. А. Зыков

Теория графов предоставляет в распоряжение инженера исключительно удобный аппарат для моделирования структурных свойств систем и отношений между объектами самой разнообразной природы. Благодаря наглядности и простоте этот аппарат в последнее время завоевал широкое признание и повсеместно используется в научно-технической литературе.

Эта глава начинается с рассмотрения задач, связанных с деревьями. Излагаются способы символического описания и идентификации деревьев. Подобные вопросы возникают, например, в химии при исследовании изомеров органических соединений. Приводятся методы построения деревьев, в частности экстремального дерева, используемого при проектировании коммуникаций, линий связи и т. п. Наряду с деревьями и дополнениями графа, рассматриваются другие суграфы, имеющие большое значение в приложениях (разрезы, сечения, циклы и контуры). Совокупность независимых сечений и контуров представляется с помощью топологических матриц. Выясняются свойства таких матриц и связи между ними.

Основное внимание в настоящей главе уделяется использованию графов как универсальной структурной модели физических систем различной природы: электрических, механических, пневматических и др. Двухполюсные и многополюсные компоненты представляются их полюсными графами, а граф системы получается в результате объединения полюсных графов входящих в нее компонентов. На основе аналогий между физическими величинами развивается общая методика построения математических моделей систем в различной форме.

При моделировании физических систем координатами служат совокупности независимых сечений и контуров. Рассматриваются

особенности использования однородных и неоднородных систем координат и излагаются соответствующие процедуры формирования математических моделей, ориентированные на применение вычислительных машин. Особое внимание уделяется получению уравнений переменных состояния для линейных и нелинейных систем.

Заключительный параграф посвящен моделированию в сокращенном координатном базисе, который обеспечивает описание физической системы минимальным числом уравнений. Соответствующие алгоритмы характеризуются рядом положительных особенностей при их реализации на вычислительных машинах в отношении загрузки оперативной памяти, точности и трудоемкости.

Хотя многие задачи, решаемые с помощью аппарата теории графов, в настоящей книге не рассмотрены, изложенный материал может служить основой для знакомства с ними по специальной литературе.

1. ДЕРЕВЬЯ

1. Деревья на множестве вершин. Пусть множество V содержит p вершин, которые пронумерованы порядковыми числами от 1 до p, т. е. $V = \{1, 2, \ldots, p\}$. Связав эти вершины $p - 1$ ребрами так, чтобы отсутствовали циклы, получим некоторое дерево, покрывающее данное множество p вершин. При $p = 2$ такое дерево единственно и оно состоит из одной ветви. С увеличением p число различных деревьев t_p быстро возрастает и выражается соотношением

$$t_p = p^{p-2}.$$

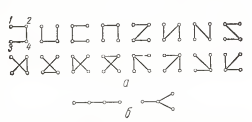


Рис. 90. Деревья на множестве четырех вершин (*а*) и неизоморфные деревья (*б*).

Многие из них являются изоморфными, т. е. отличаются только нумерацией вершин. Так, при $p = 10$ имеем 10^8 различных деревьев, из которых только 106 неизоморфны. На рис. 90, *а* показаны 16 различных деревьев, которые можно построить на множестве четырех вершин, а на рис. 90, *б* — неизоморфные деревья (их всего два). Существенно различные (неизоморфные) деревья подсчитывают комбинаторными методами с помощью производящих функций.

Ниже указаны числа неизоморфных деревьев τ на p вершинах, подсчитанных для $p \leqslant 26$:

p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τ_p	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551

p	13	14	15	16	17	18	19	20
τ_p	1301	3159	7741	19 320	48 629	123 867	317 955	823 065

p	21	22	23	24	25	26
τ_p	2 144 505	5 623 756	14 828 074	39 299 897	104 636 890	279 793 450

В дереве любые две вершины связаны единственной простой цепью, ибо в противном случае был бы цикл. Единственная цепь для любой пары вершин является также достаточным условием того, чтобы граф был деревом.

Степени вершин дерева могут принимать значения от 1 до $p-1$. Вершины первой степени являются *концевыми вершинами*, а связанные с ними ребра — *концевыми ребрами*. Легко понять, что любое конечное дерево при $p \geqslant 2$ имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро. Последовательное дерево имеет только две концевые вершины, а степень остальных равна двум. Звездное дерево имеет единственную вершину степени $p-1$, а все остальные вершины — концевые.

2. Символ дерева. Любому дереву T можно поставить во взаимно-однозначное соответствие некоторый *символ* — упорядоченную последовательность $p-2$ номеров вершин $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2})$, среди которых могут быть и повторяющиеся, причем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2} \in V$. Эта последовательность для данного дерева образуется следующим образом. Вводится последовательность $N_p = (1, 2, \ldots, p)$. Далее выбирается концевая вершина с наименьшим номером и записывается номер α_1 связанной с ней вершины, а сама концевая вершина удаляется из последовательности $N_p = (1, 2, \ldots, p)$. Затем этот процесс повторяется до тех пор, пока не получим последовательность $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2})$. Каждый такой шаг соответствует удалению из дерева концевой вершины с наименьшим номером и связанного с ней концевого ребра, причем через $p-2$ шагов от дерева остается единственное ребро, положение которого

определяется парой номеров вершин, оставшихся в последовательности N_p.

На рис. 91 показаны два изоморфных дерева и соответствующие им символы. Как видно, номер вершины v степени $\delta(v)$ повторяется в символе дерева $\delta(v) - 1$ раз, но порядок следования повторяющихся номеров даже для изоморфных деревьев может быть различным.

$\alpha(T_1) = (4, 4, 4, 5, 5)$ $\alpha(T_2) = (1, 3, 1, 1, 3)$

Рис. 91. Изоморфные деревья и их символы.

Построение дерева по его символу выполняется последовательным восстановлением концевых вершин и ребер. На первом шаге из последовательности $N_p = (1, 2, \ldots, p)$ выбирается наименьший номер $\alpha_{\min}$, который отсутствует в $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2})$, и строится ребро $(\alpha_{\min}, \alpha_1)$. Далее, удаляется номер $\alpha_{\min}$ из N_p и номер α_1 — из $\alpha(T)$ и процесс продолжается до исчерпывания символа $\alpha(T)$. Оставшаяся в последовательности N_p пара вершин определяет последнее ребро дерева. Например, исходя из символа $\alpha(T_2) = (1, 3, 1, 1, 3)$ дерева T_2 (рис. 91) и последовательности $N_7 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ на первом шаге имеем ребро (2, 1). Удаляя 2 из N_7 и 1 из $\alpha(T_2)$, получаем последовательности $\alpha'(T_2) = (3, 1, 1, 3)$ и $N'_7 = (1, 3, 4, 5, 6, 7,)$. На втором шаге получаем ребро (4, 3) и далее аналогично ребра (5, 1), (6, 1), (1, 3), (3, 7). Совокупность всех полученных ребер и образует соответствующее дерево.

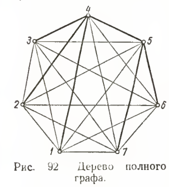


Рис. 92 Дерево полного графа.

На основе представления деревьев символами $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2})$ легко доказывается соотношение для числа различных деревьев на множестве p вершин, приведенное в (1). Так как в последовательности $\alpha(T)$ каждый член α_i $(i = 1, 2, \ldots, p-2)$ может принимать любые из p значений, то всего можно получить p^{p-2} различных символов, а значит столько же и деревьев.

Произвольное дерево на множестве p вершин можно рассматривать как одно из покрывающих деревьев полного графа, представляющего собой p-угольник. Например, дерево T_1 (рис. 91) изображено на полном графе (рис. 92) жирными линиями. Число ребер q полного графа с p вершинами выражается соотношением

$$q = \frac{1}{2} p(p-1).$$

Так как в дерево входит $p - 1$ ребер, то число хорд, образующих дополнение дерева в полном графе, будет

$$\sigma = \frac{1}{2} p(p-1) - (p-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p-2).$$

3. Экстремальное дерево. В ряде практических задач требуется связать p пунктов наиболее экономичным образом. Например, необходимо соединить p городов линиями связи или автомобильными дорогами так, чтобы их суммарная длина была наименьшей. Аналогичная задача возникает при прокладке водопроводов, газопроводов, электрических сетей и т. п.

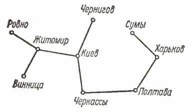


Рис. 93. Экстремальное дерево.

На языке теории графов эта задача формулируется в общем виде следующим образом. Каждому ребру (v_i, v_j) полного графа с p вершинами приписывается вес μ_{ij}, выражающий численно расстояние, стоимость или другую величину, характеризующую любую пару вершин. Требуется построить *экстремальное дерево*, связывающее все вершины так, чтобы был минимальный суммарный вес μ_T ветвей дерева

$$\mu_T = \sum_{(v_i, v_j) \in T} \mu_{ij}.$$

Нечего и говорить о переборе и сравнении всех вариантов даже при сравнительно небольшом p, так как число возможных деревьев уже при $p \geqslant 9$ больше миллиона! К счастью, существует очень простой способ построения экстремального дерева, который основан на последовательном введении в него ребер с приоритетом по минимуму их весов. Сначала для дерева выбирается ребро с наименьшим весом. Затем на каждом следующем шаге рассматривается минимальное по весу ребро, и, если оно не образует цикла с ранее выбранными ветвями, вводится в дерево. Построение заканчивается после отбора для дерева $p - 1$ ребер.

Пусть, например, задано расстояние между городами, км: (см. стр. 349).

Дерево минимальной длины, соединяющее указанные города, изображено на рис. 93. Его суммарная длина, км,

$$\mu_T = 125 + 131 + 140 + 141 + 187 + 190 + 190 + 279 = 1383.$$

Если имеются ребра с одинаковыми весами, то решение может быть единственным в том случае, когда не все такие ребра входят в дерево (в рассмотренном примере решение единственное). Экстремальное дерево может быть построено не только для полного, но

	Киев	Винница	Житомир	Ровно	Полтава	Сумы	Харьков	Черкассы	Чернигов
Киев . . .	×	256	131	318	337	346	478	190	140
Винница		×	125	312	593	602	734	343	396
Житомир			×	187	468	477	609	321	271
Ровно . . .				×	655	664	805	508	458
Полтава					×	261	141	279	477
Сумы						×	190	540	350
Харьков .							×	420	608
Черкассы .								×	330
Чернигов .									×

и для произвольного графа (например, связи между некоторыми вершинами могут быть нежелательными или недопустимыми). Построение экстремального дерева с максимальным суммарным весом аналогично, необходимо лишь последовательно выбирать для него ребра наибольшего веса.

4. **Корневые деревья.** Любое дерево можно рассматривать как *корневое дерево* (рис. 94, *а*), в котором некоторая выбранная вершина v_0 называется *корнем*. Так как корнем может служить любая вершина, то количество различных корневых деревьев на множестве p помеченных вершин

$$t'_p = pt_p = pp^{p-2} = p^{p-1}.$$

Если не различать изоморфные корневые деревья, т. е. отвлечься от нумерации вершин, то число различных корневых деревьев резко уменьшается. Для их сравнения удобно использовать стан-

дартное представление, однозначно определяющее структуру корневого дерева и основанное на приписывании каждой вершине некоторого числа (веса) и упорядочении этих чисел.

Вершины, смежные с корнем дерева, можно рассматривать как корни субдеревьев, которые «вырастают» из этих вершин и являются частями исходного дерева, называемыми *факторами*. Вообще, каждая вершина графа играет роль корня некоторого фактора, причем концевые вершины — это корни тривиальных деревьев, состоящие из единственной вершины и не содержащие ребер. В качестве веса вершины принимается общее число вершин фактора, корнем которого она является. При этом на каждом уровне факторы располагаются в порядке возрастания весов их корней (при равенстве весов порядок безразличен).

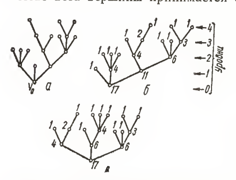


Рис. 94. Корневое дерево с корнем в вершине v_0 (*а*), его стандартное представление (*б*) и корневая форма (*в*).

На рис. 94, *б* корневое дерево изображено в стандартном виде и указаны веса всех его вершин (вес корня дерева равен числу всех его вершин, а веса концевых вершин равны единице). При таком представлении корневое дерево однозначно определяется упорядоченной последовательностью $\beta(T)$ весов его вершин, в которой на первом месте стоит вес корня дерева, а затем следуют соответствующие последовательности для факторов в порядке возрастания весов их корней. В свою очередь, каждая такая последовательность строится по тому же принципу: на первом месте стоит вес корня фактора, а затем следуют последовательности для факторов данного фактора и т. д. Так, для корневого дерева (рис. 94, *б*) с обозначением весов вершин имеем

$$\beta(T) = (17, 1, 4, 1, 1, 1, 11, 4, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

Количество членов последовательности $\beta(T)$ равно числу вершин дерева. Различным корневым деревьям соответствуют и различные последовательности $\beta(T)$. Достаточным критерием идентичности корневых деревьев является совпадение соответствующих им последовательностей. Ясно, что перенесение корня в другую вершину приводит к другому корневому дереву, а значит и к другой последовательности.

Построение корневого дерева T по его последовательности $\beta(T)$ начинается с корня, которому соответствует первый член. Затем $\beta(T)$ разбивается на последовательности факторов так, что каждая из них начинается членом, не меньшим, чем предыдущая, т. е.

$$\beta(T_1) = (1); \beta(T_2) = (4, 1, 1, 1); \beta(T_3) = (11, 4, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

Из каждой такой последовательности удаляем первые члены и соединяем соответствующие им вершины с корнем. Затем поступаем аналогично до тех пор, пока не будут исчерпаны все члены. Так, после построения корней факторов первого уровня последовательность $\beta(T_1)$ исчерпывается, а $\beta(T_2)$ и $\beta(T_3)$ разбиваются на последовательности:

$$\beta(T_{21}) = (1); \quad \beta(T_{22}) = (1); \quad \beta(T_{33}) = (1);$$
$$\beta(T_{31}) = (4, 1, 2, 1); \quad \beta(T_{32}) = (6, 1, 1, 3, 1, 1).$$

Первые члены этих последовательностей соответствуют корням факторов второго уровня, которые соединяются ребрами с теми корнями, из которых они вырастают. После этого первые три из них исчерпываются, а из двух остальных получаем:

$$\beta(T_{311}) = (1); \quad \beta(T_{312}) = (2, 1);$$
$$\beta(T_{321}) = (1); \quad \beta(T_{322}) = (1); \quad \beta(T_{323}) = (3, 1, 1).$$

Корни деревьев третьего уровня соединяем с соответствующими корнями предыдущего уровня и после удаления первых членов имеем одноэлементные последовательности:

$$\beta(T_{3121}) = (1); \quad \beta(T_{3231}) = (1); \quad \beta(T_{3232}) = (1),$$

которые представляют одновершинные факторы четвертого уровня.

5. Идентификация деревьев. Во многих случаях важно различать только неизоморфные деревья. Изоморфизм — это отношение эквивалентности на множестве различных деревьев, которое разбивает это множество на непересекающиеся классы неизоморфных деревьев. Любое из деревьев данного класса может служить его представителем. Но при различных способах задания и начертания деревьев установить их изоморфизм непосредственным сравнением не так просто.

При идентификации деревьев обычно используется какая-либо каноническая форма, в которой изоморфные деревья неразличимы, а неизоморфные получают различные представления. Удобной для этой цели является *корневая форма* представления дерева, корнем которого служит специальным образом выбранная вершина.

Одна из стандартных процедур выбора корня состоит в следующем: из дерева удаляются все концевые вершины и ребра, затем в полученном дереве снова удаляются все вершины и ребра и т. д. до тех пор, пока исходное дерево не сократится до единственной вершины или ребра. В первом случае оставшаяся вершина выбирается в качестве корня и называется *центром*. Во втором случае две вершины и связывающее их ребро образуют *бицентр*. При этом за корень принимается та вершина, из которой вырастает дерево с меньшим числом вершин (если число вершин одинаково, то за корень принимается любая из вершин бицентра). Так, дерево (рис. 94, *б*) имеет центр и его корневой форме (рис. 94, *в*) соответствует последовательность

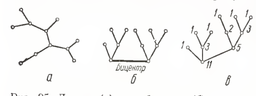


Рис. 95. Дерево (*а*), его бицентр (*б*) и корневая форма (*в*).

$$\beta(T) = (17,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 6,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1).$$

На рис. 95, *а* изображено дерево, которое имеет бицентр (рис. 95, *б*), а его корневая форма (рис. 95, *в*) характеризуется последовательностью

$$\beta(T) = (11,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 5,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1).$$

Другой способ выбора корня дерева для его корневой формы основан на понятии высоты вершины. С каждой вершиной связаны *ответвления*, представляющие собой части дерева, причем число ребер в ответвлении характеризует его *длину*. *Высота вершины* — это число, равное наибольшей длине связанных с ней ответвлений. Вершина с наименьшей высотой выбирается в качестве корня и называется *центроидом*. Если имеется две такие вершины, то они вместе с соединяющим их ребром образуют *бицентроид*. При этом, как и ранее, за корень принимается та вершина, из которой вырастает дерево с меньшим числом вершин.

Рис. 96. Неизоморфные деревья (цифры означают высоты вершин).

Концевые вершины имеют по одному ответвлению, которое содержит все ребра дерева, и, следовательно, в дереве на p вершинах высоты концевых точек равны $p - 1$. Высота любой неконцевой вершины меньше, чем $p - 1$. На рис. 96, *а* изображены три неизоморфные дерева с десятью вершинами и указаны высоты вершин.

Первое из них имеет центр и центроид, которые не совпадают, второе имеет центр и бицентроид, а в третьем бицентр и бицентроид совпадают. После определения корня, которым служит центроид или одна из вершин бицентроида, корневая форма, как и ранее, может быть представлена соответствующей ей последовательностью $\beta(T)$.

Два дерева являются изоморфными, если последовательности для их корневых форм совпадают (разумеется, обе корневые формы должны быть образованы с корнем в центре либо в центроиде). Таким образом, идентификация деревьев сводится к сравнению соответствующих им последовательностей для корневых форм.

Рис. 97. Структурная форма пропана (*а*), соответствующее дерево (*б*) и его упрощенное изображение (*в*).

6. Химические изомеры. Задача идентификации и перечисления деревьев возникает, например, в химии в связи с выявлением изомеров органических соединений определенных типов. Так, структуры углеводородов парафинового ряда C_kH_{2k+2} можно представить деревьями, у которых вершины четвертой степени соответствуют атомам углерода, вершины первой степени (концевые вершины) — атомам водорода, а ребра отображают валентные связи между атомами.

На рис. 97, *а* изображена структурная формула пропана—углеводорода рассматриваемого парафинового ряда при $k = 3$, а на рис. 97, *б* — соответствующее дерево. Изображение дерева можно упростить, отбросив концевые вершины и ребра (рис. 97, *в*); тогда дерево будет содержать только вершины, соответствующие атомам углерода. Добавив к этому дереву водородные связи так, чтобы степени всех его вершин равнялись четырем, получим полное изображение структуры соединения.

Метан ($k=1$) Этан ($k=2$) Пропан ($k=3$) Бутан ($k=4$) Пентан ($k=5$) Гексан ($k=6$)

Рис. 98. Деревья для изомеров парафинового ряда.

Перечисление различных структур соединений C_kH_{2k+2} при данном значении k сводится к определению числа различных деревьев с k вершинами, степени которых не превышают четырех. Каждое такое дерево служит упрощенным представлением соответствующего соединения (без водородных связей). При $k < 4$ имеется только по одному дереву для каждого k, но при $k \geqslant 4$ может быть

несколько различных структур (рис. 98). Последовательное дерево соответствует прямой цепи углеводорода, а другие деревья — его изомерам. Дополняя эти деревья водородными связями (легко убедиться, что число таких связей всегда будет $2k+2$), получаем соответствующие структурные формулы.

Подсчет числа всевозможных изомеров для парафинового ряда C_kH_{2k+2}, как и для ряда других органических соединений, основан на сложных методах комбинаторного анализа, и в значительной мере эта задача стимулировала его развитие. Ниже приведены количества различных структур для значений k от 1 до 13:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Количество деревьев (структур)	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	357	799

7. **Деревья графа.** Будем называть *деревом связного графа* любое покрывающее дерево (каркас или остов), связывающее все его вершины и имеющее в качестве ветвей ребра этого графа. Два дерева считаются различными, если они отличаются хотя бы одним ребром.

Рис. 99. Связный граф и одно из его деревьев (выделено жирными линиями).

Существует простой способ определения количества различных деревьев графа без петель (или мультиграфа) с p вершинами. Для этого необходимо записать квадратную матрицу p-го порядка, по главной диагонали которой расположены степени вершин, а ij- и ji-элементы равны взятому со знаком минус числу ребер, связывающих вершины i и j. Вычислив любой из главных миноров этой матрицы, получим искомое число деревьев графа. Например, для графа рис. 99 имеем:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \Delta_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = 76.$$

Одно из 76 деревьев графа изображено на рис. 99 жирными линиями. Приведенный способ определения числа деревьев графа известен как *теорема Трента*.

8. Формирование дерева графа. Для данного (p, q)-графа процесс формирования дерева можно организовать поочередным рассмотрением ребер двумя способами:

1) очередное ребро графа относится к дереву, если оно не образует цикла с уже выбранной совокупностью ветвей, до тех пор пока не получится $p-1$ ветвей, составляющих дерево;

2) очередное ребро удаляется из графа, если оно образует контур с оставшимися ребрами, до тех пор пока не будет удалено $q-p+1$ хорд, составляющих дополнение (остальные $p-1$ ребер служат ветвями дерева).

Если требуется сформировать дерево с преимущественным включением ребер (например, экстремальное дерево), то ребра рассматриваются в порядке их иерархии по весу или какому-либо признаку. При использовании вычислительных машин граф $G=(V, E)$ задается как совокупность ребер $e_i=(\alpha_i, \beta_i)$, где α_i и β_i — вершины, инцидентные ребру e_i, причем α_i, $\beta_i \in V$ и $e_i \in E$. Ребра упорядочиваются в соответствии с принятой иерархией и дерево формируется, например, по первому способу.

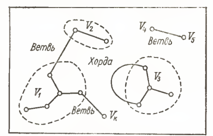


Рис. 100. Классы эквивалентности на множестве вершин графа.

В промежуточной ситуации совокупность ребер, отнесенных к дереву, образует некоторый (вообще, несвязный) подграф (рис. 100). Множества вершин каждой из компонент этого подграфа и одноэлементные множества, содержащие не вошедшие в этот подграф вершины, образуют совокупность классов эквивалентности V_j и определяют на множестве вершин V соответствующее разбиение. Ясно, что ребро e_i должно быть отнесено к дереву, если и только если инцидентные ему вершины α_i и β_i принадлежат различным классам эквивалентности. Пусть $\alpha_i \in V_r$ и $\beta_i \in V_s$, тогда $e_i \in T$ при условии $V_r \neq V_s$ и $e_i \in N$ при условии $V_r = V_s$ (через T обозначено дерево и через N — его дополнение). Включение ребра e_i в дерево означает объединение тех частей подграфа ветвей, к которым принадлежат инцидентные вершины этого ребра, т. е. классы эквивалентности V_r и V_s объединяются в класс $V_r \cup V_s$. Включение ребра e_i в дополнение не изменяет разбиения множества вершин.

В исходном положении все p классов эквивалентности содержат по одной вершине, т. е. имеем полное разбиение множества вершин. Первое же рассматриваемое ребро относится к дереву и образует двухэлементный класс, объединяющий пару инцидент-

ных этому ребру вершин. В дальнейшем каждое включение ребра в дерево сопровождается объединением двух классов эквивалентности, так что при выборе для дерева k ветвей разбиение состоит из $p-k$ классов.

Процесс формирования дерева заканчивается после того, как будет отобрано $p-1$ ветвей, совокупность которых образует связный подграф без контуров. Ему соответствует полное отношение эквивалентности на множестве вершин графа, при котором все вершины объединяются в единственный класс. Если исходный граф несвязный, то конечное разбиение содержит столько же классов

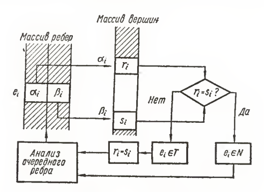


Рис. 101. Процедура формирования дерева графа.

эквивалентности, сколько компонент имеет граф, причем каждый из этих классов объединяет вершины соответствующих компонент графа.

При машинной реализации процедуры формирования дерева (или леса) последовательные разбиения образуются путем идентификации вершин на одномерном массиве, содержащем p ячеек памяти, расположенных в той последовательности, которая принята при нумерации вершин. Так как любая вершина из данного класса может служить его представителем, то всем таким вершинам присваивается номер одной из них, который заносится в соответствующие ячейки. В исходном положении содержимое ячеек совпадает с их номерами, и в конечном — все ячейки каждой компоненты графа содержат одинаковые номера.

При рассмотрении очередного ребра $e_i = (\alpha_i, \beta_i)$ на массиве вершин считывается содержимое r_i и s_i ячеек по адресам α_i и β_i. При $r_i = s_i$ ребро e_i относится к дополнению ($e_i \in N$), а при $r_i \neq s_i$ ребро e_i относится к дереву ($e_i \in T$) и одновременно осуществляется идентификация $r_i = s_i$ на множестве вершин V (во всех ячей-

ках число r_i замещается числом s_i). Изложенная процедура изображена на рис. 101 и иллюстрируется следующим примером:

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Массив ребер	α_i	1	2	2	1	3	1	1	2	4
	β_i	3	5	5	4	4	4	2	4	5

Идентификация на массиве вершин

Исходное разбиение

1	3	3		4			5		
2	2	5		5			5		
3	3	3		4			5		
4	4	4		4			5		
5	5	5		5			5		

Исходный граф и сформированное дерево показаны на рис. 102. Благодаря невысоким требованиям к оперативной памяти изложенный алгоритм позволяет практически мгновенно формировать иа вычислительной машине дерево графа, содержащего тысячи ребер.

9. Выявление всех деревьев графа. В ряде случаев, например при анализе цепей и систем, может возникнуть потребность получить все покрывающие деревья графа. Для решения этой задачи разработано много различных алгоритмов. Поясним один из них на примере графа рис. 103, ребра которого пронумерованы порядковыми числами.

Рис. 102. Граф к примеру формирования дерева.

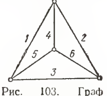


Рис. 103. Граф с порядковой нумерацией ребер.

Сначала записываются $p-1$ множеств номеров ребер, инцидентных $p-1$ вершинам графа (кроме одной из p вершин):

$$\Omega_1 = \{1,\ 3,\ 5\};\quad \Omega_2 = \{1,\ 2,\ 4\};\quad \Omega_3 = \{2,\ 3,\ 6\}.$$

Рассматривая последовательно эти множества, образуем таблицы, столбцы которых представляют собой всевозможные сочетания различных ребер:

$$\begin{bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\,1\,1 & 3\,3\,3\,3\,3 & 5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\,5\\ 2 & 2 & 4\,4\,4 & 1\,1\,2\,4\,4 & 1\,1\,1\,2\,2\,4\,4\,4\\ 3 & 6 & 2\,3\,6 & 2\,6\,6\,2\,6 & 2\,3\,6\,3\,6\,2\,3\,6\end{bmatrix}.$$

Столбцы, содержащие одинаковые ребра (независимо от их порядка), попарно вычеркиваются, в результате чего получаем таблицу Ω, называемую *структурным числом графа:*

$$\Omega=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\\ 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4\\ 6 & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 & 2 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

Количество столбцов в этой таблице равно числу всех деревьев и каждый столбец соответствует одному из них. При этом числа в столбце указывают номера тех ребер, из которых состоит данное дерево. Ясно, что порядок следования столбцов и чисел в каждом столбце не меняет существа дела. Поэтому структурные числа считаются эквивалентными, если они содержат одинаковое количество столбцов, каждый из которых представлен различными множествами их элементов.

Несмотря на простоту изложенного алгоритма, его применение затруднено из-за необходимости выявлять и удалять столбцы, содержащие одинаковые множества ребер. Легко понять, что каждый такой столбец соответствует несвязному суграфу с одним или несколькими циклами, причем они обязательно появляются четное число раз. В рассматриваемом примере — это столбцы $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2\}$.

10. k-деревья. Так как дерево (p, q)-графа представляет собой минимальный связный подграф с p вершинами и $p-1$ ребрами, то удаление из дерева любой ветви разбивает его на две несвязные компоненты (компонентой может быть также изолированная вершина). Такой подграф с p вершинами и $p-2$ ребрами, не содержащий циклов, называют 2-деревом. Вообще *k-дерево* можно определить как суграф без циклов, содержащий $p-k$ ребер графа. При этом понятие 1-дерева совпадает с покрывающим деревом или просто деревом графа.

K-дерево можно получить путем исключения $k-1$ ветвей (при сохранении всех вершин) из покрывающего дерева, которое тем

самым разбивается на k компонент. Соответственно множество V вершин графа разбивается на k непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_k$, каждое из которых содержит вершины соответствующей компоненты k-дерева. Примеры k-деревьев приведены на рис. 104.

Если v_i и v_j — вершины различных компонент 2-дерева, т. е. $v_i \in V_1$ и $v_j \in V_2$, причем $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, то оно становится деревом графа, полученного из исходного объединением вершин v_i и v_j.

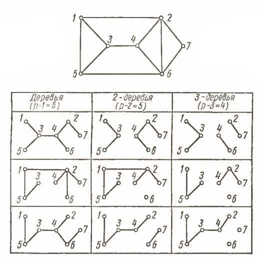


Рис. 104. Примеры k-деревьев.

При этом говорят, что 2-дерево относится к *типу* (v_i, v_j). Очевидно, число всех 2-деревьев (v_i, v_j)-типа равно числу деревьев графа, образованного из исходного объединением вершин v_i и v_j (ребра, соединяющие эти вершины, удаляются).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите количество различиых деревьев на миожестве p вершнн при $p = 5$; 10; 15; 20. Сколько временн потребовалось бы для подсчета деревьев иа машиие с производительностью 10^6 операций/с, считая одиу операцию на дерево?

2. Для дерева задаииого миожеством ветвей
$T = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (5, 6), (5, 7), (7, 8), (7, 9)\}$:

а) укажите коицевые вершины и ветвн;

б) постройте дерево и запишите его символ;

в) предложите алгоритм получення символа дерева без построеиия дерева непосредственно по задаииому миожеству ветвей.

3. Постройте деревья по заданным символам:

а) $\alpha(T) = (2, 3, 4, 4, 6, 6)$; б) $\alpha(T) = (2, 3, 2, 2, 2)$.

4. Стоимость прокладки коммуникаций между шестью пунктами, тыс. руб., выражается следующей таблицей:

	1	2	3	4	5	6
1	×	10	8	12	17	14
2		×	6	2	13	7
3			×	6	4	21
4				×	10	19
5					×	16

Постройте дерево минимальной общей стоимости, связывающее все пункты. Единственно ли решение? Если нет, то найдите все экстремальные деревья.

5. Взаимопонимание между членами коллектива, состоящего из семи человек, оценено по десятибалльной системе (высший балл — 10, низший — 1):

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	4	3	10	6	7	9
2		×	5	4	4	3	8
3			×	1	3	2	3
4				×	10	8	5
5					×	4	9
6						×	2

Постройте дерево максимального взаимопонимания, которое в какой-то мере характеризует наиболее эффективные контакты между членами коллектива при решении общих вопросов.

6. Постройте все корневые деревья для дерева (см. рис. 91) и запишите соответствующие им последовательности.

7. Определите высоты вершин дерева на рис. 94, *а* и найдите его центроид (или бицентроид).

8. Для деревьев (см. рис. 96) постройте корневые формы и запишите соответствующие последовательности:

а) относительно центров (или бицентров);

б) относительно центроидов (или бицентроидов).

9. С помощью корневых форм установите, имеются ли изоморфные деревья среди изображенных на рис. 105.

10. Покажите, что для деревьев на p вершинах при $p < 5$ центры и центроиды (или бицентры и бицентроиды) совпадают.

11. Запишите в общем виде $\beta(T)$ для корневых форм последовательного и звездного деревьев.

12. Покажите, что при нечетном числе вершин никакое дерево не может иметь бицентроида.

13. Покажите, что последовательности, полученные из последовательностей $\beta(T)$ удалением всех членов, равных 1, однозначно определяют корневую форму и могут использоваться для идентификации деревьев.

14. Запишите структурные формулы C_4H_{10} для бутана и изобутана, соответствующие двум упрощенным деревьям при $k = 4$ (см. рис. 98).

15. Изобразите все упрощенные деревья, соответствующие изомерам парафинового ряда C_kH_{2k+2} при $k = 7$.

16. Определите количество деревьев мультиграфа, приведенного на рис. 106, и изобразите все деревья.

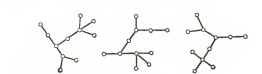


Рис. 105. Деревья к задаче 9.

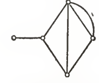


Рис. 106. Мультиграф к задачам 16 и 21.

17. Покажите, что присоединение к графу ребра так, что оно связано с графом только одной вершиной, а другая остается концевой, не изменяет общего числа деревьев.

18. Обобщите теорему Трента на несвязный граф, состоящий из k компонент.

19. Выведите формулу для числа деревьев p^{p-2} на множестве p вершин на основе теоремы Трента, рассматривая исходный граф как полный.

20. Воспользовавшись формальным алгоритмом, постройте дерево графа (см. рис. 99) с приоритетом ребер $e_{ij} = (\alpha_i, \beta_i)$, заданных в следующей последовательности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	1	2	4	4	1	4	1	2	2	3
β_i	3	4	5	5	3	5	2	3	5	4

21. Найдите все деревья графа (рис. 106) с помощью метода структурных чисел.

22. Докажите, что структурное число содержит все деревья графа, а вычеркиваемые столбцы соответствуют несвязным суграфам с циклами.

23. На основе дерева, выделенного жирными линиями (см. рис. 102), образуйте всевозможные 2-деревья и 3-деревья.

24. Определите число всех деревьев и 2-деревьев типа (1,3)-графа, на рис. 104.

25. При каких условиях k-дерево с p вершинами обязательно содержит изолированную вершину, если оно образуется из: а) произвольного дерева; б) последовательного дерева; в) звездного дерева?

2. АНАТОМИЯ ГРАФОВ

1. Вводные замечания. При изучении структурных свойств (анатомии) графов удобно пользоваться их матричными представлениями.

Исходное описание графа дает его матрица инцидентности (1, 4, 6). Единственная неопределенность имеет место для петель, которым в матрице инцидентности соответствуют нулевые столбцы, но отсутствуют сведения о том, какие именно вершины инцидентны петлям. Для устранения этой неопределенности будем рассматривать графы без петель (мультиграфы) или не будем уточнять положение петель.

Можно также ограничиться рассмотрением связных графов, так как основные свойства легко обобщаются на случай, когда граф состоит из нескольких компонент связности. Каждая такая компонента представляется своей матрицей инцидентности A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), а общая матрица инцидентности A несвязного графа (при соответствующей группировке его вершин и ребер) имеет квазидиагональную форму:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix}.$$

Сначала рассматриваются структурные свойства неориентированных графов, а затем они обобщаются на орграфы. Как будет видно из дальнейшего, эти два случая мало чем отличаются между собой.

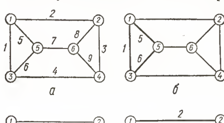
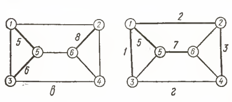



Рис. 107. Граф (a) и его суграфы (выделены жирными линиями): циклический ($б$), ациклический ($в$) и покрывающее дерево ($г$).

Элементами матриц инцидентности неориентированных графов могут быть только нули и единицы. Поэтому все операции над элементами выполняются по модулю 2. Так, при сложении по модулю 2 нескольких чисел достаточно их арифметическую сумму разделить на два и остаток записать как результат такого сложения. При рассмотрении орграфов используются обычные правила, так как их матрицы инцидентности содержат в качестве своих элементов числа 0, 1 и —1.

2. Свойства матрицы инцидентности. Прежде всего, отметим очевидную зависимость между строками матрицы инцидентности A

графа $G=(V, E)$. Так как каждый ее столбец содержит только два единичных элемента или состоит только из нулей, если столбец соответствует петле, то сумма всех строк (по модулю 2) равна нулю. Это значит, что без потери информации вместо матрицы A можно рассматривать сокращенную матрицу A_0, которая получается из A вычеркиванием любой строки (чаще вычеркивается последняя строка). Например, для графа на рис. 107, *а* имеем:

$A=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1			1					1
	1	1					1		2
1			1		1				3;
		1	1					1	4
				1	1	1			5
						1	1	1	6

$A_0=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1			1					1
	1	1					1		2
1			1		1				3.
		1	1					1	4
				1	1	1			5

Таким образом, из p строк матрицы A связного графа одна строка всегда линейно зависима, т. е. ранг матрицы A не может превышать $p-1$ (далее будет показано, что он в точности равен $p-1$).

Любое подмножество столбцов матрицы A можно рассматривать как матрицу инцидентности A' некоторого суграфа $G' = (V, E')$, содержащего все вершины V исходного графа и соответствующее выделенным столбцам подмножество $E' \subset E$ его ребер. При этом все столбцы A' линейно-независимы тогда и только тогда, когда суграф G' не содержит циклов. Действительно, если совокупность ребер образует цикл (рис. 107, *б*), то каждая вершина инцидентна четному числу ребер этого цикла. Следовательно, сумма по модулю 2 соответствующих столбцов (1, 5, 6) дает нулевой столбец, что означает их зависимость. Если же суграф не содержит циклов (рис. 107, *в*), то он имеет, по меньшей мере, пару (вообще, четное число) концевых вершин, каждая из которых инцидентна только одному (концевому) ребру. Поэтому сумма по модулю 2 соответствующих столбцов (5, 6, 8) будет содержать два (или четное число) единичных элементов и, следовательно, совокупность этих столбцов независима.

В связном графе с p вершинами всегда можно выделить $p-1$ ребер так, чтобы они образовали суграф без циклов, представляющий собой дерево графа (рис. 107, *г*). Поэтому матрица инцидентности содержит не менее $p-1$ независимых столбцов. В то же время любой суграф, имеющий более $p-1$ ребер, обязательно содержит цикл, т. е. в матрице инцидентности не может быть больше $p-1$ независимых столбцов. Отсюда следует, что матрица инцидентности связного графа содержит в точности $p-1$ независимых столбцов и значит ее ранг равен $p-1$. Число $\nu = p-1$ и определяет *ранг графа*.

3. Деревья и дополнения. Из изложенного ясно, что совокупность $p-1$ столбцов матрицы инцидентности линейно-независима, если соответствующие им ребра образуют дерево графа. И обратно, дерево графа соответствует совокупности $p-1$ линейно независимых столбцов матрицы инцидентности. Остальные $q-p+1$ столбцов соответствуют ребрам, которые образуют дополнение дерева.

Рассматривая всевозможные сочетания по $p-1$ из q столбцов матрицы A или A_0 и испытывая их на независимость, можно выявить все деревья графа. Однако такой путь нерационален и более удобным является алгоритм, изложенный в (1.9). Если же необходимо сформировать одно дерево, обладающее какими-либо свойствами (например, экстремальное дерево), то можно воспользоваться алгебраическим способом преобразования матрицы инцидентности.

Предварительно ребра графа нумеруются в том порядке, в каком их предпочтительно вводить в дерево (например, в порядке возрастающих весов). Затем, рассматривая поочередно столбцы матрицы инцидентности, необходимо выбрать $p-1$ столбцов так, чтобы в совокупности они были линейно-независимы. Для этого исполь-

зуются операции над матрицей инцидентности, не нарушающие ее ранга — перестановка строк и столбцов, а также замена строки суммой по модулю 2 с другой строкой.

В результате в матрице A_0 можно выделить единичную матрицу, столбцы которой будут соответствовать ветвям дерева. Если используется матрица A, то в конечном счете все элементы ее последней строки обращаются в нули и выделяется единичная матрица $(p-1)$-го порядка. Эта процедура подобна алгоритму исключения Гаусса—Жордана с выбором опорных элементов по столбцам (3.4.3).

Например, преобразование матрицы A для графа рис. 107, *а* сводится к следующим операциям. Заменяем третью строку ее суммой с первой:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1			1					1
	1	1					1		2
	1		1	1	1				1+3
		1	1					1	4
				1	1	1			5
						1	1	1	6

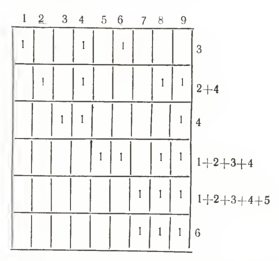
Заменяем первую и третью строки их суммами со второй строкой:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		1		1			1		1+2
	1	1					1		2
		1	1	1	1		1		1+2+3
		1	1					1	4
				1	1	1			5
						1	1	1	6

Далее заменяем первую, вторую и четвертую строки их суммами с третьей строкой:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			1		1				3
	1		1	1	1				1+3
		1	1	1	1		1		1+2+3
				1	1		1	1	1+2+3+4
				1	1	1			5
						1	1	1	6

В первых трех столбцах и строках образовались элементы единичной матрицы, однако в следующем столбце нельзя выбрать опорный элемент, так как в остальных строках этого столбца стоят нули. Поэтому четвертый столбец пропускается и рассматривается пятый. Заменяя вторую, третью и пятую строки их суммами с четвертой строкой, имеем:



1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			1		1				3
	1		1				1	1	2+4
		1	1					1	4
				1	1		1	1	1+2+3+4
						1	1	1	1+2+3+4+5
						1	1	1	6

Далее имеется возможность выбрать опорный элемент в седьмом столбце. Заменяя последнюю строку ее суммой с пятой строкой, получаем:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			1		1				3
	1		1				1	1	2+4
		1	1					1	4
				1	1		1	1	1+2+3+4
						1	1	1	1+2+3+4+5
									1+2+3+4+5+6

Как и следовало ожидать, последняя строка преобразовалась в нулевую (ее можно использовать для контроля и в дальнейшем отбросить). Пять столбцов, в которых имеется только по одному единичному элементу, составляют единичную субматрицу, а соответствующие им ребра (1, 2, 3, 5, 7) образуют дерево графа. Остальные столбцы (4, 6, 8, 9) соответствуют хордам, которые образуют дополнение дерева. Переставив столбцы так, чтобы слева выделилась единичная субматрица, результат преобразования матрицы инцидентности можно записать в виде:

П =

1	2	3	5	7	4	6	8	9	
1					1	1			3
	1				1		1	1	2 + 4
		1			1			1	4
			1			1	1	1	1 + 2 + 3 + 4
				1			1	1	1 + 2 + 3 + 4 + 5

Суммы чисел справа у каждой строки приведенных матриц указывают на номера строк матрицы инцидентности, результатом суммирования которых является данная строка.

4. Разрезы. Во многих прикладных задачах требуется выделить в связном графе $G = (V, E)$ подмножество ребер $E' \subset E$, называемое *разрезом*, при удалении которых граф распадается на две или больше компонент. Разрез называется *простым*, если никакое собственное подмножество его ребер не является разрезом данного графа. После удаления из графа ребер простого разреза образуется суграф, состоящий точно из двух компонент (компонентой такого суграфа может быть и изолированная вершина).

Графически разрез обычно выделяют замкнутой линией, которая пересекает принадлежащие ему ребра. При этом множество вершин V графа разбивается на два непустых подмножества V' и V'' ($V' \cup V'' = V$, $V' \cap V'' = \varnothing$), связь между которыми осуществляется исключительно ребрами разреза. Так, простой разрез $E' = \{2, 3, 7, 9\}$, выделенный на рис. 108, *а* жирными линиями, разбивает множество вершин на подмножества $V' = \{1, 3, 4, 5\}$ и $V'' = \{2, 6\}$. Разрез $E' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ на рис. 108, *б* не является простым, так как можно найти его подмножество, например $E'' = (1, 4, 6)$, которое также является разрезом.

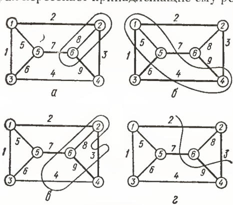


Рис. 108. Разрезы графа (выделены жирными линиями):

а — простой; *б* — непростой; *в*, *г* — варианты изображения простого разреза.

При выделении разреза замкнутой линией необходимо иметь в виду, что данному разрезу принадлежат только те ребра, которые пересекаются этой линией один (или нечетное число) раз. Ребра, которые имеют с выделяющей линией четное число пересечений, разрезу не принадлежат. Для упрощения разделяющую линию часто обрывают, считая условно, что она замыкается во внешней области графа. На рис. 108, *в* и *г* изображены варианты простого разреза (рис. 108, *а*), которые иллюстрируют эти положения.

Совокупность ребер, инцидентных некоторой вершине графа, является разрезом с центром в этой вершине и называется *центральным*. В неразделимом графе каждый центральный разрез простой, удаление которого приводит к суграфу с изолированной вершиной. В разделимом графе совокупность ребер, инцидентных точке сочленения, образует разрез, который не является простым. При его удалении граф разбивается на три или больше компонент, одна из

которых содержит только точку сочленения. Соответствующий пример показан на рис. 109.

В графе с p вершинами имеется p центральных разрезов, причем каждому из них соответствует строка инцидентности A. Единичные элементы строки указывают на совокупность ребер, образующих соответствующий разрез.

Аналогичное представление для любого разреза можно получить, суммируя по модулю 2 те строки матрицы инцидентности, которые соответствуют вершинам одного из подмножеств V' или V'', на которые данный разрез разбивает множество вершин графа. Ясно, что безразлично, каким из этих двух подмножеств руководствоваться, поскольку в силу зависимости строк матрицы инцидентности (сумма их равна нулевой строке) в обоих случаях получим один и тот же результат. Однако удобно выбирать подмножество, которое содержит меньше вершин. Так, простой разрез (см. рис. 108, *а*) представляется суммой второй и шестой (или первой, третьей, четвертой и пятой) строк:



Рис. 109. Центральный разрез в точке сочленения разделимого графа.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	1	1					1		2
						1	1	1	6
	1	1				1		1	2 + 6

Таким образом, любой разрез можно рассматривать как объединение некоторой совокупности центральных разрезов.

5. Матрица сечений. Так как из p строк матрицы инцидентности связного графа только $p - 1$ линейно-зависимы, то число независимых центральных разрезов также равно $p - 1$. При замене любой строки матрицы инцидентности суммой ее с другими строками ранг этой матрицы не изменяется. Поэтому после такой операции $p - 1$ ее строк также будут соответствовать некоторой совокупности независимых разрезов. Например, на рис. 110 показаны независимые разрезы, соответствующие преобразованиям в (3) матрицы инцидентности графа (см. рис. 107, *а*). На последнем шаге получаем совокупность независимых разрезов, определяемых деревом графа. Каждый из них определяется строкой результирующей матрицы II и, как видно из этой матрицы, содержит одну и только одну ветвь дерева, не входящую в остальные разрезы. Такие разрезы

называются *главными разрезами*, а в приложениях их чаще называют *сечениями*.

Итак, дерево графа однозначно определяет множество сечений, которое представляется в аналитической форме матрицей П, называемой *матрицей сечений*. Между ветвями дерева и сечениями имеет место взаимно-однозначное соответствие: каждая ветвь содержится в соответствующем ей сечении и каждое сечение содержит соответствующую ему ветвь. Поэтому строки матрицы П часто обозначают номерами тех ветвей, которые определяют сечения (их можно также нумеровать порядковыми числами). Так, матрицу сечений, приведенных на рис. 110, запишем следующим образом:

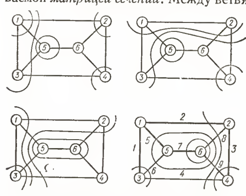


Рис. 110. Независимые разрезы, соответствующие преобразованиям матрицы инцидентности графа рис. 107, *а*.

П =

	1	2	3	5	7	4	6	8	9
1	1					1	1		
2		1				1		1	1
3			1			1			1
5				1			1	1	1
7					1			1	1

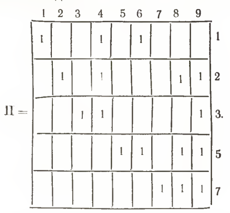
Если столбцы, соответствующие ветвям дерева, объединены в единичную матрицу, как в приведенной выше записи, то матрица сечений представляется в канонической форме:

$$\Pi = [1, \pi],$$

где π — матрица сечений для хорд размера $(p-1) \times (q-p+1)$.

Следует заметить, что каноническая форма является удобной, но не обязательной при записи матрицы сечений. При расположе-

нии столбцов в порядке следования их номеров приведенная выше матрица запишется в виде:



$\Pi =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1			1		1			
2		1		1				1	1
3			1	1					1
5					1	1		1	1
7							1	1	1

Ребра и сечения связаны отношением инцидентности: содержащиеся в некотором сечении ребра инцидентны данному сечению, а содержащие некоторое ребро сечения инцидентны данному ребру. Ветвь дерева инцидентна только своему сечению и называется *определяющей ветвью*.

Так как множество сечений представляет собой независимую совокупность $p-1$ разрезов, то любой разрез можно получить объединением соответствующих сечений. Например, разрез на рис. 108, *а* образуется объединением сечений *2*, *3* и *7*. Различные деревья порождают и различные совокупности независимых сечений, число которых определяется так же, как и число различных деревьев графа (1.7).

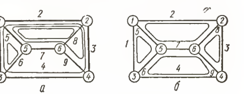


Рис. 111. Независимые циклы графа: *а* — главные циклы (контуры); *б* — ячейки

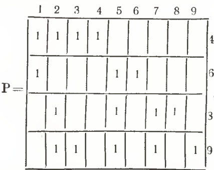
6. Матрица контуров. Любая из $q-p+1$ хорд образует совместно с некоторой совокупностью ветвей дерева простой цикл (рис. 111, *а*). Так как каждый из этих циклов содержит, по крайней мере, одно ребро (хорду), которое не входит в другие циклы, то образованная таким способом совокупность $q-p+1$ циклов является линейно-независимой. Число $\sigma = q-p+1$ называется *цикломатическим числом* графа.

Можно показать, что любой цикл графа представляется как объединение таких простых циклов, называемых *главными циклами*.

В приложениях их обычно называют *контурами*, но не следует смешивать этот термин с контуром орграфа, в котором обход совершается по направлениям дуг.

Ребра и контуры связаны отношением инцидентности: содержащиеся в некотором контуре ребра инцидентны данному контуру, а содержащие некоторое ребро контуры инцидентны данному ребру. Хорда инцидентна только своему контуру и называется *определяющей хордой*.

Аналитическое представление совокупности контуров (p, q)-графа дает *матрица контуров* размера $(q - p + 1) \times q$, строки которой соответствуют контурам, а столбцы — ребрам. Обычно контурам присваиваются номера определяющих их хорд, либо они нумеруются порядковыми числами. Инцидентность i-го контура и j-го ребра отмечается в матрице контуров единицей в ij-клетке, а нулевые элементы означают, что соответствующие контуры и ребра не инцидентны. Например, матрица контуров, приведенных на рис. 111, *а*, имеет вид:



P =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	1						4
1				1	1				6
	1			1		1	1		3
	1	1		1		1		1	9

.

Столбцы матрицы контуров, соответствующие хордам, содержат по одному единичному элементу в различных строках. Поэтому их можно объединить в единичную матрицу. Так, для рассматриваемого примера

P =

1	2	3	5	7	4	6	8	9	
1	1	1			1				4
1			1			1			6
	1		1	1			1		8
	1	1	1	1				1	9

.

Таким образом, в канонической форме матрица контуров имеет вид:

$$\mathrm{P} = [\rho, \ 1],$$

где ρ — матрица контуров для ветвей дерева размера $(q - p + 1) \times \times (p - 1)$.

Совокупность $q - p + 1$ независимых циклов образуют также *ячейки* плоского графа. Каждый из таких циклов содержит ребра, охватывающие области, на которые граф разбивает плоскость (рис. 111, *б*).

7. Связь между топологическими матрицами. Матрицы сечений и контуров отражают структурные свойства (топологию) графа, в связи с чем их можно назвать *топологическими матрицами*. Для данного графа вид этих матриц определяется выбранной совокупностью независимых разрезов и циклов. Если главные разрезы и циклы (сечения и контуры) порождаются одним и тем же деревом, то оно называется ***фундаментальным деревом*** графа. При этом между топологическими матрицами имеется взаимная связь, позволяющая по одной из них определить другую.

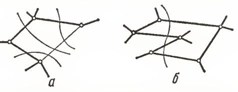


Рис. 112. Инцидентность ребер и разрезов: *а* — совокупность сечений, инцидентных хорде; *б* — четность числа ребер цикла, инцидентных разрезу.

В самом деле, столбец матрицы π для некоторой хорды содержит единичные элементы в строках тех сечений, определяющие ветви которых образуют с этой хордой контур (рис. 112, *а*). Иначе говоря, столбцы матрицы π отображают инцидентность ветвей контурам, которые определяются соответствующими этим столбцам хордами. Поэтому столбцы матрицы π играют роль строк матрицы ρ, т. е.

$$\rho = \pi^t; \quad \pi = \rho^t,$$

а также

$$\mathrm{P} = [\pi^t, \ 1]; \quad \Pi = [1, \ \rho^t].$$

Отсюда, в частности, следует (при операциях по модулю 2):

$$\Pi \mathrm{P}^t = [1, \ \pi] \begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} = [1, \ \pi] \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \end{bmatrix} = \pi + \pi = 0 \, (\mathrm{mod}\, 2).$$

Соотношение $\Pi \mathrm{P}^t = 0$ (или $\mathrm{P}\Pi^t = 0$) справедливо и в общем случае, если под Π и P понимать соответственно матрицы произвольных разрезов и циклов, но при условии, что для обеих матриц принят один и тот же порядок следования ребер. Его доказательство

основано на том факте, что в связном графе каждый цикл имеет четное число (возможно равное нулю) общих ребер с каждым разрезом (рис. 112, *б*). При умножении каждой строки матрицы П на каждый столбец матрицы P^t (представляющий собой строку матрицы Р) получим четное число единиц, сумма которых по модулю 2 дает нуль. Таким образом, матрица произвольных разрезов (или циклов) ортогональна транспонированной матрице произвольных циклов (или разрезов).

8. Пространство суграфов. Структурные свойства графа удобно интерпретировать в терминах линейного векторного пространства над числовым полем $\{0,1\}$, операции сложения и умножения в котором определены по модулю 2.

Пусть L — множество суграфов графа $G = (V, E)$ с естественной нумерацией вершин и ребер, т. е. $V = \{1, 2, \ldots, p\}$ и $E = \{1, 2, \ldots, q\}$. Любой суграф содержит все вершины и некоторое (возможно, пустое) подмножество ребер графа, т. е. $G' = (V, E')$, где $E' \subset E$. Ему можно поставить в соответствие q-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$, в котором x_i принимает значение 1 или 0 в соответствии с тем, принадлежит или не принадлежит данному суграфу i-е ребро графа, т. е.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in E' \\ 0, & \text{если } i \notin E' \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Например, суграфу, выделенному на рис. 107, *в* жирными линиями, соответствует вектор (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0). Деревья и дополнения, циклы и разрезы, контуры и сечения можно рассматривать как суграфы и использовать для них векторное представление. Так, разрез на рис. 108, *а* представляется вектором (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), а дерево на рис. 108, *г*—вектором (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1).

Суммой суграфов $G' = (V, E')$ и $G'' = (V, E'')$ будем называть суграф, которому соответствует вектор, равный сумме по модулю 2 векторов этих суграфов. Это значит, что сумма суграфов содержит те ребра, которые содержатся в E', но не содержатся в E'' и которые содержатся в E'', но не содержатся в E'. Иначе говоря, множество ребер суммы двух суграфов равно дизъюнктивной сумме ребер, принадлежащих каждому из них, т. е.

$$G' + G'' = (V, E') + (V, E'') = (V, E' + E'').$$

Множество суграфов с определенной на нем внутренней операцией суммы образует абелеву группу. При этом нейтральным элементом является пустой суграф (не содержащий ребер), а обратным элементом к каждому суграфу служит сам этот суграф. Совместно с внешней операцией — умножение суграфа на скаляр из числового поля (0, 1) — абелеву группу можно рассматривать как линейное *пространство суграфов* данного графа $G = (V, E)$. Размер-

ность этого пространства равна числу ребер q графа G и в качестве его базиса можно принять множество одинореберных суграфов, которым соответствуют векторы $g_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $g_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $g_q = (0, 0, \ldots, 1)$. Любой суграф представляется вектором q-мерного пространства через его базис, т. е.

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_q g_q = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i,$$

где α_i — элемент из числового поля, принимающий значение 0 или 1.

Совокупность $\nu = p - 1$ разрезов образует базис ν-мерного *пространства разрезов*, а совокупность $\sigma = q - p + 1$ независимых циклов образует базис σ-мерного *пространства циклов*. Оба эти пространства являются подпространствами пространства суграфов.

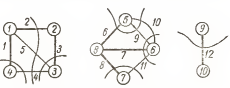


Рис. 113. Совокупность независимых сечений несвязного графа, состоящего из трех компонентов.

9. Несвязные графы. При рассмотрении несвязных графов совокупности независимых сечений и контуров можно определять для каждой его компоненты отдельно (рис. 113). Ранг и цикломатическое число графа, содержащего k компонент, соответственно равны $\nu = p - k$ и $\sigma = q - p + k$. Матрица инцидентности A содержит $p - k$ независимых строк, и для перехода к сокращенной матрице A_0 необходимо удалить из каждой совокупности строк, соответствующих компонентам графа, по одной строке. Так, для графа на рис. 113 матрица инцидентности имеет блочную структуру:

$A =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1			1							
2		1	1									
3			1	1	1							
4	1			1								
5						1			1	1		
6							1		1	1	1	
7								1			1	
8						1	1	1				
9												1
10												1

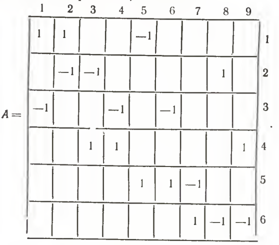
Сокращенную матрицу инцидентности можно записать в следующем виде:

$A_0 =$

1	1		1									1
	1	1										2
		1	1	1								3
					1			1	1			5.
						1		1	1	1		6
							1			1		7
											1	9

Преобразуя матрицу A или A_0 с помощью операций над строками по модулю 2, можно получить матрицы сечений и контуров теми же способами, что и для связного графа.

10. Ориентированные графы. Элементы матрицы инцидентности для орграфа принимают значения 0, 1 и — 1 в зависимости от инцидентности и направления дуги относительно вершины (1. 4. 6). Например, для орграфа на рис. 114, *а* имеем:

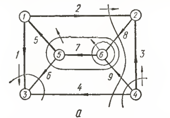


$A =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1			—1					1
	—1	—1					1		2
—1			—1		—1				3
		1	1					1	4
				1	1	—1			5
						1	—1	—1	6

При преобразовании матрицы A операции над ее элементами выполняются как над обычными числами. Можно показать, что минор любого порядка матрицы A, как и ее элементы, может равняться только 0, 1 или —1. Матрицы, обладающие таким свойством, называют *унимодулярными*.

С помощью операций перестановки строк и столбцов, а также замены строки ее алгебраической суммой с другой строкой можно преобразовать матрицу инцидентности A (или A_0) к такому виду,



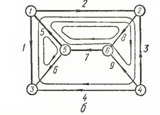
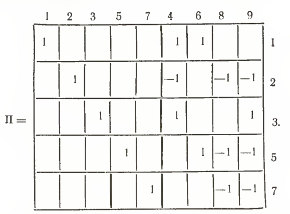


Рис. 114. Сечения (*а*) и контуры (*б*) ориентированного графа.

чтобы элементы совокупности ее $p - 1$ столбцов и строк (последняя строка матрицы A преобразуется в нулевую и отбрасывается) представляли собой единичную матрицу. Тогда получим матрицу сечений в канонической форме $\Pi = [1, \pi]$, где π — матрица сечений хорд. В нашем примере:



$\Pi =$

1	2	3	5	7	4	6	8	9	
1					1	1			1
	1				—1		—1	—1	2
		1			1			1	3.
			1			1	—1	—1	5
				1			—1	—1	7

Каждому сечению приписывается направление, которое определяется направлением соответствующей ветви фундаментального дерева. Ненулевые элементы строки матрицы П указывают на

совокупность дуг, инцидентных данному сечению, причем знак плюс означает, что направления дуги и сечения совпадают, а знак минус означает, что эти направления противоположны. На рис. 114, *а* направления сечений указаны стрелками, но можно обойтись и без них, так как достаточно руководствоваться ориентацией ветвей дерева.

Фундаментальное дерево определяет и совокупность независимых контуров, каждый из которых образуется одной хордой и некоторой частью ветвей дерева. Направление контура обычно принимают совпадающим с направлением определяющей его хорды. Дуга, инцидентная данному контуру, может совпадать с направлением контура или быть противоположной ему. В первом случае соответствующий элемент матрицы контуров равен 1, а во втором случае — 1. Так, в соответствии с рис. 114, *б* имеем:

P =

1	2	3	5	7	4	6	8	9	
—1	1	—1			1				4
—1			—1			1			6
	1		1	1			1		8
	1	—1	1	1				1	9

Между матрицами сечений и контуров орграфа, определяемых некоторым фундаментальным деревом, имеются такие же зависимости, как и для неориентированного графа:

$$\text{П}\text{P}^t = 0; \quad \text{P}\text{П}^t = 0.$$

Представив топологические матрицы в канонической форме и выполнив соответствующие операции, имеем:

$$[1 \ \pi]\begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} = \rho^t + \pi = 0,$$

откуда получаем

$$\rho = -\pi^t; \quad \pi = -\rho^t.$$

Таким образом, для определения топологических матриц достаточно знать одну из них, а другая определяется полученными соотношениями.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Непосредственно из рассмотрения графа см. рис. 102 запишите матрицы сечений и контуров, определяемых фундаментальным деревом, которое выделено жирными линиями.

2. Для матриц, полученных в задаче 1, проверьте соотношения

$$\Pi P^t = 0 \pmod 2 \text{ и } P\Pi^t = 0 \pmod 2.$$

3. Для графа (см. рис. 103):

а) определите ранг и цикломатическое число;

б) запишите матрицу инцидентности;

в) образуйте фундаментальное дерево путем преобразования матрицы инцидентности;

г) запишите матрицы сечений и контуров, определяемых полученным фундаментальным деревом, в канонической форме.

4. Покажите, что все деревья графа (см. рис. 103) соответствуют независимым совокупностям столбцов матрицы инцидентности, полученной в задаче 3.

5. Покажите, что сумма ранга и цикломатического числа графа равна числу его ребер ($\sigma + \nu = q$).

6. Образуйте разрезы графа (рис. 107, *а*), разбивающие множество вершин на подмножества:

а) $V' = \{1, 4\}$; $V'' = \{2, 3, 5, 6\}$;

б) $V' = \{1, 3, 6\}$; $V'' = \{2, 4, 5\}$.

Задачу решите графически и проверьте результат путем суммирования по модулю 2 соответствующих строк матрицы инцидентности.

7. Являются ли разрезы в задаче 6 простыми? Если нет, то разложите их на суммы простых разрезов.

8. Найдите все подмножества разреза (см. рис. 108, *б*), которые также являются разрезами.

9. Измените нумерацию ребер графа (см. рис. 107, *а*) в соответствии с подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и для нового порядка следования ребер:

а) запишите матрицу инцидентности;

б) преобразуйте матрицу инцидентности в матрицу сечений;

в) запишите матрицу контуров, определяемых тем же фундаментальным деревом.

10. Покажите, что при разбиении сокращенной матрицы инцидентности на субматрицы $A_0 = [A_1, A_2]$, где A_1 — неособенная квадратная матрица, имеют место соотношения $\rho = (A_1^{-1} A_2)^t$ для неориентированных графов и $\rho = -(A_1^{-1} A_2)^t$ для орграфов, а также $\pi = A_1^{-1} A_2$.

11. Охарактеризуйте суграфы графа (рис. 107, *а*), заданные следующими векторами:

а) (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0,);

б) (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1);

в) (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0);

г) (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1).

12. Выразите векторы контуров (см. рис. 111, *а*) через векторы ячеек (рис. 111, *б*).

13. Преобразуйте матрицу инцидентности несвязного графа (рис. 113) к матрице сечений и запишите на ее основе матрицу контуров.

14. Укажите на различия между контурами и сечениями неориентированного и ориентированного графов.

15. Для ориентированного графа (рис. 115):

а) запишите матрицу инцидентности;

б) преобразуйте матрицу инцидентности в матрицу сечений;

в) запишите матрицу контуров;

г) изобразите графически сечения и контуры.

16. Запишите матрицы сечений и контуров для ориентированного графа (рис. 116), определяемые фундаментальным деревом, которое выделено жирными линиями.

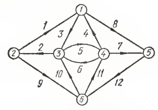


Рис. 115. Ориентированный граф к задаче 15.

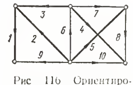


Рис 116 Ориентированный граф к задаче 16.

17. На основе топологических матриц, полученных в задаче 16, изобразите графически сечения и контуры (вспомните, что ребро, пересекаемое четное число раз линией, которая выделяет сечение, не инцидентно данному сечению). Можно ли изобразить граф на плоскости таким образом, чтобы каждая линия, выделяющая сечение, пересекала ребра не более, чем по одному разу (если нет, то почему)?

3. ПОЛЮСНЫЕ ГРАФЫ

1. Физические системы с сосредоточенными компонентами. Графы широко используются как структурные модели физических систем, допускающих идеализированное представление в виде *схем с сосредоточенными компонентами.* Соединение компонентов между собой осуществляется исключительно путем объединения их полюсов, образующих узлы схемы. В зависимости от числа полюсов различают двухполюсные и многополюсные компоненты, которые называют соответственно *двухполюсниками* и *многополюсниками.* Так, схема рис. 117 представляет собой соединение двух трехполюсников (A и B), четырехполюсника (C) и трех двухполюсников (D, E, F).

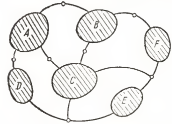


Рис. 117. Схема с многополюсными компонентами.

Наиболее типичными представителями физических систем, допускающих представление схемами с сосредоточенными компонентами, могут служить электрические и электронные цепи. Резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности являются двухполюсниками, а трансформаторы, электронные лампы и транзисторы — многополюсниками. Аналогичные компоненты можно выделить в системах различной физической природы: механических, акустических, гидравлических, тепловых и т. д.

Для математического описания состава и структуры физической системы (точнее, соответствующей ей схемы с сосредоточенными компонентами) обычно используются два типа соотношений:

1) *полюсные уравнения*, характеризующие индивидуальные свойства каждой компоненты безотносительно к возможным соединениям с другими компонентами;

2) *уравнения связей*, отражающие характер соединения различных компонент в схеме безотносительно к их индивидуальным свойствам.

Компонентным уравнением двухполюсника служит функциональная зависимость между двумя физическими величинами, характеризующими его состояние (например, между током и напряжением электрического двухполюсника, силой и скоростью механического двухполюсника и т. п.). Функция, описывающая *нелинейный двухполюсник*, может задаваться аналитическим выражением, графиком или таблицей. Линейный двухполюсник характеризуется *параметром*, который является либо постоянной величиной (*стационарный двухполюсник*), либо функцией времени (*нестационарный двухполюсник*).

Многополюсник описывается системой уравнений, связывающей физические величины на его полюсах. Часто многополюсные компоненты представляются *схемной моделью*, состоящей из двухполюсных компонентов, каждый из которых описывается соответствующей функциональной зависимостью. Но в отличие от обычных двухполюсников, такие зависимости могут содержать величины, связанные с другими компонентами схемной модели. В конечном счете, физическая система с сосредоточенными компонентами всегда может быть представлена схемой, состоящей из двухполюсников.

В роли уравнений связи обычно выступают фундаментальные физические законы, выражающие условия равновесия и непрерывности (законы Кирхгофа для электрических цепей, принцип Даламбера для механических систем и т. п.). В каждом конкретном случае эти уравнения получают из рассмотрения структуры схемы, причем они должны содержать те же величины, что и компонентные уравнения, которыми характеризуются состояния двухполюсников. Тем самым обеспечивается совместимость исходных

уравнений, преобразование которых позволяет получить математическую модель системы в требуемой форме.

2. Полюсные графы. Схема с двухполюсными компонентами, независимо от ее конкретной физической природы, может быть представлена *полюсным графом*. Между схемой, состоящей из двухполюсников, и ее графом имеет место взаимно-однозначное соответствие: узлам схемы соответствуют вершины, а двухполюсникам — ребра графа. Ориентация ребра связывается с направлением отсчета физических величин, характеризующих состояние двухполюсника.

Полюсный граф является универсальной топологической моделью физических систем с сосредоточенными компонентами. Путь к такой модели лежит через идеализацию системы (схема) и ее абстрагирование (полюсный граф). Основная ценность топологических моделей состоит в том, что их свойства и методы использования можно изучать и разрабатывать независимо от физической природы систем. Специфика конкретной области проявляется на начальном этапе при построении графа и на заключительном этапе истолкования полученных результатов.

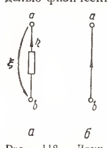


Рис. 118. Двухполюсник (*а*) и его полюсный граф (*б*).

Для любого двухполюсника (рис. 118, *а*) полюсным графом служит дуга с двумя концевыми вершинами (рис. 118, *б*). В общем случае уравнение двухполюсника $\varphi(\eta, \xi) = 0$ содержит две переменные η и ξ. Одна из них, например η, характеризует состояние двухполюсника относительно поперечного сечения и противоположно направлена к каждому из его полюсов. Такие переменные называют *поперечными* (например, электрический ток или магнитный поток, сила или момент, расход жидкости или газа, тепловой поток и т. п.). Другая величина ξ характеризует состояние двухполюсника относительно его полюсов (например, электрическое напряжение, линейная или угловая скорость, перемещение, давление, разность температур и т. п.). Такие переменные называют *продольными* и их направления связывают с направлением пути от одного полюса к другому. Часто поперечные переменные называют *последовательными*, а продольные — *параллельными* переменными.

Если уравнение двухполюсника представимо в явном виде относительно поперечной переменной $\eta = f_y(\xi)$, то соответствующая ему дуга называется *y-дугой*, причем величину η можно рассматривать как реакцию на воздействие ξ. Аналогично, если уравнение двухполюсника представимо в виде $\xi = f_z(\eta)$, то соответствующая ему дуга называется *z-дугой*, причем величину ξ можно рассматривать как реакцию на воздействие η. Двухполюсники, допускающие

описание относительно обоих переменных, называются *взаимоопределенными*, а соответствующие им дуги — *w-дугами*.

Поскольку из двух переменных η и ξ одна характеризует воздействие, а другая реакцию, то их положительные направления считают взаимно противоположными. Обычно направления дуг отождествляют с положительными направлениями отсчетов поперечных переменных, а положительные направления отсчета продольных переменных принимают обратными ориентации дуг.

Полюсный граф системы строится таким образом, чтобы обеспечивались наиболее простые отношения между его структурой и уравнениями связей. Обычно уравнения связей формируются для поперечных и продольных переменных в следующем виде:

1) алгебраическая сумма поперечных переменных для любой вершины графа равна нулю:

$$\sum \eta(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма продольных переменных для любого контура графа равна нулю:

$$\sum \xi(t) = 0.$$

Рис. 119. Уравнения связей для вершины и контура.

При алгебраическом суммировании переменных они считаются положительными при совпадении их направлений с выбранным направлением относительно вершины или контура и отрицательными, если направления переменных противоположны с выбранными направлениями (рис. 119).

В этом параграфе рассматриваются методы построения полюсных графов различных физических систем с двухполюсными компонентами. В дальнейшем эти методы обобщаются на системы с многополюсниками. Для простоты компоненты предполагаются линейными и стационарными.

3. Электрические цепи. Существуют три типа пассивных электрических двухполюсников: сопротивление, емкость и индуктивность. Они рассеивают или накапливают энергию и поэтому называются пассивными компонентами.

Сопротивление (рис. 120, *а*) — это такой компонент, в котором происходит необратимое преобразование электрической энергии в тепло. Зависимость между током (поперечная переменная) и напряжением (продольная переменная) может быть представлена в одной из двух форм (или в любой из них, если двухполюсник взаимоопределенный):

$$i_R(t) = Gu_R(t); \quad u_R(t) = Ri_R(t),$$

где параметры G и R называются соответственно *проводимостью* и *сопротивлением* ($G = R^{-1}$ и $R = G^{-1}$).

Емкость (рис. 120, *б*) — компонент, накапливающий электрическую энергию. Заряд $q(t)$ связан с напряжением $u_C(t)$ на линейной емкости соотношением $q(t) = Cu_C(t)$, где C — параметр, называемый *емкостью*. Ток $i_C(t)$, протекающий через емкость, выражается как производная заряда по времени, следовательно:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt = S\int i_C(t)\,dt,$$

где $S = C^{-1}$ называют *инверсной емкостью*.

Индуктивность (рис. 120, *в*) — компонент, накапливающий магнитную энергию. Магнитный поток $\psi(t)$ линейной индуктивности пропорционален протекающему в ней току $i_L(t)$, т. е. $\psi(t) = Li_L(t)$, где L — параметр, называемый *индуктивностью*. Напряжение $u_L(t)$ на индуктивности равно скорости изменения магнитного потока во времени, следовательно:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt};$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\,dt = \Gamma\int u_L(t)\,dt,$$

Рис. 120. Идеальные электрические двухполюсники:

а — резистор; *б* — конденсатор; *в* — катушка индуктивности; *г* — источник напряжения; *д* — источник тока.

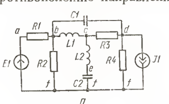
где $\Gamma = L^{-1}$ называют *инверсной индуктивностью*.

Источники энергии в электрических цепях представляются идеальными двухполюсниками двух типов. *Источник напряжения* — это двухполюсник (рис. 120, *г*), напряжение в котором определяется некоторой функцией времени $e(t)$ и не зависит от протекающего по нему тока, т. е. $u_E(t) = e(t)$. *Источник тока* — это двухполюсник (рис. 120, *д*), ток в котором также определяется некоторой функцией времени $j(t)$ и не зависит от приложенного напряжения, т. е. $i_J(t) = j(t)$.

Для построения графа электрической схемы достаточно ее узлы рассматривать как вершины, а каждый двухполюсник заменить ребром, сохраняя отношение инцидентности. Например, граф электрической схемы (рис. 121, *а*) изображен на рис. 121, *б*. Следует иметь в виду, что при изображении электрических схем линии

означают проводники без сопротивления, и узлы, соединенные такими линиями, являются по существу одним узлом (узел f на рис. 121, a). Узлы, с которыми связаны только два двухполюсника, на схемах обычно не отмечаются (рис. 121, a, узел a). На графах же каждая отмеченная точка рассматривается как его вершина и никаких линий, кроме дуг, не должно быть.

Направления дуг пассивных двухполюсников можно выбирать произвольно. Дуги активных двухполюсников ориентируются по направлению источника тока и противоположно направлению источника напряжения (это связано с тем, что направление дуги указывает на положительное направление тока и противоположно положительному направлению напряжения).



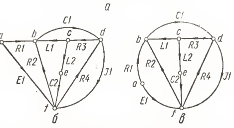


Рис. 121. Электрическая схема (a) и ее изоморфные графы ($б$ и $в$).

Удобный практический прием построения графа для данной схемы состоит в следующем. На схеме выделяется внешний контур и изображается замкнутой линией (например, окружностью), на которой размещаются соответствующие вершины. Затем граф дополняется теми ребрами и вершинами, которые отсутствуют во внешнем контуре. Так, на рис. 121, $в$ показан изоморфный граф, построенный по этому способу.

Уравнения связей выражаются *законами Кирхгофа*, представляющими условие непрерывности для токов и условие равновесия для напряжений в любой момент времени t:

1) алгебраическая сумма токов для любой вершины равна нулю (*первый закон Кирхгофа*), т. е.

$$\Sigma i(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма напряжений в любом контуре равна нулю (*второй закон Кирхгофа*), т. е.

$$\Sigma u(t) = 0.$$

4. Механические поступательные системы. Идеальные пассивные двухполюсники механических систем — это механическое сопротивление, масса и упругость. Перемещение $x(t)$ и скорость $v(t)$ являются продольными переменными, а сила $f(t)$ — поперечной переменной.

Сопротивление (рис. 122, *а*) представляет собой компонент, который отражает превращение механической энергии в тепло. В простейшем случае предполагается, что это превращение происходит в результате вязкого трения, сила которого $f_B(t)$ пропорциональна относительной скорости $v_B(t)$ трущихся тел, т. е.

$$f_B(t) = B\frac{dx_B(t)}{dt} = Bv_B(t); \quad v_B(t) = \frac{1}{B} f_B(t).$$

Здесь B — параметр, называемый *механическим поступательным сопротивлением*, а $1/B$ — *инверсное сопротивление* или *податливость*. Полюсы элемента сопротивления соответствуют твердым телам, между которыми имеет место вязкое трение.

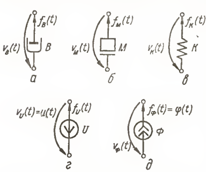


Рис. 122. Идеальные механические (поступательные) двухполюсники:
а — сопротивление; *б* — масса; *в* — упругость; *г* — источник скорости; *д* — источник силы

Масса (рис. 122, *б*) — компонент, накапливающий кинетическую энергию и, следовательно, обладающий механической инерцией. Зависимость между силой инерции $f_M(t)$ и перемещением $x_M(t)$ или скорости $v_M(t)$ массы M относительно выбранной точки отсчета выражается соотношениями:

$$f_M(t) = M\frac{d^2x_M(t)}{dt^2} = M\frac{dv_M(t)}{dt};$$

$$v_M(t) = \frac{1}{M}\int f_M(t)\,dt,$$

где $1/M$ называется *инверсной массой*. Один из полюсов компонента массы связан с движущимся телом, а другой — с неподвижной или равномерно движущейся системой координат (точкой отсчета перемещения и скорости).

Упругость (рис. 122, *в*) — компонент, накапливающий потенциальную энергию. Этот двухполюсник можно представить как пружину, концы которой соответствуют его полюсам. В линейном случае предполагается, что такая пружина не обладает массой и сила $f_k(t)$ реакции пропорциональна относительному перемещению $x_k(t)$ ее концов, т. е.

$$f_k(t) = Kx_k(t) = K\int v_k(t)\,dt; \quad v_k(t) = \frac{1}{K}\cdot\frac{df_k(t)}{dt},$$

где K — параметр, называемый *жесткостью*; $1/K$ — *гибкостью*.

Идеальные источники механической энергии могут быть двух типов. Задающая скорость $u(t)$ какой-либо точки системы представ-

ляется *источником скорости* (рис. 122, *г*), один полюс которого связан с этой точкой, а другой — с той точкой системы, относительно которой эта скорость задается. Скорость такого двухполюсника не зависит от приложенных сил, т. е. $v_U(t) = u(t)$. *Источник силы* изображается двухполюсником (рис. 122, *д*), полюсы которого соответствуют точкам приложения силы и ее реакции, причем сила в этом двухполюснике определяется некоторой функцией времени $\varphi(t)$ и не зависит от скорости, т. е.

$$f_\Phi(t) = \varphi(t).$$

На основе приведенных определений можно построить схему механической поступательной системы. При этом узлы схемы соответствуют соединениям компонент системы, которые могут рассматриваться как единое целое, а соединяющие линии — жестким связям между компонентами. Переход от механической схемы к ее графу осуществляется, как и для электрической схемы, на основе соответствия между инцидентностью идеальных двухполюсников узлам схемы и инцидентностью дуг и вершин графа. Направления дуг для пассивных двухполюсников принимаются в соответ-

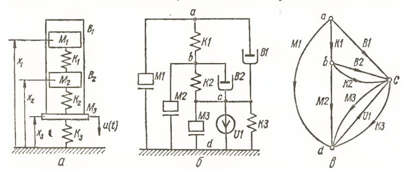


Рис. 123. Механическая поступательная система (*а*), ее схема (*б*) и граф (*в*).

ствии с выбранной системой отсчета (противоположно направлению оси перемещений *x*), а ориентация дуг источников определяется заданными направлениями (для источников силы они совпадают, а для источников скорости — противоположны).

Пусть, например, в системе (рис. 123, *а*), движение которой может совершаться только по вертикали, платформа массой M_3 движется с заданной скоростью $u(t)$. Схема этой системы показана на рис. 123, *б*, а ее граф — на рис. 123, *в*. При достаточном навыке граф можно построить и непосредственно из рассмотрения условного изображения механической поступательной системы без промежуточного вычерчивания ее схемы.

Уравнения связей механической поступательной системы выражают условие равновесия сил и условие непрерывности для скоростей (или перемещений):

1) алгебраическая сумма сил для любой вершины равна нулю (*принцип Даламбера*): $\Sigma f(t) = 0$;

2) алгебраическая сумма скоростей (перемещений) в любом контуре равна нулю: $\Sigma v(t) = 0$.

5. Механические вращательные системы. Соотношения для механических вращательных систем аналогичны соотношениям для поступательных систем. Перемещению $x(t)$ соответствует угол поворота $\varphi(t)$, линейной скорости $v(t)$ — угловая скорость $\omega(t)$, силе $f(t)$ — вращающий момент $\mu(t)$. Соответственно для механических вращательных систем имеем три пассивные компоненты и два идеальных источника, для обозначения которых можно использовать те же символы, что и для поступательных систем.

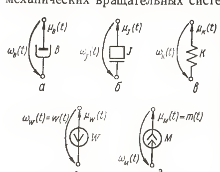


Рис. 124. Идеальные механические (вращательные) двухполюсники:
а—вращательное сопротивление; *б* — вращающаяся масса; *в* — вращательная упругость; *г* — источник угловой скорости; *д* — источник момента.

Вращательное сопротивление (рис. 124, *а*) характеризует рассеивание механической энергии в тепло за счет вязкого трения:

$$\mu_B(t) = B\frac{d\varphi_B(t)}{dt} = B\omega_B(t); \quad \omega_B(t) = \frac{1}{B}\mu_B(t),$$

где B — *крутильное сопротивление;* $1/B$ — *инверсное сопротивление.*

Вращающаяся масса (рис. 124, *б*) — компонент, характеризующий кинетическую энергию вращательного движения:

$$\mu_J(t) = J\frac{d^2\varphi_J(t)}{dt^2} = J\frac{d\omega_J(t)}{dt}; \quad \omega_J(t) = \frac{1}{J}\int \mu_J(t)\,dt,$$

где J — *момент инерции.*

Вращательная упругость (рис. 124, *в*) — компонент, накапливающий потенциальную энергию вращательного движения:

$$\mu_k(t) = K\varphi_k(t) = K\int \omega_k(t)dt; \; \omega_k(t) = \frac{1}{K}\frac{d\mu_k(t)}{dt},$$

где K — *крутильная жесткость;* $1/K$ — *гибкость.*

Идеальный источник может быть *источником угловой скорости* (рис. 124, *г*), характеризующимся задающей угловой скоростью $\omega(t)$, и *источником момента* (рис. 124, *д*), характеризующимся задающим моментом $m(t)$.

Пример построения схемы и графа механической вращательной системы показан на рис. 125. Узлы графа соответствуют вращающимся массам, а направления ребер принимаются в соответствии с выбранным положительным направлением отсчета угла поворота. Параметры J_1 и J_2 означают моменты инерции роторов, B_1 и B_2 — вязкое трение в опорах, а K_1 — жесткость вала.

Уравнения связей механической вращательной системы выражают условие равновесия моментов и условие непрерывности угловых скоростей (или углов поворота):

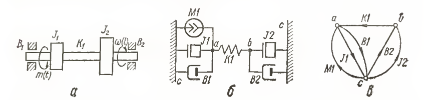


Рис. 125. Механическая вращательная система (*а*), ее схема (*б*) и граф (*в*).

1) алгебраическая сумма моментов для любой вершины равна нулю:

$$\sum \mu (t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма угловых скоростей (углов поворота) в любом контуре равна нулю:

$$\sum \omega (t) = 0.$$

6. Пневматические системы. Движение газа в ограниченной среде характеризуется зависимостью между давлением $p(t)$ и потоком $g(t)$, который выражается как количество молекул, проходящих в единицу времени. Используются три пассивные двухполюсные компоненты, представляющие собой идеализированные свойства пневматических систем: сопротивление, инертность и упругость. При этом поток рассматривается как поперечная величина, а давление (разность давлений) — как продольная величина.

Сопротивление (рис. 126, *а*) — двухполюсник, учитывающий рассеивание энергии за счет вязкого трения. Его уравнение может быть представлено в одной из двух форм:

$$g_R(t) = Gp_R(t); \quad p_R(t) = Rg_R(t),$$

где параметры G и R называются соответственно *пневматическими проводимостью* и *сопротивлением* ($G = R^{-1}$, $R = G^{-1}$). Величина $p_R(t)$ представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке $g_R(t)$. Примерами пневматических компонент с явно выраженным сопротивлением являются трубки с тонкими отверстиями (капилляры), сужающие устройства (сопла), щели и различные препятствия на пути движения газа.

Инертность (рис. 126. *б*) является двухполюсником, который характеризует противодействие изменению потока газа в среде и описывается соотношениями:

$$p_L(t) = L\frac{dg_L(t)}{dt};$$

$$g_L(t) = \frac{1}{L}\int p_L(t)\,dt,$$

Рис. 126. Идеальные пневматические двухполюсники:

а — сопротивление; *б* — инертность; *в* — упругость; *г* — источник давления; *д* — источник потока.

где L — параметр, называемый *пневматической инертностью*. Величина $p_L(t)$ представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке $g_L(t)$. Пневматическая инертность заметно сказывается в трубопроводах при существенных изменениях потока газа во времени.

Упругость (рис. 126, *в*) — двухполюсник, характеризующий свойство идеального газа, заключенного в некотором объеме (камере): изменение концентрации молекул пропорционально изменению давления (предполагается, что процесс изотермический, т. е. происходит при постоянной температуре). Так как изменение концентрации определяется потоком газа, то для этого двухполюсника можно записать соотношения:

$$g_C(t) = C\frac{dp_C(t)}{dt}; \quad p_C(t) = \frac{1}{C}\int g_C(t)\,dt,$$

где C — параметр, называемый *пневматической упругостью*. Величина $p_C(t)$ представляет собой давление газа в объеме относительно давления, которое принимается за нулевое (например, относительно атмосферного давления или вакуума). Поэтому один из полюсов рассматриваемого двухполюсника связан с данным объемом, а второй — со средой, выбранной за начало отсчета давления.

Между пневматическими и электрическими системами существует глубокая аналогия. Поток соответствует току, давление — потенциалу, разность давлений — напряжению, избыточная кон-

центрация молекул (по сравнению с условным уровнем) — заряду. Поэтому и соответствующие параметры пневматических и электрических двухполюсников обозначают обычно теми же буквами (R, L, C). Инертность часто называют *пневматической индуктивностью*, а упругость — *пневматической емкостью*.

Источники энергии в пневматических системах представляются идеальными двухполюсниками двух типов: *источником давления* (рис. 126, *г*) и *источником потока* (рис. 126, *д*), которые определяются соответственно задающими давлением $e(t)$ и потоком $j(t)$, а также положительными направлениями этих величин.

При построении схемы пневматической системы узлы соответствуют объемам газа с различными давлениями, причем один из них соответствует окружающей среде. На рис. 127 показан пример пневматической системы, ее схема и граф.

Рис. 127. Пневматическая система (*а*), ее схема (*б*) и граф (*в*).

Уравнения связей пневматической системы выражают условие непрерывности потоков и условие равновесия разностей давлений:

1) алгебраическая сумма потоков для любой вершины равна нулю: $\Sigma g(t) = 0$;

2) алгебраическая сумма разностей давлений в любом контуре равна нулю: $\Sigma p(t) = 0$.

Приведенные соотношения применимы также к акустическим и гидравлическим системам с тем лишь отличием, что поток $g(t)$ обычно рассматривается как изменение объема в единицу времени (объемный расход). Иногда под этой величиной понимают весовой (массовый) расход.

7. Аналогии. Из рассмотренного выше видно, что для систем различной физической природы имеет место аналогия между их компонентами и переменными, характеризующими состояния системы. Идя по пути обобщения, лучше всего было бы принять некоторую нейтральную терминологию для поперечных и продольных величин, а также для трех типов идеальных двухполюсников. Однако из-за отсутствия единой договоренности в этом вопросе чаще всего в качестве основной принимают терминологию электрических цепей. Отсюда возникли электромеханические, электропневматические, электрогидравлические и другие аналогии (табл. 4).

В первой строке табл. 4 приведены основные соотношения в обозначениях, принятых в теории электрических цепей. Для рас-

Физическая система	Переменн			
	Поперечные		Продоль	
	Ток $i\ (t)$	Заряд $q\ (t)$	Напряжение $u\ (t)$	
	$i\ (t) = \frac{dq\ (t)}{dt}$	$q\ (t) = \int i\ (t)\ dt$	$u\ (t) = \frac{d\ \psi(t)}{dt}$	
Механическая поступательная	Сила	Импульс силы	Скорость	
Механическая вращательная	Вращающий момент	Импульс момента	Угловая скорость	
Пневматическая	Молекулярный поток	Концентрация молекул	Давление (разность давлений)	
Гидравлическая	Объемный поток	Объем жидкости	Давление (разность давлений)	
Тепловая	Теплоотдача (тепловой поток)	Количество тепла	Температура (разность температур)	

сматриваемой системы соответствующие соотношения можно получить, заменив электрические величины и параметры аналогичными величинами и параметрами, которые указаны в остальных строках таблицы.

Приведенная таблица может быть расширена и на другие системы, не рассматривавшиеся выше. Для этого необходимо на основе законов равновесия выяснить, какие величины являются поперечными и какие продольными. Затем, сравнивая компонентные уравнения двухполюсников данной системы с уравнениями электрических двухполюсников, установить аналогии между соответствующими компонентами.

8. Нелинейные и параметрические компоненты. Характер компонентных уравнений не влияет на вид полюсного графа системы, но методы использования этого графа при построении математической модели системы в значительной мере определяются свойствами компонент. Поэтому уместно привести основные соотноше-

Таблица 4

ческих величин

ные ные	Идеальные двухполюсники		
Потокосцепление $\psi(t)$	Сопротивление R	Емкость C	Индуктивность L
$\psi(t) = \int u(t)\,dt$	$i(t) = \frac{1}{R} u(t)$; $u(t) = Ri(t)$	$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$; $u(t) = \frac{1}{C}\int di(t)\,dt$	$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\,dt$; $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
Перемещение	Инверсное сопротивление (демпфер)	Масса (инертность)	Упругость (пружина)
Угол поворота	Инверсное сопротивление	Вращающаяся масса (момент инерции)	Вращательная упругость
Импульс давления	Пневматическое сопротивление	Пневматическая емкость (упругость)	Пневматическая индуктивность (инертность)
Импульс давления	Гидравлическое сопротивление	Гидравлическая емкость (резервуар)	Гидравлическая индуктивность
—	Тепловая проводимость	Теплоемкость	—

ния для нелинейных и параметрических компонент в терминах электрических цепей.

В общем случае зависимость между током и напряжением резистивного компонента выражается функцией $\varphi(i, u) = 0$, которая может быть представлена в одной из двух форм:

$$i = \varphi_G(u); \quad u = \varphi_R(i).$$

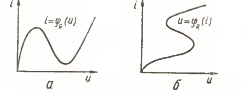
Первое соотношение описывает резистор (проводимость), управляемый напряжением и представляемый y-дугой, а второе — резистор (сопротивление), управляемый потоком и представляемый z-дугой. На рис. 128, *а*, *б*, показаны характеристики двухполюсников, допускающих единственное представление. Если характеристика монотонно возрастающая (рис. 128, *в*), то ее можно выразить однозначной функцией как тока, так и напряжения. Соответствующий двухполюсник является взаимоопределенным и представляется w-дугой.

Нелинейные резистивные компоненты часто используются в *квазилинейном режиме*, при котором токи и напряжения изменяются относительно некоторой точки покоя (i_0, u_0), причем эти изменения настолько малы, что рабочий участок характеристики можно считать линейным. Разлагая функцию $i = \varphi_G(u)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членом с первой производной, можно записать:

$$i = \varphi_G(u_0) + \varphi_G'(u_0)(u - u_0) = i_0 + \varphi_G'(u_0)(u - u_0)$$

или

$$\Delta i = G_д \Delta u; \quad \Delta u = \frac{1}{G_д} \Delta i = R_д \Delta i.$$



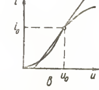


Рис. 128. Характеристики нелинейных резисторов:
а — управляемого напряжением (*а*), током (*б*) и взаимоопределенного (*в*).

Здесь $\Delta i = i - i_0$ и $\Delta u = u - u_0$ — изменения тока и напряжения относительно точки покоя. Величина $G_д$ численно равна производной функции в этой точке и называется *динамической проводимостью*, а обратная ей величина $R_д$ — *динамическим сопротивлением*:

$$G_д = \varphi_G'(u_0) = \left(\frac{di}{du}\right)_{u=u_0}; \quad R_д = \frac{1}{\varphi_G'(u_0)} = \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_0}.$$

Соотношения для параметрического резистора линейны, но его проводимость и сопротивление являются функциями времени, т. е.

$$i_G(t) = G(t)\, u_G(t); \quad u_R(t) = R(t)\, i_R(t).$$

Нелинейный емкостный двухполюсник характеризуется обычно зависимостью заряда от напряжения на этом двухполюснике $q(t) = q(u_C(t))$. Дифференцируя по времени, получаем выражение для тока в виде:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(u_C)}{du_C} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C(u_C)\frac{du_C(t)}{dt},$$

где функция $C(u_C)$ определяет *динамическую емкость*, зависящую от приложенного напряжения u_C. Емкость параметрического (линейного, но не стационарного) двухполюсника является функцией

от времени. Поэтому, дифференцируя соотношение $q(t) = C(t)u_C(t)$, имеем:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt}(C(t)\,u_C(t)) = \frac{dC(t)}{dt}\,u_C(t) + C(t)\frac{du_C(t)}{dt}.$$

Нелинейный индуктивный двухполюсник можно охарактеризовать зависимостью потокосцепления от тока в индуктивности $\psi(t) = \psi(i_L(t))$. Дифференцируя по времени, получаем выражение для напряжения в виде:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\psi(i_L)}{di_L}\cdot\frac{di_L(t)}{dt} = L(i_L)\frac{di_L(t)}{dt},$$

где функция $L(i_L)$ определяет *динамическую индуктивность*, зависящую от протекающего тока i_L. Индуктивность параметрического двухполюсника является функцией от времени. Поэтому дифференцируя соотношение $\psi(t) = L(t)i_L(t)$, имеем:

$$u_L(t) = \frac{d}{dt}(L(t)\,i_L(t)) = \frac{dL(t)}{dt}\,i_L(t) + L(t)\frac{di_L(t)}{dt}.$$

Приведенные соотношения можно рассматривать как аналоги для нелинейных и параметрических двухполюсников любой физической природы, если понимать под входящими в эти соотношения символами величины в соответствии с табл. 4.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие дуги графа на рис. 121, *в* являются *y*-дугами, *z*-дугами и *w*-дугами?

2. К каким типам дуг относятся дуги пассивных двухполюсников (электрических, механических, пневматических) при условии, что их уравнения не должны содержать интегралов?

3. Определите ранг и цикломатическое число графа электрической схемы (рис. 121, *в*) и запишите уравнения по законам Кирхгофа для вершин и контуров, охватывающих ячейки графа.

4. Определите ранг и цикломатическое число графа механической схемы (рис. 123, *в*) и запишите уравнения по принципу Даламбера для вершин и уравнения из условия непрерывности для скоростей по контурам, охватывающим ячейки графа.

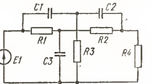


Рис. 129. Двойная Т-схема.

5. Постройте граф двойной *T*-схемы (рис. 129). Является ли полученный граф плоским?

6. При моделировании человеческого тела используется механическая модель, изображенная на рис. 130. Постройте граф этой модели с учетом сил тяжести, приложенных к массам частей тела и силы $f(t)$, действующей на тело в сидячем положении. Определите ранг и цикломатическое число полученного графа.

7. Постройте схему и граф механической системы (рис. 131). Масса M_1 подвешена к пружине, жесткость которой K_1. К массе M_1 присоединен демпфер, состоящий из катаракта, пружины и массы. Шток, на нижний конец которого насажен поршень катаракта, жестко соединен с массой M_1. Камера катаракта, масса которой M_2, опирается на пружину с жесткостью K_2. Противоположный конец этой пружины прикреплен к поршню катаракта. Вязкое трение в катаракте характеризуется сопротивлением B_1. Верхнему концу пружины K_1 сообщается возвратно-поступательное движение, скорость которого задается функцией $u(t)$.

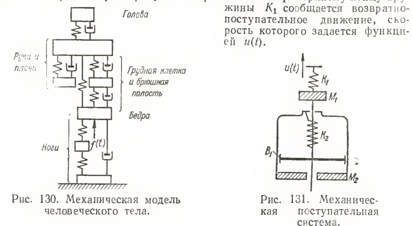


Рис. 130. Механическая модель человеческого тела.

Рис. 131. Механическая поступательная система.

8. На рис. 132 дано упрощенное изображение системы подвески автомобиля. Предполагается, что на каждое из четырех колес действуют одинаковые усилия $\varphi(t)$, и вибрации происходят в вертикальном направлении. Параметры компонент указаны на рисунке. Постройте схему и граф этой системы.

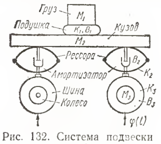


Рис. 132. Система подвески автомобиля.

9. Постройте граф гидравлической системы, изображенной на рис. 133. Три

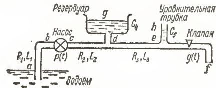


Рис. 133. Гидравлическая система.

участка водопровода характеризуются гидравлическими сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и инертностями (индуктивностями) L_1, L_2, L_3 (влиянием остальных участков пренебрегаем). Резервуар и уравнительная трубка характеризуются соответственно емкостями C_4 и C_5. Насос является источником разности давлений $p(t)$, а клапан регулирует поток жидкости по закону $g(t)$ и может рассматриваться как источник потока. Давление в точках a, f, g, h одинаково и равно атмосферному давлению.

10. Воспользовавшись табл. 4, запишите нелинейные и параметрические соотношения для механических и пневматических двухполюсников и дайте им соответствующие истолкования.

1. Полюсный граф многополюсника. Компонент, имеющий $m+1$ полюсов, посредством которых он может объединяться с другими компонентами, характеризуется m независимыми поперечными переменными $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ и m независимыми продольными переменными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

Действительно, с каждым полюсом связана поперечная переменная (рис. 134, *а*), но поскольку алгебраическая сумма поперечных переменных равна нулю, то одна из них зависима и выражается через остальные m переменных. Каждая продольная переменная связана с парой полюсов и отображается соответствующим ребром. Совокупность ребер независимых переменных должна образовать дерево на множестве $m+1$ полюсов многополюсника (рис. 134, *б*). Любое другое ребро, связывающее пару каких-либо полюсов, образует с совокупностью ветвей дерева контур, и, следовательно, любая другая продольная переменная может быть выражена через некоторую совокупность m независимых продольных переменных.

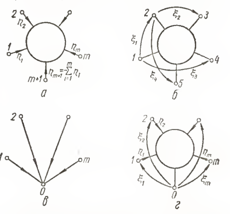


Рис. 134. Представление многополюсника: *а* — поперечные переменные; *б* — продольные переменные; *в* — полюсный граф; *г* — поперечные и продольные переменные, соответствующие полюсному графу.

В качестве стандартного представления совокупности независимых переменных многополюсника удобно принять звездное дерево с центром в некотором полюсе, называемом *базисным* (рис. 134, *в*). Остальные вершины этого дерева соответствуют m полюсам многополюсника (кроме базисного) и нумеруются порядковыми числами от 1 до m, а базисному полюсу обычно присваивается обозначение 0. Ветви дерева ориентируются одинаково относительно базисного полюса; чаще всего они направляются к базисному узлу, что соответствует направлению поперечных переменных внутрь многополюсника и продольных переменных — от базисного полюса к соответствующим полюсам (рис. 134, *г*). Таким образом, с каждым небазисным полюсом связаны продольная и поперечная переменные, которые нумеруются теми же числами, что и соответствующий полюс, и называются *полюсными переменными*.

Звездное дерево с m ветвями, направленными к базисному полюсу (рис. 134, *в*), представляет собой *полюсный граф* компоненты

с $m+1$ полюсами. Каждая ветвь этого графа характеризуется соответствующим уравнением системы m уравнений, связывающих независимые поперечные и продольные переменные многополюсной компоненты.

Если продольные переменные заданы произвольным деревом, то они легко могут быть выражены через полюсные переменные. Так, для продольных переменных пятиполюсника (рис. 134, *б*) при базисном узле *5* имеем:

$$\xi_1 = \xi_2' - \xi_1'; \quad \xi_2 = \xi_3' - \xi_2'; \quad \xi_3 = \xi_4' - \xi_1'; \quad \xi_4 = -\xi_4',$$

где полюсные переменные отмечены штрихами.

2. Уравнения многополюсника. Для описания линейной компоненты с $m+1$ полюсами используются три различные формы n соотношений, называемых *полюсными уравнениями*. Уравнения, записанные относительно поперечных переменных, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= Y_{11}\xi_1 + Y_{12}\xi_2 + \dots + Y_{1m}\xi_m \\ \eta_2 &= Y_{21}\xi_1 + Y_{22}\xi_2 + \dots + Y_{2m}\xi_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_m &= Y_{m1}\xi_1 + Y_{m2}\xi_2 + \dots + Y_{mm}\xi_m \end{aligned}\right\},$$

или в матричной форме

$$\eta_д = Y_д\xi_д,$$

где $\eta_д = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ — вектор поперечных переменных; $\xi_д = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — вектор продольных переменных (оба вектора входят в уравнения как столбцевые матрицы); $Y_д$ — квадратная матрица m-го порядка

$$Y_д = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \dots & Y_{mm} \end{bmatrix}.$$

Уравнения, записанные относительно продольных переменных, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Z_{11}\eta_1 + Z_{12}\eta_2 + \dots + Z_{1m}\eta_m \\ \xi_2 &= Z_{21}\eta_1 + Z_{22}\eta_2 + \dots + Z_{2m}\eta_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_m &= Z_{m1}\eta_1 + Z_{m2}\eta_2 + \dots + Z_{mm}\eta_m \end{aligned}\right\},$$

или в матричной форме

$$\xi_д = Z_д\eta_д,$$

где $Z_д$ — квадратная матрица m-го порядка

$$Z_д = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix}$$

Матрицы $Y_д$ и $Z_д$ однозначно характеризуют многополюсник относительно принятой нумерации полюсов и выделенного базисного полюса и являются его обобщенными параметрами. Они связаны очевидными зависимостями

$$Y_д = Z_д^{-1}; \quad Z_д = Y_д^{-1}.$$

Ясно, что обе матрицы существуют в случае, когда каждая из них неособенная. Если же матрица $Y_д$ (или $Z_д$) особенная, то матрица $Z_д$ (или $Y_д$) не существует.

В смешанной (гибридной) форме часть уравнений выражены относительно продольных переменных, объединенных в вектор $\xi_д'$, а остальная часть — относительно продольных переменных, объединенных в вектор $\eta_д''$, т. е.

$$\begin{bmatrix} \xi_д' \\ \eta_д'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_д' \\ \xi_д'' \end{bmatrix} = H_д \begin{bmatrix} \eta_д' \\ \xi_д'' \end{bmatrix},$$

где *гибридная матрица* $H_д$ записана в блочном виде через субматрицы H_{11}, H_{12}, H_{21} и H_{22}. Решив это уравнение относительно векторов $\eta_д'$ и $\eta_д''$, получим

$$\begin{bmatrix} \eta_д' \\ \eta_д'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1}H_{12} \\ H_{21}H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_д' \\ \xi_д'' \end{bmatrix},$$

что равносильно уравнению $\eta_д = Y_д \xi_д$. Таким образом, получаем соотношение для матрицы $Y_д$ через блоки матрицы $H_д$:

$$Y_д = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1}H_{12} \\ H_{21}H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для матрицы Z находим:

$$Z_д = \begin{bmatrix} H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} & H_{12}H_{22}^{-1} \\ -H_{22}^{-1}H_{21} & H_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Дуга полюсного графа многополюсника описывается тем уравнением, которое представлено относительно связанной с ней поперечной или продольной переменной (в первом случае она относится к y-дугам, а во втором — к z-дугам). В отличие от уравнения дуги

двухполюсной компоненты, правая часть уравнения дуги полюсного графа многополюсника может содержать любые переменные, связанные с дугами этого графа.

Ниже рассматриваются полюсные графы и уравнения наиболее часто встречающихся многополюсных компонент.

3. Электронная лампа. Идеальный электровакуумный триод (рис. 135, *а*) в квазилинейном режиме без сеточных токов при выборе катода в качестве базисного полюса представляется полюсным графом с двумя дугами (рис. 135, *б*), уравнения которых:

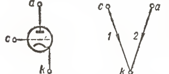


Рис. 135. Электронная лампа (*а*) и ее полюсный граф (*б*).

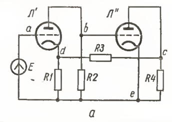
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ i_2 &= Su_1 + G_i u_2 \end{aligned}\right\},$$

где параметры S и G_i называют соответственно *крутизной* и *внутренней проводимостью*.

Дуга *1* полюсного графа отображает двухполюсник с бесконечно большим сопротивлением (разомкнутая дуга) и ее роль сводится к фиксированию напряжения u_2 между сеткой и катодом триода. Уравнение дуги *2* можно представить в виде:

$$u_2 = -\frac{S}{G_i} u_1 + \frac{1}{G_i} i_2 = -\mu u_1 + R_i i,$$

где $\mu = \frac{S}{G_i}$ — *статический коэффициент усиления;* $R_i = \frac{1}{G_i}$ — *внутреннее сопротивление*.



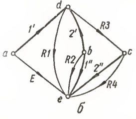


Рис. 136. Схема с электронными лампами (*а*) и ее граф (*б*).

Как видно, Y-матрица идеального электровакуумного триода является особенной (ее первая строка состоит из нулевых элементов)

$$Y_д = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & G_i \end{bmatrix},$$

поэтому $Z_д$-матрица для этого многополюсника не существует.

Граф схемы с электронными лампами (рис. 136, *а*) показан на рис. 136, *б*, где первый триод представлен дугами *1'* и *2'*, а вто-

рой — дугами $1''$ и $2''$, которые выделены жирными линиями. Дуги полюсных графов и источника напряжения имеют строго определенную ориентацию, а дуги пассивных двухполюсников ориентированы произвольно.

4. **Транзистор.** Уравнения низкочастотного транзистора (рис. 137, *а*) в квазилинейном режиме обычно представляются в трех формах:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Рис. 137. Транзистор (*а*) и его полюсные графы при выборе в качестве общего полюса эмиттера (*б*), базы (*в*) и коллектора (*г*).

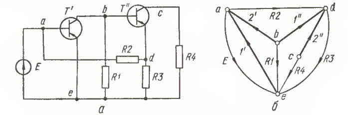


Рис. 138. Транзисторная схема (*а*) и ее граф (*б*).

Им соответствуют три системы параметров, которыми служат матрицы g, r, h этих уравнений. Переход от одной системы параметров к другой осуществляется на основе следующих зависимостей:

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|r|} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & |h| \end{bmatrix};$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|g|} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} |h| & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix};$$

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & |g| \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} |r| & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

где через $|g|$, $|r|$ и $|h|$ обозначены определители соответствующих матриц, т. е. $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ и т. п.

В зависимости от того, какой из трех полюсов транзистора выбран базисным (общим), имеем три типа полюсных графов: с об-

щим эмиттером (рис. 137, *б*), с общей базой (рис. 137, *в*) и с общим коллектором (рис. 137, *г*). Для описания дуг каждого из этих полюсных графов пригодна любая из трех форм уравнений. Разумеется, численные значения параметров для различных полюсных графов отличаются между собой, поэтому параметры отличают индексами (*э*, *б*, *к*) соответственно схеме, в которой они определены.

Вид графа транзисторной схемы зависит от выбора базисных полюсов транзисторов. Так, для схемы (рис. 138, *а*) при общей базе для первого транзистора и общем эмиттере для второго транзистора получаем граф, изображенный на рис. 138, *б* (дуги полюсных графов транзисторов выделены жирными линиями).

5. **Трансформатор.** Простейший трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки (рис. 139, *а*), полюсные уравнения которых в линейном приближении имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}\right\},$$

Рис. 139. Трансформатор (*а*), его полюсный граф (*б*) и идеальный трансформатор (*в*).

где L_1 и L_2 — индуктивности катушек; M — взаимная индуктивность. Величина M входит в эти уравнения со знаком плюс, если токи в катушках одинаково направлены относительно одноименных полюсов, и со знаком минус, если токи относительно одноименных полюсов направлены противоположно (одноименные полюсы обычно отмечаются жирными точками).

Представив каждую катушку ее полюсным графом (дугой), получим полюсный граф трансформатора, который состоит из двух топологически несвязанных дуг (рис. 139, *б*). Полюсные уравнения трансформатора можно представить в операторной форме следующими способами:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL_1 & pM \\ pM & pL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = Y_д \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{p(L_1L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Z_д \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_2} & \dfrac{M}{L_2} \\ -\dfrac{M}{L_2} & \dfrac{1}{pL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H_д \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Квадратные матрицы $Y_д$, $Z_д$ и $H_д$ в этих уравнениях являются обобщенными параметрами трансформатора. Для характеристики

трансформаторов используются также две величины — *коэффициент связи* k и *коэффициент трансформации* n, выражаемые соотношениями:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Из физических соображений следует, что $k^2 < 1$. В предельном (теоретическом) случае при $k = 1$ говорят о *полной связи*, причем уравнения трансформатора преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & \frac{1}{pL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

и представляют собой модель *совершенного трансформатора*. Как видно, в таком трансформаторе отношение напряжений равно коэффициенту трансформации, т. е.

$$u_1 = nu_2; \quad \frac{u_1}{u_2} = n.$$

Аналогичное соотношение для токов имеет место при условии $\frac{1}{pL_2} \to 0$, т. е. $L_2 \to \infty$. Для того, чтобы величина n оставалась конечной, необходимо принять также $L_1 \to \infty$. Тогда $i_2 = -ni_1$, и уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Компонент, описываемый этими уравнениями, называют *идеальным трансформатором*. Его можно понимать как трансформатор с полной связью и бесконечно большими индуктивностями, отношение которых конечно и равно n^2. Условное обозначение идеального трансформатора показано на рис. 139, *в*. Его полюсный граф имеет тот же вид, что и в общем случае (рис. 139, *б*), но уравнения могут быть представлены только в смешанной форме. Поэтому в полюсном графе идеального трансформатора дуга *1* является *z*-дугой, а дуга *2* — *y*-дугой.

В общем случае произвольного числа m индуктивно связанных двухполюсников их уравнения записываются в виде:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \ldots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_m \end{bmatrix},$$

где $Z_{ij} = pL_{ij}$, причем L_{ii} — *собственные индуктивности* и $L_{ij} (i \neq j)$ — *взаимные индуктивности* двухполюсников.

Полюсный граф схемы с двухполюсниками при наличии индуктивных связей между ними строится так же, как и для обычных схем без индуктивных связей, т. е. каждый двухполюсник представляется дугой, и соединения дуг в графе соответствуют соединениям двухполюсников в схеме. Единственное различие состоит в том, что граф схемы с индуктивными связями может быть несвязным.

6. Механические многополюсники. Изложенный метод представления многополюсных компонент применим к системам любой физической природы. Ниже приводятся полюсные уравнения и полюсные графы простейших механических многополюсников.

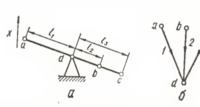


Рис. 140. Рычаг (*а*) и его полюсный граф (*б*).

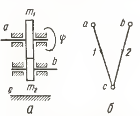


Рис. 141. Зубчатая передача (*а*) и ее полюсный граф (*б*).

Рычаг (рис. 140, *а*) при малых перемещениях представляется полюсным графом (рис. 140, *б*) и описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} f_1 = M\frac{d^2x}{dt^2} + n_{21}f_2 + n_{31}f_3 \\ x_2 = -n_{21}x_1 \\ x_3 = -n_{31}x_1 \end{aligned}\right\},$$

где f_1, f_2, f_3 — силы; x_1, x_2, x_3 — перемещения в точках a, b, c рычага; M — масса, приведенная в точке a; n_{21}, n_{31} — отношения плеч рычага:

$$n_{21} = \frac{l_2}{l_1}; \quad n_{31} = \frac{l_3}{l_1}.$$

Зубчатая передача (рис. 141, *а*) представляется полюсным графом (рис. 141, *б*) и описывается следующими полюсными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \mu = (B_1 + n_{21}^2 B_2)\frac{d\varphi_1}{dt} + (\tau_1 + n_{21}^2\tau_2)\frac{d^2\varphi_1}{dt} + n_{12}\mu_2 \\ \varphi_2 = -n_{12}\varphi_1 \end{aligned}\right\},$$

где μ_1, μ_2 — моменты и φ_1, φ_2 — углы поворота первого и второго валов; B_1, B_2 — крутильные сопротивления и τ_1, τ_2 — моменты

инерции валов; n_{12} — передаточное число, равное отношению количества зубьев шестерен:

$$n_{12} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Натяжной ролик (рис. 142, *а*) преобразует вращательное движение в поступательное, и его полюсный граф состоит из двух

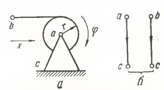


Рис. 142. Натяжной ролик (*а*) и его полюсный граф (*б*).

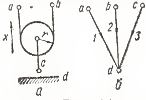
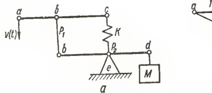


Рис. 143. Блок (*а*) и его полюсный граф (*б*).

отдельных дуг (рис. 142, *б*). Полюсные уравнения натяжного ролика записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 = B\frac{d\varphi_1}{dt} + \tau\frac{d^2\varphi_1}{dt} - rf_2 \\ x_2 = r\varphi_1 \end{aligned}\right\},$$

где B — крутильное сопротивление; τ — момент инерции и r — радиус ролика.



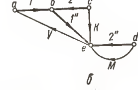


Рис. 144. Механическая система с многополюсными компонентами (*а*) и ее граф (*б*).

Блок (рис. 143, *а*), характеризующийся массой M, моментом инерции τ, радиусом r и сопротивлением трения B, представляется полюсным графом с тремя дугами (рис. 143, *б*) и описывается системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f_1 = \frac{B}{r^2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2}\frac{d^2x_1}{dt^2} + f_2\frac{B}{r^2}\frac{dx_3}{dt} - \left(M + \frac{\tau}{r^2}\right)\frac{d^2x_3}{dt^2} \\ x_2 = -x_1 + 2x_3 \\ f_3 = -\frac{B}{r^2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2}\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2f_2 + M\frac{d^2x_3}{dt^2} \end{aligned}\right\},$$

где f_1, f_2, f_3 — силы, приложенные в точках a, b, c; x_1, x_2, x_3 — перемещения этих точек.

На рис. 144 изображена схема с механическими многополюсниками и ее граф. Рычаг P_1 представлен на графе дугами $1'$ и $2'$, а рычаг P_2 — дугами $1''$ и $2''$ (эти дуги выделены жирными линиями).

7. Дифференциальный редуктор. В качестве примера вращательного механического многополюсника рассмотрим дифференциальный редуктор, называемый обычно *дифференциалом* (рис. 145, a). Его полюсами являются три вала, которые осуществляют связь с другими компонентами. Скорость ω_c пропорциональна разности скоростей ω_a и ω_b, т. е. $\omega_c = n(\omega_a - \omega_b)$. Коэффициент пропорциональности n определяется соотношением между числом зубьев конических зубчатых колес.

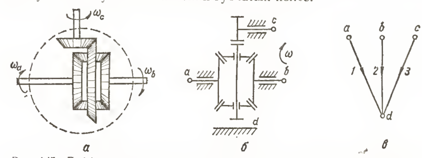


Рис. 145. Дифференциал (a), его кинематическая схема ($б$) и полюсный граф ($в$).

Кинематическая схема дифференциала показана на рис. 145, $б$, а его полюсный граф — на рис. 145, $в$. Для вывода полюсных уравнений воспользуемся соотношениями динамики для трех валов (без учета трения в подшипниках и упругости валов):

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \mu_1 - \mu; \quad J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mu_2 - \mu; \quad J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \mu_3 - \frac{\mu}{n},$$

где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции валов вместе с насаженными на них коническими шестернями (J_3 учитывает также момент инерции непосредственно сцепленной с валом c части дифференциала); μ_1, μ_2, μ_3 — внешние вращающие моменты; μ — эквивалентный момент нагрузки, приложенный к первому валу со стороны дифференциала.

Соотношение для угловых скоростей при выбранном положительном направлении ω (рис. 145, a) имеет вид $\omega_3 = -n(\omega_1 + \omega_2)$. Подставляя значение ω_3 в последнее выражение, находим

$$\mu = n^2 J_3 \left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt}\right) + n\mu_3.$$

Заменив в первых двух соотношениях μ через полученное выражение и присоединив соотношение для угловых скоростей, получим полюсные уравнения дифференциала в виде:

$$\mu_1 = (J_1 + n^2 J_3)\frac{d\omega_1}{dt} + n^2 J_3 \frac{d\omega_2}{dt} + n\mu_3;$$

$$\mu_2 = n^2 J_3 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_2 + n^2 J_3)\frac{d\omega_2}{dt} + n\mu_3;$$

$$\omega_3 = -n\omega_1 - n\omega_2.$$

Им соответствует матричное уравнение в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(J_1 + n^2 J_3) & pn^2 J_3 & n \\ pn^2 J_3 & p(J_2 + n^2 J_3) & n \\ -n & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix},$$

где квадратная матрица третьего порядка является гибридной матрицей дифференциала. Как видно, полюсные уравнения нельзя представить относительно моментов, и, следовательно, матрица $Y_д$ для дифференциала не существует. Они могут быть преобразованы к уравнениям для угловых скоростей, но тогда матрица $Z_д$ будет содержать интегральные операторы.

8. Двигатель постоянного тока. При рассмотрении систем с электромеханическим преобразованием энергии в качестве многополюсных компонент фигурируют электрические машины. Они обычно представляются несвязными полюсными графами, а их полюсные уравнения выражают зависимости между электрическими и механическими величинами.

Рис. 146. Двигатель постоянного тока (*а*) и его полюсный граф (*б*).

Одним из наиболее простых примеров электрических машин является *двигатель постоянного тока* (рис. 146, *а*). Он представляется полюсным графом (рис. 146, *б*), дуги которого соответствуют обмотке возбуждения, электрическому входу и механическому выходу. Полюсные уравнения двигателя имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 &= G\omega_3 i_1 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ \mu_3 &= -G i_1 i_2 + B\omega_3 + J\frac{d\omega_3}{dt} \end{aligned}\right\},$$

где R_1, L_1 — сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения; R_2, L_2 — сопротивление и индуктивность цепи якоря; G — коэффициент, зависящий от параметров машины. Два из этих уравнений нелинейны, так как в них входят произведения переменных.

В частном случае, при постоянном напряжении возбуждения (u_1 = const) и отсутствии реакции якоря, ток возбуждения также постоянен ($i_1 = i_0$). Уравнения становятся линейными и в матричной форме принимают вид:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 + pL_2 & Gi_0 \\ -Gi_0 & B + pJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Соответственно двигатель представляется четырехполюсником, и его полюсный граф содержит только дуги *2* и *3*.

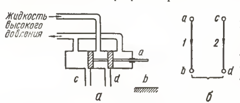


Рис. 147. Управляющий золотник (*а*) и его полюсный граф (*б*).

9. Гидромеханические многополюсники. В технике широко используются различные гидромеханические системы в качестве исполнительных механизмов, усилителей, гидроприводов и т. п. Их можно также рассматривать как соединение многополюсных компонент. Приведем некоторые примеры гидромеханических многополюсников.

Управляющий золотник (рис. 147, *а*) представляет собой многополюсник с механическим входом, характеризующимся силой f_1 и перемещением x_1, и гидравлическим выходом, характеризующимся разностью давления p_2 и объемным потоком жидкости g_2. Полюсный граф (рис. 147, *б*) состоит из двух дуг, первая из которых отображает механический вход, а вторая — гидравлический выход. Полюсные уравнения управляющего золотника имеют вид:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + B_1 \frac{d}{dt} + M_1 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

где B_1 и M_1 — соответственно вязкое сопротивление и масса золотникового поршня; R_2 — гидравлическое сопротивление; k_1 и k_{21} — коэффициенты, определяемые из эксперимента.

Силовой цилиндр (рис. 148, *а*) служит для преобразования гидравлического давления в механическую силу. Дуги полюсного графа (рис. 148, *б*) соответствуют гидравлическому входу (объемный поток g_1 и давление p_1) и механическому выходу (сила f_2 и переме-

щение x_2 поршня). Полюсные уравнения силового цилиндра можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S\frac{d}{dt} \\ -S & B_2\frac{d}{dt} + M_2\frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где S — площадь поршня; B_2 и M_2 — соответственно вязкое сопротивление и масса поршня.

Управляющий золотник и силовой цилиндр образует совместно *гидравлический исполнительный механизм* (рис. 149, *а*), позволяющий при небольших управляющих усилиях и перемещениях на входе золотника получать значительные силы и перемещения на выходе силового цилиндра. Необходимая для этого энергия поступает от внешнего источника давления гидравлической системы. Граф гидравлического исполнительного механизма (рис. 149, *б*) получается объединением полюсных графов его компонентов (дуги управляющего золотника отмечены штрихом, а дуги силового цилиндра — двумя штрихами).

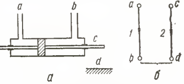


Рис. 148. Силовой цилиндр (*а*) и его полюсный граф (*б*).

Гидравлический исполнительный механизм также можно рассматривать как многополюсный компонент с механическим входом (f_1, x_1) и выходом (f_2, x_2) и представить соответствующим полюсным графом (рис. 149, *в*). Исключая из уравнений золотника и силового

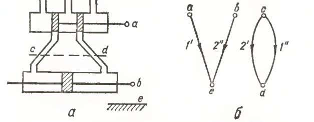




Рис. 149. Гидравлический исполнительный механизм (*а*) и его графы (*б*, *в*).

цилиндра переменные $g_1 = g_2$ и $p_1 = p_2$, получаем полюсные уравнения, соответствующие этому графу:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + B_1\frac{d}{dt} + M_1\frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21}R_2S & (-R_2S^2 + B_2)\frac{d}{dt} + M_2\frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

В *гидроусилителе* (рис. 150, *а*) гидравлический механизм используется совместно с рычагом в качестве обратной связи между входом и выходом, которая обеспечивает автоматическое закрывание золотника, когда силовой поршень занимает требуемое положение. В полюсном графе гидроусилителя (рис. 150, *б*) дуги $1'$ и $2'$ изображают гидравлический механизм, дуги $1''$ и $2''$ — рычаг, а дуги 1 и 2 — соответственно входное и выходное усилия.

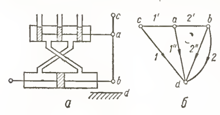


Рис. 150. Гидроусилитель (*а*) и его полюсный граф (*б*).

10. Схемные модели многополюсных компонентов. Один из распространенных методов представления многополюсных компонентов основан на использовании их схемных моделей, состоящих из двухполюсников и называемых часто *схемами замещения* или *эквивалентными схемами*. Вид схемной модели компонента зависит от режима его работы, требуемой точности описания его свойств и поставленной задачи.

В качестве примера на рис. 151 показаны две схемные модели транзистора. Одна из них (рис. 151, *б*) является *высокочастотной моделью* в квазилинейном режиме (при слабых сигналах). Она содержит линейные резистивные и емкостные двухполюсники и источник, ток которого $j = gu$ линейно зависит от напряжения u между узлами b и $э$. *Модель Эберса—Молла* (рис. 151, *в*) представляет транзистор в режиме больших сигналов и содержит нелинейные емкости ($C_{кб}$, $C_{эб}$, $C_{кд}$, $C_{эд}$) и резисторы ($Д_к$, $Д_э$), а также источники, токи которых выражаются через токи $i'_к$ и $i'_э$ посредством коэффициентов α_N и α_I.

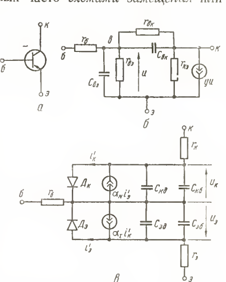


Рис. 151. Схемные модели транзистора (*а*), высокочастотная модель в квазилинейном режиме (*б*) и нелинейная модель Эберса—Молла (*в*).

Характерной особенностью схемных моделей многополюсных компонентов является наличие в них *зависимых источников*, токи или

напряжения которых могут зависеть от токов или напряжений в любой части схемы. На рис. 152 показаны четыре основные типа зависимых источников: источники тока, управляемые током (рис. 152, *а*) или напряжением (рис. 152, *б*), и источники напряжения, управляемые током (рис. 152, *в*) или напряжением (рис. 152, *г*). Величины α, g, r, μ, являющиеся коэффициентами пропорциональности в уравнениях зависимых источников, называют *управляющими параметрами*.

Рис 152. Типы зависимых источников (*а*, *б*, *в*, *г*) и их полюсный граф (*д*).

Полюсный граф зависимого источника, в отличие от обычного двухполюсника, состоит из двух дуг (рис. 152, *д*). Первая из них отображает величину (ток или напряжение), которая управляет зависимым источником и называется *управляющей дугой*. Вторая представляет собственно источник и называется *управляемой дугой*. Чаще всего управляющие величины связаны с некоторыми двухполюсниками схемы (например, величину u на рис. 151, *б* можно рассматривать как напряжение на двухполюсниках $C_{вэ}$ или $r_{вэ}$, а управляющие токи $i'_к$ и $i'_э$ на рис. 151, *в* — как токи двухполюсников $Д_к$ и $Д_э$). В таких случаях роль управляющей дуги играет дуга того двухполюсника, ток или напряжение которого управляет зависимым источником.

Рис. 153. Условные обозначения короткозамкнутой (*а*) и разомкнутой (*б*) дуг.

В общем случае управляющие величины фиксируются в полюсном графе короткозамкнутыми (для тока) и разомкнутыми (для напряжения) дугами. Аналогичные дуги можно вводить в полюсный граф для фиксации любых токов и напряжений, непосредственно не связанных с компонентами, но представляющих интерес при анализе системы (например, входные и выходные величины, напряжение между любой парой узлов, ток в любом проводнике и вообще любая искомая величина). Если требуется выделить фиксирующие дуги, то для них используются специальные обозначения (рис. 153), причем направление дуги всегда совпадает с направлением тока (поперечной величины).

Короткозамкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается уравнением $u = 0$ и поэтому всегда является z-дугой. Разомкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается

уравнением $i = 0$ и относится к y-дугам. Управляемые дуги зависимых источников тока в соответствии с их уравнениями $i_2 = \alpha i_1$ или $i_2 = gu_1$ являются y-дугами, а управляемые дуги зависимых источников напряжения в соответствии с уравнениями $u_2 = ri_1$ или $u_2 = \mu u_1$ являются z-дугами.

Представление многополюсных компонентов схемными моделями применимо не только к электронным, но и к другим системам, а изложенные здесь положения распространяются на них по аналогии.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразить продольные переменные пятиполюсника (см. рис. 134, *б*) через полюсные переменные при условии, что в качестве базисного узла выбран узел *3*.

2. Изменится ли полюсный граф многополюсника при изменении: а) формы уравнений многополюсника; б) базисного полюса?

3. Какие дуги полюсного графа системы с многополюсными компонентами имеют: а) фиксированные направления; б) произвольные направления?

4. К какому типу (y, z, w) относятся дуги полюсного графа электровакуумного триода?

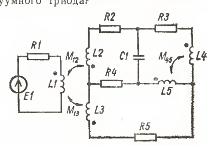


Рис. 154. Схема с индуктивными связями.

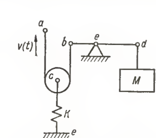


Рис 155. Механическая система с многополюсными компонентами.

5. К какому типу относятся дуги полюсного графа транзистора при условии, что он описывается: а) r-параметрами; б) g-параметрами; в) h-параметрами?

6. Значения h-параметров транзистора в схеме с общей базой следующие: $h_{11б} = 62$ Ом $h_{12б} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Ом; $h_{21б} = -0{,}97$Ом; $h_{22б} = 10^{-6}$ Ом. Определите g-параметры и r-параметры в схеме с общей базой, воспользовавшись зависимостями, приведенными в (4.4).

7. Покажите, что r-параметры транзистора в схемах с общим эмиттером и общим коллектором выражаются через r-параметры в схеме с общей базой зависимостями:

$$r_э = \begin{bmatrix} r_{11б} & r_{11б} - r_{12б} \\ r_{11б} - r_{21б} & r_{11б} - r_{12б} - r_{21б} + r_{22б} \end{bmatrix};$$

$$r_к = \begin{bmatrix} r_{22б} & r_{22б} - r_{21б} \\ r_{22б} - r_{21б} & r_{11б} - r_{12б} - r_{21б} + r_{22б} \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись этими зависимостями, определите численные значения r-параметров в схемах с общим эмиттером и общим коллектором по значениям r-параметров в схеме с общей базой, полученным в задаче 6.

8. Постройте графы транзисторной схемы (см. рис. 138, *а*) при следующих вариантах выбора базисных полюсов транзисторов:

а) T_1 с общим коллектором и T_2 с общей базой;

б) T_1 с общей базой и T_2 с общим коллектором;

в) T_1 и T_2 с общим эмиттером.

9. Постройте граф схемы с индуктивными связями (рис. 154) и запишите уравнения индуктивно связанных двухполюсников.

10. Постройте граф механической системы (рис. 155), использовав полюсные графы рычага и блока.

Рис. 156. Гидравлическая система.

11. Постройте граф гидравлической системы (рис. 156) при условии, что насос создает постоянное давление в заданных потоках g_1, g_2, g_3.

12. Постройте графы схемных моделей транзистора (см. рис. 151, *б*, *в*) и укажите, какие из дуг имеют фиксированные направления.

13. В графы, построенные в задаче 12, введите разомкнутые и короткозамкнутые управляющие дуги. Сформулируйте правило выбора направлений управляющих дуг.

5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1. Математические модели физических систем. При построении математической модели физической системы исходные данные должны содержать сведения о структуре системы и свойствах входящих в нее компонентов. Полюсный граф совместно с уравнениями связей позволяет получить зависимости между переменными, которые связаны с выбранной надлежащим образом совокупностью независимых сечений и контуров. Эти зависимости отражают структурные свойства системы и называются *топологическими уравнениями*, причем сечения и контуры играют роль *системы координат*, в которой представляется математическая модель. Совокупность полюсных уравнений, связывающих переменные отдельных компонентов, составляет *компонентные уравнения*.

Топологические и компонентные уравнения дают полное описание системы и путем их преобразования можно получить математические модели различных типов. Естественно стремление к таким моделям, которые содержат возможно меньшее число переменных, наиболее удобны по форме и требуют минимальных усилий при их построении.

Часто имеется возможность сформировать математическую модель в *однородной системе координат*, в качестве которых высту-

пают сечения или контуры. Соответственно получаем *уравнения сечений и уравнения контуров.* Однако в общем случае приходится прибегать к *неоднородным системам координат*, когда переменные связаны как с контурами, так и с сечениями. Система координат называется *сокращенной*, если используется только часть сечений и контуров полюсного графа.

В результате целенаправленного преобразования топологических и компонентных уравнений получаем систему уравнений, которую можно представить в матричной форме следующим образом:



$$WX = QF.$$

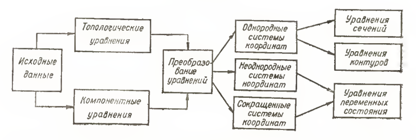


Рис. 157. Преобразование исходных данных к математическим моделям системы.

Квадратная матрица W и матрица Q, элементы которых выражаются через параметры компонентов и интегродифференциальные операторы, полностью определяют систему уравнений относительно *вектора переменных* X. Вектор F содержит в качестве своих компонент заданные функции, характеризующие независимые источники.

Решение уравнения $WX = QF$ относительно вектора X позволяет получить совокупность независимых переменных, через которые определяются и любые другие переменные, характеризующие состояние системы. Часто возникает задача представления модели физической системы относительно ее *сторон* — входов и выходов. Тогда уравнение $WX = QF$ преобразуется к такому виду, чтобы оно содержало только входные и выходные переменные, а остальные переменные были исключены.

Если требуется получить математическую модель в дифференциальной форме, то необходимо обеспечить такую процедуру ее формирования, чтобы матрица W не содержала интегральных операторов. Обычно эта цель достигается в неоднородных системах координат или принимаются какие-либо специальные методы преобразования полюсных графов и полюсных уравнений компонентов системы. Уравнение $WX = QF$ в дифференциальной форме

может быть преобразовано в *уравнение переменных состояния* (3.8. 2), которое для линейной системы имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv,$$

где x — вектор переменных состояния и v — задающий вектор, связанные между собой матрицами A и B.

Общая процедура преобразования исходных данных к математическим моделям системы показана на рис. 157.

2. Топологические уравнения. Уравнения связей (3.2) для вершин (p, q)-графа можно записать в матричной форме

$$A_0 \eta_д = 0,$$

где A_0 — сокращенная матрица инцидентности (2.2); $\eta_д = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ — вектор поперечных величин дуг графа.

Действительно, строка матрицы A_0, соответствующая некоторой вершине, содержит элементы ± 1 в столбцах инцидентных этой вершине дуг, а знак учитывает направление дуги относительно вершины. Произведение строки на вектор $\eta_д$ дает соответствующее уравнение связи, причем написанное выше уравнение представляет $p - 1$ таких уравнений, и все они независимы. Ясно, что замена матрицы A_0 матрицей сечений Π не нарушает равенства. Поэтому уравнения связей для независимых сечений в матричной форме имеют вид:

$$\Pi \eta_д = 0.$$

Аналогично уравнение связей для $q - p + 1$ независимых контуров получим как произведение матрицы контуров P на вектор продольных переменных дуг $\xi_д = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$, т. е.

$$\mathrm{P} \xi_д = 0.$$

Уравнения связей для поперечных и продольных переменных относительно сечений и контуров образуют совокупность *топологических уравнений*. Если дуги графа упорядочены так, что сначала следуют ветви фундаментального дерева, а за ними хорды, то в системе сечений и контуров, определяемых этим деревом, топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$[1 \;\; \pi] \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = 0; \quad [\rho \;\; 1] \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = 0,$$

где переменные ветвей дерева отмечены индексом T, а переменные хорд — индексом N. Выполнив умножение блочных матриц и векторов, получим

$$\eta_T + \pi \eta_N = 0; \quad \rho \xi_T + \xi_N = 0,$$

откуда на основании (2.10)

$$\eta_T = -\pi\eta_N = \rho^t\eta_N; \quad \xi_N = -\rho\xi_T = \pi^t\xi_T.$$

Полученные соотношения показывают, что поперечные величины дерева выражаются через поперечные величины дополнения, а продольные величины дополнения — через продольные величины дерева. Таким образом, из $2q$ переменных топологически независимыми являются только $p - 1$ поперечных и $q - p + 1$ продольных переменных, т. е. всего q величин. Остальные q переменных легко определяются с помощью матрицы π или ρ. Из выражений

$$\eta_д = \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} \eta_N;$$

$$\xi_д = \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi^t \end{bmatrix} \xi_T$$

следуют важные формулы:

$$\eta_д = \mathrm{P}^t\eta_N; \ \xi_д = \Pi^t\xi_T.$$

Рис. 158. Граф транзисторной схемы с разомкнутой дугой Q, фиксирующей искомое напряжение.

Рассмотрим в качестве примера граф транзисторной схемы (см. рис. 138, *б*), в который введена дополнительная разомкнутая дуга Q для фиксации напряжения между вершинами b и c (рис. 158). Системы независимых сечений и контуров определяются выбранным фундаментальным деревом (ветви выделены жирными линиями). При этом

$$\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E & 2' & R2 & R3 & R4 & Q \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1' \\ R1 \\ 1'' \\ 2'' \end{array} \end{array};$$

$$\rho = -\pi^t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & R1 & 1'' & 2'' \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} E \\ 2' \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ Q \end{array} \end{array}.$$

Топологические уравнения в выбранной системе координат имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1' \\ i_{R1} \\ i_1'' \\ i_2'' \\ i_E \\ i_2' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \\ i_Q \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_{R1} \\ u_1'' \\ u_2'' \\ u_E \\ u_2' \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \\ u_Q \end{bmatrix} = 0.$$

Зависимости между переменными выражаются соотношениями:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_{R1} \\ i_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ i_2' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \\ i_Q \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_E \\ u_2' \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_{R1} \\ u_1'' \\ u_2'' \end{bmatrix}.$$

3. **Компонентные уравнения.** В зависимости от того, какая переменная (поперечная или продольная) дуги выражается ее полюсным уравнением через другие переменные, множество дуг полюсных графов компонентов разбивается на y-дуги и z-дуги (3. 2). Соответственно разбиваются и векторы поперечных и продольных переменных: $\eta_X = (\eta_Y, \eta_Z)$ и $\xi_X = (\xi_Y, \xi_Z)$. Следует обратить внимание на то, что в отличие от векторов $\eta_д$ и $\xi_д$ векторы η_X и ξ_X содержат переменные, связанные не со всеми дугами графа, а только с дугами полюсных графов компонентов.

В общем случае следует считать, что поперечные переменные y-дуг и продольные переменные z-дуг могут выражаться через любую совокупность переменных. Поэтому компонентные уравнения в матричной форме имеют следующий вид:

$$\eta_Y = Y_д\xi_Y + N_д\eta_Z + N'_д\eta_Y + Y'_д\xi_Z;$$
$$\xi_Z = M_д\xi_Z + Z_д\eta_Z + Z'_д\eta_Y + M'_д\xi_Z.$$

Входящие в эти уравнения матрицы определяются на основании полюсных уравнений компонентов рассматриваемой системы. Компонентные уравнения можно представить и в неявной форме

$$[V_\xi, \ V_\eta]\begin{bmatrix}\xi_X \\ \eta_X\end{bmatrix} = 0,$$

где $V = [V_\xi, \ V_\eta]$ — матрица размера $q_X \times 2q_X$, если под q_X понимать число дуг полюсных графов компонентов.

Независимые источники, характеризуемые заданными поперечными $\vartheta(t)$ и продольными $\varepsilon(t)$ величинами, относятся соответственно к j-дугам и e-дугам и представляются уравнениями:

$$\eta_J = \vartheta(t); \quad \xi_E = \varepsilon(t).$$

Разомкнутые дуги описываются уравнением $\eta = 0$. Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями поперечных величин, либо как резистивные y-дуги с нулевой проводимостью. Короткозамкнутые дуги описываются уравнением $\xi = 0$. Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями продольных величин, либо как резистивные z-дуги с нулевым сопротивлением.

Запишем, например, компонентные уравнения дуг графа рис. 158. Пусть резистивные двухполюсники представлены их сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и R_4, уравнения транзистора $T1$ выражены через g-параметры (дуги $1'$ и $2'$), а уравнения транзистора $T2$ — через h-параметры (дуги $1''$ и $2''$), т. е.

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1'' \\ u_2'' \end{bmatrix}.$$

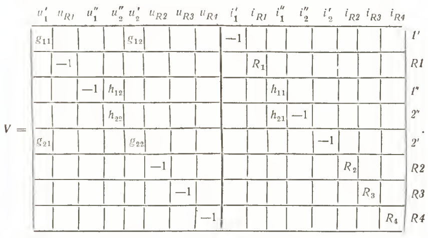
На основе этих соотношений имеем:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2'' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} \\ 0 & h_{22} & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1} \\ i_1'' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_1'' \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1} \\ i_1'' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \end{bmatrix}.$$

Как видно, в рассматриваемом примере матрицы $N_д'$, $Y_д'$, $Z_д'$, $M_д'$ оказались нулевыми.

В неявной форме компонентные уравнения представляются матрицей:



$V =$

u_1'	u_{R1}	u_1''	u_2''	u_2'	u_{R2}	u_{R3}	u_{R4}	i_1'	i_{R1}	i_1''	i_2''	i_2'	i_{R2}	i_{R3}	i_{R4}	
g_{11}				g_{12}				-1								$1'$
	-1								R_1							$R1$
		-1	h_{12}							h_{11}						$1''$
			h_{22}							h_{21}	-1					$2''$
g_{21}				g_{22}								-1				$2'$
					-1								R_2			$R2$
						-1								R_3		$R3$
							-1								R_4	$R4$

Дуга E независимого источника напряжения описывается уравнением $u_E = e(t)$, а разомкнутая дуга Q, фиксирующая напряжение между вершинами b и c,— уравнением $i_Q = 0$.

4. Уравнения сечений. Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как y-дуги, поперечные переменные которых выражаются через продольные переменные,то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\eta_Y = Y_д \xi_Y.$$

Представим матрицу сечений как $\Pi = [\Pi_Y, \Pi_J]$, где субматрицы Π_Y и Π_J соответствуют столбцам y-дуг и задающих источников поперечных величин, т. е. j-дуг (предполагается, что задающие источники продольных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[\Pi_Y, \ \Pi_J]\begin{bmatrix}\eta_Y \\ \eta_J\end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем $\Pi_Y\eta_Y = -\Pi_J\eta_J$ или $\Pi_Y Y_д \xi_Y = -\Pi_J\vartheta$. Подставив $\xi_Y = \Pi_Y^t \xi_T$, приходим к *уравнениям сечений* в матричной форме

$$(\Pi_Y Y_д \Pi_Y^t)\,\xi_T = -\Pi_J\vartheta.$$

или

$$Y\xi_T = J.$$

Здесь $Y = \Pi_Y Y_д \Pi_Y^t$ и $J = -\Pi_J\vartheta$ — матрично-векторные параметры математической модели в однородной системе координат (сечений). Определив из этого уравнения вектор продольных переменных дерева ξ_T, остальные переменные можно найти по формулам $\xi_N = \pi^t \xi_T$ и $\eta_Y = Y_д\xi_Y$. Так как число независимых сечений графа $\nu = p - k$, то матричное уравнение сечений соответствует ν скалярным уравнениям.

Входящие в выражения для Y и J матрицы обычно сильно разреженные, поэтому вместо умножения матриц можно воспользоваться правилами непосредственной записи матрично-векторных параметров на основе графа системы и полюсных уравнений.

Для вектора J такое правило очень простое и непосредственно следует из выражения $J = -\Pi_J\vartheta$. Ясно, что k-я компонента вектора J равна со знаком минус произведению k-й строки матрицы Π_J на вектор ϑ, т. е. $j_k = -\Pi_{J(k)}\vartheta$. А это значит, что она может быть записана как алгебраическая сумма задающих поперечных величин тех источников, дуги которых инцидентны k-му сечению, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если дуга направлена противоположно сечению, и со знаком минус, если направления дуги и сечения совпадают.

Правило записи матрицы Y получим, представив входящую в ее выражение матрицу Π_Y через векторы-столбцы, т. е.

$$Y = [\Pi_Y^{(1)}, \ \Pi_Y^{(2)}, \ \ldots, \ \Pi_Y^{(m)}]\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} & \ldots & y_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_Y^{(1)t} \\ \Pi_Y^{(2)t} \\ \ldots \\ \Pi_Y^{(m)t}\end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \Pi_Y^{(i)} y_{ij} \Pi_Y^{(j)t} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(j)t} \right) y_{ij},$$

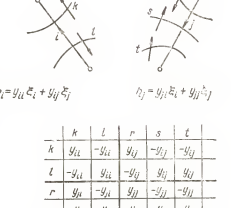
где $m = q_y$ означает число y-дуг.

Произведение i-го столбца $\Pi_Y^{(i)}$ матрицы Π_Y на транспонированный j-й столбец (т. е. строку) $\Pi_Y^{(j)t}$ равно квадратной матрице ϑ-го порядка:

$$\Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(j)t} = \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i} \\ \Pi_{Y2i} \\ \cdots \\ \Pi_{Y\nu i} \end{bmatrix} [\Pi_{Y1j},\ \Pi_{Y2j},\ \ldots,\ \Pi_{Y\nu j}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i}\Pi_{Y1j} & \Pi_{Y1i}\Pi_{Y2j} & \ldots & \Pi_{Y1i}\Pi_{Y\nu j} \\ \Pi_{Y2i}\Pi_{Y1j} & \Pi_{Y2i}\Pi_{Y2j} & \ldots & \Pi_{Y2i}\Pi_{Y\nu j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Pi_{Y\nu i}\Pi_{Y1j} & \Pi_{Y\nu i}\Pi_{Y2j} & \ldots & \Pi_{Y\nu i}\Pi_{Y\nu j} \end{bmatrix}.$$

Сумма таких матриц, умноженных на соответствующие скаляры y_{ij} (параметры компонентов), и дает в результате матрицу системы Y. Очевидно, y_{ij} появится в тех клетках матрицы Y, которым соответствуют ненулевые значения приведенной выше матрицы. Собственный параметр y_{ii} i-й дуги записывается на пересечении строк и столбцов матрицы Y, которые соответствуют инцидентным этой дуге сечениям (со знаком плюс, если относительно данной дуги направления рассматриваемых сечений совпадают, и со знаком минус, если эти направления противоположны). Взаимный (управляющий) параметр y_{ij} дуг с номерами i и j записывается в матрицу Y на пересечении строк, соответствующих тем сечениям, которые инцидентны i-й дуге, и столбцов, соответствующих тем сечениям, которые инцидентны j-й дуге. При этом знак, с которым вписывается y_{ij}, зависит от того, как направлены дуги относительно



	k	l	r	s	t	
k	y_{ii}	$-y_{ii}$	y_{ij}	$-y_{ij}$	$-y_{ij}$	
l	$-y_{ii}$	y_{ii}	$-y_{ij}$	y_{ij}	y_{ij}	
r	y_{ji}	$-y_{ji}$	y_{jj}	$-y_{jj}$	$-y_{jj}$	
s	$-y_{ji}$	y_{ji}	$-y_{jj}$	y_{jj}	y_{jj}	
t	$-y_{ji}$	y_{ji}	$-y_{jj}$	y_{jj}	y_{jj}	

Рис. 159. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу Y.

рассматриваемых сечений. Если эти направления одинаковы, т. е. одновременно совпадают или противоположны, то y_{ij} вписывается в соответствующую клетку матрицы Y со знаком плюс. Если же эти направления различные, т. е. направление одной дуги совпадает с направлением рассматриваемого инцидентного ей сечения, а направление другой противоположно с рассматриваемым инцидентным ей сечением, то y_{ij} вписывается со знаком минус. Приведенное правило иллюстрируется на рис. 159.

5. Уравнения контуров. Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как z-дуги, продольные переменные которых выражаются через поперечные переменные, то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\xi_Z = Z_д \eta_Z.$$

Представим матрицу контуров как $P = [P_Z, P_E]$, где субматрицы P_Z и P_E содержат соответственно столбцы z-дуг и задающих источников продольных величин, т. е. e-дуг (предполагается, что задающие источники поперечных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[P_Z, \ P_E] \begin{bmatrix} \xi_Z \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем $P_Z \xi_Z = -P_E \xi_E$ или $P_Z Z_д \eta_Z = P_E \varepsilon$. Подставив $\eta_Z = P_Z^t \eta_N$, приходим к *уравнениям контуров* в матричной форме

$$\left(P_Z Z_д P_Z^t\right) \eta_N = -P_E \varepsilon,$$

или

$$Z \eta_N = E.$$

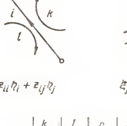
Здесь $Z = P_Z Z_д P_Z^t$ и $E = -P_E \varepsilon$ — матрично-векторные параметры математической модели в однородной системе координат (контуров). Определив из этого уравнения вектор поперечных переменных дополнения η_N, остальные переменные можно найти по формулам $\eta_T = \rho^t \eta_N$ и $\xi_Z = Z_д \eta_Z$. Так как число независимых контуров графа равно $\sigma = q - p + k$, то матричное уравнение контуров соответствует σ скалярным уравнениям.

Легко заметить дуальность математических моделей в однородных системах координат (сечений или контуров). Все соотношения для одной из них можно получить из другой простой заменой дуальных терминов и величин:

Сечение $\leftrightarrow$ контур
y-дуга $\leftrightarrow$ z-дуга

j-дуга ↔ e-дуга
Поперечная переменная ↔ продольная переменная
Матрица сечений ↔ матрица контуров
Матрица $Y_д$ ↔ матрица $Z_д$
Матрица Y ↔ матрица Z
Вектор J ↔ вектор E

В частности, используя дуальность терминов и величин, можно сформулировать правила записи матрицы Z и вектора E непосредственно из рассмотрения графа системы и полюсных уравнений компонентов. Так, k-я компонента e_k вектора E равна алгебраической сумме задающих продольных величин тех источников, дуги которых инцидентны k-му контуру, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если направления дуги и контура совпадают, и со знаком минус, если их направления противоположны. Правило записи матрицы Z иллюстрируется на рис. 160.





$\xi_i = z_{ii}\eta_i + z_{ij}\eta_j$ $\qquad$ $\xi_j = z_{ji}\eta_i + z_{jj}\eta_j$

	k	l	r	s	t
k	z_{ii}	$-z_{ii}$	z_{ij}	$-z_{ij}$	$-z_{ij}$
l	$-z_{ii}$	z_{ii}	$-z_{ij}$	z_{ij}	z_{ij}
r	z_{ji}	$-z_{ji}$	z_{jj}	$-z_{jj}$	$-z_{jj}$
s	$-z_{ji}$	z_{ji}	$-z_{jj}$	z_{jj}	z_{jj}
t	$-z_{ji}$	z_{ji}	$-z_{jj}$	z_{jj}	z_{jj}

Рис. 160. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу Z.

6. Преобразование источников. До сих пор предполагалось, что в системе действуют источники только одного типа. Однако нетрудно обобщить математические модели в однородных системах координат на случаи, когда имеются задающие источники как продольных, так и поперечных величин, описываемые соответственно уравнениями $\xi_E = e(t)$ и $\eta_J = j(t)$.

Рассмотрим сначала уравнения сечений. Выберем фундаментальное дерево так, чтобы все дуги независимых источников продольных величин (e-дуги) вошли в это дерево, а все дуги независимых источников поперечных величин (j-дуги) — в дополнение. Это всегда возможно, так как источники продольных величин не могут образовать контуров, а источники поперечных величин — сечений. Если бы это условие было нарушено, то некоторые из источников в силу топологических уравнений для таких сечений и контуров уже не являлись бы независимыми, что свидетельствовало бы о некорректной постановке задачи.

Расположив дуги графа так, что за e-дугами следуют y-дуги, а затем j-дуги, запишем топологические уравнения для сечений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_Y \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь матрица сечений представлена через субматрицы, полученные разбиением ее строк на два подмножества (e, y_T) и столбцов на три подмножества (e, y, j). Единичная субматрица отражает тот факт, что e-дуги инцидентны только своим сечениям, так как все они включены в фундаментальное дерево. Из топологического уравнения имеем два матричных соотношения:

$$\eta_E = -\Pi_{EY}\eta_Y - \Pi_{EJ}\eta_J; \quad \Pi_{YY}\eta_Y = -\Pi_{YJ}\eta_J.$$

Подставив сюда $\eta_Y = Y_{\text{д}}\xi_Y$ и $\eta_J = \vartheta$, а также выразив ξ_Y через продольные величины дерева ξ_T, т. е.

$$\xi_Y = \Pi_Y^t \xi_T = \left[\Pi_{EY}^t, \ \Pi_{YY}^t\right] \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \Pi_{EY}^t \varepsilon + \Pi_{YY}^t \xi_{YT},$$

получим

$$\eta_E = -\Pi_{EY} Y_{\text{д}} \left(\Pi_{EY}^t \varepsilon + \Pi_{YY}^t \xi_{YT}\right) - \Pi_{EJ}\vartheta;$$
$$\left(\Pi_{YY} Y_{\text{д}} \Pi_{YY}^t\right) \xi_{YT} = -\Pi_{YJ}\vartheta - \left(\Pi_{YY} Y_{\text{д}} \Pi_{EY}^t\right) \varepsilon.$$

Первое выражение может быть использовано для определения поперечных величин e-дуг (если это требуется). Второе соотношение представляет собой уравнение сечений, которое в краткой записи выражается следующим образом:

$$Y\xi_{YT} = J.$$

Матрицу $Y = \Pi_{YY} Y_{\text{д}} \Pi_{YY}^t$ можно записать по правилу, приведенному в (4) с тем различием, что учитывается инцидентность y-дуг только сечениям, определяемым y-ветвями дерева (y-сечениям). Вектор $J = -\Pi_{YJ}\vartheta - (\Pi_{YY} Y_{\text{д}} \Pi_{EY}^t)\varepsilon$ учитывает источники обоих типов, представленные величинами ϑ и ε. Первое слагаемое $-\Pi_{YJ}\vartheta$ представляет собой вектор, компонентами которого служат алгебраические суммы задающих поперечных величин дуг источников, инцидентных соответствующим y-сечениям. Второе слагаемое — $Y'\varepsilon$ учитывает воздействие источников продольных величин, для записи матрицы $Y' = \Pi_{YY} Y_{\text{д}} \Pi_{EY}^t$ также можно воспользоваться правилом, аналогичным приведенному в (4) с тем различием, что при вписывании параметра y_{ij} рассматривается инцидентность i-й дуги y-сечениям и инцидентность j-й дуги e-сечениям.

Для получения уравнений контуров при наличии источников обоих типов необходимо, как и ранее, выбрать фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все e-дуги, а все j-дуги оказались в дополнении. Топологическое уравнение записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_Z \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

С учетом соотношений $\xi_Z = Z_д \eta_Z$, $\xi_E = \varepsilon$ и $\eta_J = \vartheta$ получаем:

$$\left(P_{ZZ} Z_д P_{ZZ}^t\right) \eta_{ZN} = -P_{ZE}\varepsilon - \left(P_{ZZ} Z_д P_{JZ}^t\right) \vartheta;$$

$$\xi_J = -P_{JZ} Z_д \left(P_{JZ}^t \vartheta + P_{ZZ}^t \eta_{ZN}\right) - P_{JE}\varepsilon.$$

Первое из них представляет собой уравнение контуров, которое в краткой записи выражается следующим образом

$$Z\eta_{ZN} = E,$$

где $Z = P_{ZZ} Z_д P_{ZZ}^t$ и $E = -P_{ZE}\varepsilon - \left(P_{ZZ} Z_д P_{JZ}^t\right)\vartheta$. Для записи матрично-векторных параметров Z и E можно воспользоваться правилами, дуальными приведенным выше правилам записи матрицы Y и вектора J.

Матрицу $Y' = \Pi_{YY} Y_д \Pi_{EY}^t$ размера $q_Y \times q_E$ можно рассматривать как оператор, преобразующий источники продольных величин в задающие поперечные переменные. Аналогично матрицу $Z' = P_{ZZ}\ Z_д\ P_{JZ}^t$ размера $q_Z \times q_J$ можно рассматривать как оператор, преобразующий источники поперечных величин в задающие продольные величины.

Так как переменными уравнений в однородных системах координат служат векторы ξ_{YT} и η_{ZN}, то при наличии q_E источников продольных величин и q_J источников поперечных величин число скалярных уравнений сечений равно $\nu - q_E = p - k - q_E$, и число скалярных уравнений контуров равно $\sigma - q_J = q - p + k - q_J$.

При формировании уравнений сечений короткозамкнутые дуги целесообразно представить как e-дуги, а разомкнутые — как y-дуги. Все эти дуги вводятся в дерево. Тогда искомые поперечные переменные определятся из уравнения для η_E, а искомые продольные переменные — из уравнений сечений как компоненты вектора ξ_{YT}.

При формировании уравнений контуров короткозамкнутые дуги целесообразно представить как z-дуги, а разомкнутые — как j-дуги. Все эти дуги вводятся в дополнение. Тогда искомые поперечные переменные определятся из уравнений контуров как компо-

ненты вектора η_N, а искомые продольные переменные — из уравнения для ξ_J.

7. Транзисторная схема. Проиллюстрируем методы формирования уравнений в однородных системах координат на примере транзисторной схемы (см. рис. 138, *а*), используя ее граф (см. рис. 158).

При выводе уравнений сечений необходимо дугу E источника напряжения $e(t)$ и разомкнутую дугу Q ввести в дерево, а также представить транзисторы g-параметрами и резисторы — проводимостями. Выбрав дерево, как показано на рис. 161, запишем матрицу сечений с разбиением на блоки:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} =$$

	E	$R1$	$1''$	Q	$2''$	$R2$	$1'$	$2'$	$R3$	$R4$
E	1					1	−1	−1		
$R1$		1				−1		1	1	1
$1''$			1		1	1			−1	
Q				1	1					1

Как видно, субматрицы Π_{EJ} и Π_{YJ} отсутствуют, так как граф не содержит дуг независимых источников тока (j-дуг). Матрица проводимостей дуг полюсных графов компонентов $Y_д$, входящая в компонентное уравнение $i_Y = Y_д u_Y$, записывается в виде:

$Y_д =$

	$R1$	$1''$	Q	$2''$	$R2$	$1'$	$2'$	$R3$	$R4$
$R1$	G_1								
$1''$		$g''_{11\,э}$		$g''_{12\,э}$					
Q									
$2''$		$g''_{21\,э}$		$g''_{22\,э}$					
$R2$					G_2				
$1'$						$g'_{11\,б}$	$g'_{12\,б}$		
$2'$						$g'_{21\,б}$	$g'_{22\,б}$		
$R3$								G_3	
$R4$									G_4

Матрично-векторные параметры уравнения сечений $Yu_{YT} = J$ определяются формулами: $Y = \Pi_{YY} Y_д \Pi^t_{YY}$ и $J = -\Pi_{YJ} j - Y'e =$

$= -Y'e$, где $Y' = \Pi_{YY} Y_д \Pi^t_{EY}$. Перемножив соответствующие матрицы, получим:

	$R1$	$1''$	Q	
$Y =$	$g'_{22б} + G_1 + G_2 + G_3 + G_4$	$-G_2 - G_3$	G_4	$R1$
	$-G_2 - G_3$	$g''_{11э} + g''_{12э} + g''_{21э} + g''_{22э} + G_2 + G_3$	$g''_{12э} + g''_{22э}$	$1''$;
	G_4	$g''_{21э} + g''_{22э}$	$g''_{22э} + G_4$	Q

$Y' =$	$-G_2 - g'_{21б} - g'_{22б}$	$R1$
	G_2	$1''$.
		Q

Таким образом, имеем уравнения сечений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} g'_{22б} + G & -G_2 - G & G_4 \\ -G_2 - G_3 & g''_э + G_2 + G_3 & g''_{12э} + g''_{22э} \\ G_4 & g''_{21э} + g''_{22э} & g''_{22э} + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{R1} \\ u''_1 \\ u_Q \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} G_2 + g'_{21б} + g'_{22б} \\ -G_2 \\ 0 \end{bmatrix} e,$$

где $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$; $g''_э = g''_{11э} + g''_{12э} + g''_{21э} + g''_{22э}$.

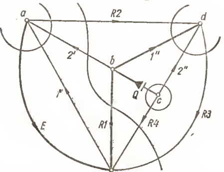


Рис. 161. Граф транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений сечений.

Матрицы Y и Y' можно также записать по приведенным ранее правилам. Например, проводимость G_2 записывается на пересечении строк и столбцов, соответствующих сечениям $R1$ и $1''$, так как дуга $R2$ инцидентна этим сечениям, причем симметрично от главной диагонали проводимость G_2 записывается со знаком минус вследствие противоположности направлений сечений $R1$ и $1'$ относительно дуги $R2$. Взаимная проводимость $g''_{12э}$ дуги $1''$ транзистора $T2$ записывается на пересечении второй строки с вторым и третьим столбцами, так как дуга $1''$ инцидентна сечению $1''$, а дуга $2''$ — сечениям $1''$ и Q. Поскольку направление дуги $2''$ совпадает с инци-

дентными ей сечениями $1''$ и Q, то $g''_{12э}$ везде вписывается со знаком плюс. Аналогично вписываются в матрицу проводимости и другие параметры компонентов. Собственная проводимость $g'_{11б}$ дуги $1'$ транзистора $T1$ не вошла в матицы Y и Y', так как эта дуга не инцидентна y-сечениям.

Тройные матричные произведения удобно также получать суммированием строк и столбцов матрицы $Y_д$. Так как в выражении $Y = \Pi_{YY} Y_д \Pi^t_{YY}$ ненулевые элементы матрицы Π_{YY} равны ± 1, то умножение $Y_д$ на Π_{YY} слева соответствует алгебраическому суммированию строк, а умножение на Π^t_{YY} справа — алгебраическому суммированию столбцов матрицы $Y_д$. Какие именно строки и столбцы и с каким знаком суммируются указывают ненулевые элементы соответствующих строк матрицы Π_{YY}. При получении матрицы $Y' = \Pi_{YY} Y_д \Pi^t_{EY}$ операции над строками матрицы $Y_д$ определяются матрицей Π_{YY}, а операции над столбцами — матрицей Π_{EY}.

В рассматриваемом примере для получения первой строки произведения $\Pi_{YY} Y$ необходимо из второй строки матрицы $Y_д$ вычесть пятую и прибавить к ней седьмую, восьмую и девятую строки. Вычитая восьмую строку из суммы второй, четвертой и пятой, получаем вторую строку произведения $\Pi_{YY} Y_д$. Наконец, сумма третьей, восьмой и девятой строк дает третью строку произведения $\Pi_{YY} Y_д$. В результате имеем:

$\Pi_{YY} Y_д =$

$R1$	$1''$	Q	$2''$	$R2$	$1'$	$2'$	$R3$	$R4$	
G_1				$-G_2$	$g'_{21б}$	$g'_{22б}$	G_3	G_4	$R1$
	$g'_{11э} + g''_{21э}$		$g''_{12э} + g''_{22э}$	G_2			$-G_3$		$1''$
	$g''_{21э}$		$g''_{22э}$					G_4	Q

Выполнив такие же операции над столбцами этой матрицы, получим матрицу Y. Для определения матрицы Y' необходимо из пятого столбца произведения $\Pi_{YY} Y_д$ вычесть шестой и седьмой столбцы и результат записать как единственный (в данном случае) столбец матрицы Y'.

Искомое напряжение u_Q можно определить из решения уравнения сечений, например по правилу Крамера (1. 3. 10):

$$u_Q = \frac{1}{\Delta} [(G_2 + g'_{21б} + g'_{22б}) \Delta_{13} - G_2 \Delta_{23}] \, e(t),$$

где Δ — определитель матрицы Y; Δ_{13} и Δ_{23} — алгебраические дополнения (индексы алгебраических дополнений соответствуют естественной порядковой нумерации строк и столбцов матрицы Y).

При формировании уравнений контуров фундаментальное дерево должно, как и ранее, включать дугу E источника напряжения, но разомкнутую дугу Q целесообразно представить как j-дугу и оставить ее в дополнении. Отвечающее этим требованиям дерево и определяемая им совокупность независимых контуров показаны на рис. 162. Матрица контуров записывается в виде:

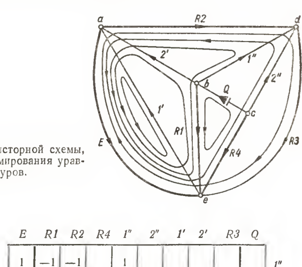


Рис. 162. Граф транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений контуров.

$$P = \begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & 1 \end{bmatrix} =$$

E	R1	R2	R4	1''	2''	1'	2'	R3	Q	
1	—1	—1		1						1''
1		—1	—1		1					2''
1						1				1'
1	—1						1			2'
—1		1						1		R3
	1		—1						1	Q

.

Дуги полюсных графов всех компонентов должны быть z-дугами, для этого транзисторы представляются r-параметрами, а резисторы — сопротивлениями. Матрица $Z_д$, входящая в компонентное уравнение $u_Z = Z_д i_Z$, запишется следующим образом:

$Z_д =$

	R1	R2	R4	1″	2″	1′	2′	R3
R1	R_1							
R2		R_2						
R4			R_4					
1″				$r''_{11э}$	$r''_{12э}$			
2″				$r''_{21э}$	$r''_{22э}$			
1′						$r'_{11б}$	$r'_{12б}$	
2′						$r'_{21б}$	$r'_{22б}$	
R3								R_3

Матрично-векторные параметры уравнения контуров $Zi_{ZN} = E$ определяются формулами: $Z = P_{ZZ}Z_дP^t_{ZZ}$ и $E = -P_{ZE}e - Z'j = -P_{ZE}e(t)$ (так как $j = 0$). Матрицу Z получим путем алгебраических операций над строками и столбцами матрицы $Z_д$, которые определяются ненулевыми элементами строк матрицы P_{ZZ}:

$P_{ZZ}Z_д =$

	R1	R2	R4	1″	2″	1′	2′	R3
1″	$-R_1$	$-R_2$		$r''_{11э}$	$r''_{12э}$			
2″		$-R_2$	$-R_4$	$r''_{21э}$	$r''_{22э}$			
1′						$r'_{11б}$	$r'_{12б}$	
2′						$r'_{21б}$	$r'_{22б}$	
R3								R_3

$Z =$

	1''	2''	1'	2'	R3
1''	$R_1 + R_2 + r''_{11э}$	$R_2 + r''_{12э}$		R_1	$-R_2$
2''	$R_2 + r''_{21э}$	$R_2 + R_4 + r''_{22э}$			$-R_2$
1'			$r'_{11б}$	$r'_{12б}$	
2'	R_1		$r'_{21б}$	$R_1 + r'_{22б}$	
R3	$-R_2$	$-R_2$			$R_2 + R_3$

Таким образом, уравнение контуров получаем в виде:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + r''_{11э} & R_2 + r''_{12э} & 0 & R_1 & -R_2 \\ R_2 + r''_{21э} & R_2 + R_4 + r''_{22э} & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & r''_{11б} & r'_{12б} & 0 \\ R_1 & 0 & r'_{21б} & R_1 + r'_{22б} & 0 \\ -R_2 & -R_2 & 0 & 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \\ i'_1 \\ i'_2 \\ i_{R3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t).$$

Определив из этого уравнения вектор токов хорд $i_{ZN} = (i''_1, i''_2, i'_1, i'_2, i_{R3})$, искомое напряжение u_Q найдем по формуле для $u_J = u_Q$:

$$u_Q = -\mathrm{P}_{JZ} Z_д (\mathrm{P}'_{JZ} j + \mathrm{P}^t_{ZZ} i_{ZN}) - \mathrm{P}_{JE} e(t).$$

Так как $j = 0$ и $\mathrm{P}_{JE} = 0$, то

$$u_Q = -(\mathrm{P}_{JZ} Z_д \mathrm{P}^t_{ZZ})\, i_{ZN} = -Z' i_{ZN}.$$

Матрица Z' получается из $Z_д$ суммированием ее строк в соответствии с P_{JZ} и столбцов в соответствии с P_{ZZ}, т. е.

$\mathrm{P}_{JZ} Z_д =$

	R1	R2	R4	1''	2''	1'	2'	R3
Q;	R_1		$-R_4$					

$$Z' = \mathrm{P}_{JZ} Z_д \mathrm{P}'_{ZZ} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} 1'' & 2'' & 1' & 2' & R3 \\ \hline -R_1 & R_4 & & -R_1 & \end{array}\; Q.$$

На основании полученной матрицы Z' находим:

$$u_Q = -Z' i_{ZN} = R_1 i_1'' - R_4 i_2'' + R_1 i_2' = R_1 (i_1'' + i_2') - R_4 i_2''.$$

8. Электромеханическая система. Рассмотрим в качестве еще одного примера электромеханическую систему (рис. 163, *а*), состоящую из двигателя постоянного тока, трех упругих валов и двух маховиков. Граф системы показан на рис. 163, *б*, где *1* — дуга приложенного напряжения (*е*-дуга); *2*, *3* — дуги полюсного графа двигателя; *4*, *6*, *8* — дуги валов; *5*, *7* — дуги маховиков и *9* — дуга момента нагрузки μ_9(j -дуга).

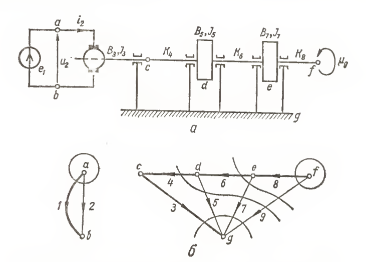


Рис. 163. Электромеханическая система (*а*) и ее граф (*б*).

Пусть требуется сформировать математическую модель системы в однородной системе координат так, чтобы переменными в уравнениях были продольные величины φ_3, φ_4, φ_6, φ_8 (углы скручивания валов, в том числе и вала двигателя φ_3). Естественно исходить из системы сечений, стремясь включить дуги валов и выходную дугу двигателя в дерево. Так как граф несвязный, то деревья выбираем в каждом из двух его компонентов связности, причем, наряду

с дугами 3, 4, 6, 8, включаем в лес дугу 1 источника напряжения. В соответствии с выбранным лесом матрица сечений имеет вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1							
3			1		1		1		1
4				1	1		1		1
6						1	1		1
8								1	1

Так как при формировании уравнений сечений полюсные графы компонентов должны быть представлены как y-дуги, то полюсные уравнения двигателя (4. 8) необходимо разрешить относительно поперечных переменных тока i_2 и момента μ_2, а в качестве продольных переменных принять напряжение u_2 и угол поворота φ_3. Пренебрегая индуктивностью цепи якоря ($L = 0$), получаем (p-оператор дифференцирования):

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -p\frac{C}{R} \\ -\frac{C}{R} & p\left(\frac{C}{R} + B_3\right) + p^2 J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

где R — сопротивление цепи якоря; B_3 и J_3 — соответственно сопротивление трения в двигателе и момент инерции якоря.

Полюсные уравнения валов (пренебрегая моментами инерции) и маховиков имеют вид:

$$\mu_i = K_i \varphi_i \quad (i = 4, 6, 8);$$
$$\mu_j = (pB_j + p^2 J_j)\,\varphi_j = Y_j \varphi_j \quad (j = 5{,}7),$$

где K_i — упругости валов; B_j и J_j — соответственно сопротивления трения и моменты инерции маховиков.

Таким образом, компонентное уравнение $Y_д \eta_Y = \xi_Y$ для рассматриваемой системы запишется следующим образом:

$$
\begin{array}{|c|}\hline i_2\\\hline \mu_2\\\hline \mu_4\\\hline \mu_5\\\hline \mu_6\\\hline \mu_7\\\hline \mu_8\\\hline\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline
y_{22} & y_{23} & & & & & \\\hline
y_{32} & y_{33} & & & & & \\\hline
 & & K_4 & & & & \\\hline
 & & & Y_5 & & & \\\hline
 & & & & K_6 & & \\\hline
 & & & & & Y_7 & \\\hline
 & & & & & & K_8\\\hline
\end{array}
\begin{array}{|c|}\hline u_2\\\hline \varphi_3\\\hline \varphi_4\\\hline \varphi_5\\\hline \varphi_6\\\hline \varphi_7\\\hline \varphi_8\\\hline\end{array}.
$$

Матрицы $Y = \Pi_{YY} Y_д \Pi_{YY}^t$ и $Y' = \Pi_{YY} Y_д \Pi_{EY}^t$ найдем суммированием строк и столбцов компонентной матрицы $Y_д$:

$$
\Pi_{YY} Y_д =
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\\hline
 & y_{32} & y_{33} & & Y_5 & & Y_7 & & 3\\\hline
 & & & K_4 & Y_5 & & Y_7 & & 4\\\hline
 & & & & & K_6 & Y_7 & & 6\\\hline
 & & & & & & & K_8 & 8\\\hline
\end{array};
$$

$$
Y =
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 3 & 4 & 6 & 8 & \\\hline
 & y_{33}+Y_5+Y_7 & Y_5+Y_7 & Y_7 & & 3\\\hline
 & Y_5+Y_7 & K_4+Y_5+Y_7 & Y_7 & & 4\\\hline
 & Y_7 & Y_7 & K_6+Y_7 & & 6\\\hline
 & & & & K_8 & 8\\\hline
\end{array};
\qquad
Y' =
\begin{array}{c|c|c}
 & 2 & \\\hline
 & y_{32} & 3\\\hline
 & & 4\\\hline
 & & 6\\\hline
 & & 8\\\hline
\end{array}.
$$

Определив вектор J по формуле $J = -\Pi_{YJ}\mu_9 - Y'e_1$, получим уравнение сечений рассматриваемой системы:

$$\begin{bmatrix} y_{33}+Y_5+Y_7 & Y_5+Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_5+Y_7 & K_4+Y_5+Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_7 & Y_7 & K_6+Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_6 \\ \varphi_8 \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_9 - \begin{bmatrix} y_{32} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1.$$

Ему соответствует система четырех дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{C}{R} + B_3 + B_5 + B_7\right)\frac{d\varphi_3}{dt} + (J_3 + J_5 + J_7)\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} +$$

$$+ (B_5+B_7)\frac{d\varphi_4}{dt} + (J_5+J_7)\frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7\frac{d\varphi_6}{dt} + J_7\frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_9 - \frac{C}{R}e_1 = 0;$$

$$(B_5+B_7)\frac{d\varphi_3}{dt} + (J_5+J_7)\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + K_4\varphi_4 + (B_5+B_7)\frac{d\varphi_4}{dt} +$$

$$+ (J_5+J_7)\frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7\frac{d\varphi_6}{dt} + J_7\frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_9 = 0;$$

$$B_7\frac{d\varphi_3}{dt} + J_7\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + B_7\frac{d\varphi_4}{dt} + J_7\frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + K_6\varphi_6 + B_7\frac{d\varphi_6}{dt} +$$

$$+ J_7\frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_9 = 0;$$

$$K_8\varphi_8 + \mu_9 = 0.$$

9. Узловые уравнения. Простейшую *(каноническую)* систему сечений связного (p, q)-графа образуют $p-1$ центральных разрезов (2.4), причем можно считать, что она определяется звездным деревом, состоящим из разомкнутых дуг с центром в базисной вершине (рис. 164, *а*). Ясно, что введение в граф разомкнутых дуг не нарушает значений переменных и их роль сводится только к фиксированию некоторой совокупности продольных переменных. Разомкнутые дуги звездного дерева фиксируют *узловые продольные переменные*, которые направлены от базисной вершины к остальным вершинам графа (рис. 164, *б*) и образуют вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1})$. При этом дуги полюсных графов всех компонентов оказываются в дополнении.

Топологическое уравнение в канонической системе сечений запишется следующим образом:

$$[1 \;\; A_0]\begin{bmatrix}\eta_T \\ \eta_N\end{bmatrix} = 0,$$

где A_0 — сокращенная матрица инцидентности (2.2).

Так как $\eta_T = 0$ и $\eta_N = \eta_д$, то имеем $A_0\eta_д = 0$. Справедливо также соотношение $\xi_д = A_0^t\xi$, которое наряду с компонентным уравнением $\eta_Y = Y_д\xi_Y$ используется для получения уравнений сечений.

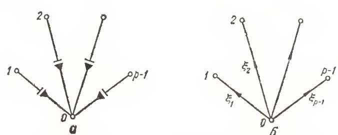


Рис. 164. К определению канонической системы сечений:
а — звездное дерево из разомкнутых дуг; *б* — узловые продольные переменные.

Таким образом, в канонической системе сечений роль матрицы П играет матрица инцидентности A_0, т. е. матрично-векторные параметры уравнения $Y\xi = J$ выражаются формулами:

$$Y = A_Y Y_д A_Y^t; \;\; J = -A_J\vartheta,$$

где A_Y и A_J — субматрицы, образованные из столбцов матрицы A_0, соответствующих полюсным графам компонентов (y-дугам) и источникам поперечных величин (j-дугам).

Правила записи матрично-векторных параметров в этом случае существенно упрощаются, так как каждая дуга инцидентна не более, чем двум сечениям (дуги, связанные с базисной вершиной, инцидентны только одному сечению). Вместо сечений можно рассматривать вершины графа (положительным направлением является направление от вершины). В связи с этим уравнения в канонической системе сечений называют также *уравнениями вершин* или *узловыми уравнениями*.

Если, наряду с y-дугами, граф содержит только дуги источников поперечных величин (j-дуги), то каноническая система сечений

однозначно определяется выбором базисной вершины и нумерацией остальных вершин. Компонентам вектора $\xi_Г$ (узловым продольным величинам) присваиваются номера соответствующих им вершин. При непосредственной записи матрично-векторных параметров удобно вместо нумерации дуг обозначать их собственные параметры y_{ii}. Взаимные параметры y_{ij} обозначаются рядом со стрелками, направленными от i-й к j-й дуге. Пусть, например, в транзисторной

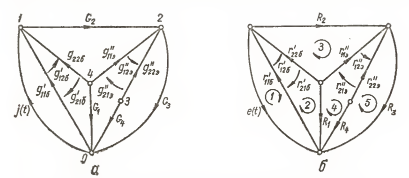


Рис. 165. Граф транзисторной схемы, используемый для записи: *а* — узловых уравнений; *б* — уравнений ячеек.

схеме (см. рис. 138, *а*) вместо источника напряжения действует источник тока $j(t)$. Тогда ее граф, подготовленный для записи узловых уравнений, будет выглядеть, как показано на рис. 165, *а*, а сами уравнения получаем в виде:

$G_3 + g'_{11б} + g'_{12б} + g'_{21б} + g'_{22б}$	$-G_2$		$-g'_{12б} - g'_{22б}$	u_1		$j(t)$
$-G_2$	$G_2 + G_3 + g''_{11э} + g''_{12э} + g''_{21э} + g''_{22э}$	$-g''_{12э} - g''_{22э}$	$-g''_{11э} - g'_{21э}$	u_2	$=$	
	$-g''_{21э} - g''_{22э}$	$G_3 + g''_{22э}$	$g''_{21э}$	u_3		
$-g'_{21б} - g'_{22б}$	$-g''_{11э} - g''_{12э}$	$g''_{12э}$	$G_1 + g'_{22б} + g''_{11э}$	u_4		

10. Уравнения ячеек. Для плоского графа, содержащего, наряду с z-дугами, дуги только источников продольных величин (e-дуги) каноническая система контуров определяется совокупностью ячеек (2. 6). Ячейки и узлы являются взаимно дуальными понятиями, а матрица контуров для ячеек B_0 дуальна матрице A_0. Обычно принимают направления контуров, определяемых ячейками, по часовой стрелке, а роль базисной ячейки играет внешний контур графа (рис. 166). В связи с этим все соотношения и правила для математической модели в канонической системе контуров дуальны соответствующим соотношениям и правилам для канонической системы сечений.

Матрично-векторные параметры уравнения $Z\eta = E$ определяются формулами:

$$Z = B_Z Z_д B_Z^t;\; E = -B_E \varepsilon,$$

где B_Z и B_E — субматрицы, образованные из столбцов матрицы B_0, соответствующих полюсным графам компонентов (z-дугам) и источникам продольных величин (e-дугам). Вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\sigma)$ содержит в качестве своих компонентов *контурные поперечные переменные*, которые связаны с ячейками (поперечная переменная внешнего контура принимается равной нулю). Уравнения в системе контуров называют *уравнениями ячеек* или *контурными уравнениями*. Определив вектор η, остальные переменные находим по формулам $\eta_д = B_0\eta$ и $\xi_Z = Z_д\eta_Z$.

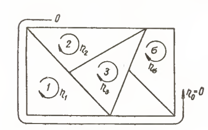


Рис. 166. Каноническая система контуров (ячеек).

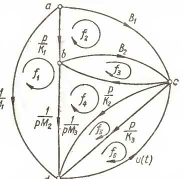


Рис. 167. Граф механической системы, используемый для записи уравнений ячеек.

Для непосредственной записи матрицы Z и вектора E достаточно пронумеровать ячейки и воспользоваться простыми правилами, которые вытекают из общих правил (5) с учетом того, что любая дуга графа инцидентна не более чем двум ячейкам, а дуги внешнего контура— только одной ячейке. Запишем, например, уравнения

ячеек для транзисторной схемы (см. рис. 138, *а*) при воздействии на нее источника напряжения $e(t)$. Граф, подготовленный для этой задачи, изображен на рис. 165, *б*, а сами уравнения получаем в виде:

$r'_{11б}$	$-r'_{11б}+r'_{12б}$	$-r'_{12б}$			i_1		$e_1(t)$
$-r'_{11б}+$ $+r'_{21б}$	$R_1+r'_{11б}-$ $-r'_{12б}-$ $-r'_{21б}+$ $+r'_{22б}$	$r'_{12б}-r'_{22б}$	$-R_1$		i_2		
$-r'_{21б}$	$r'_{21б}-$ $-r'_{22б}$	$R_2+r'_{22б}+$ $+r''_{11э}$	$-r''_{11э}+r''_{12э}$	$-r''_{12э}$	i_3	$=$	
	$-R_1$	$-r''_{11э}+r''_{21э}$	R_1+R_4+ $+r''_{11э}-$ $-r''_{12э}-$ $-r''_{21э}+$ $+r''_{22э}$	$r''_{12э}-r''_{22э}-$ $-R_4$	i_4		
		$-r''_{21э}$	$r''_{21э}-r''_{22э}-$ $-R_1$	$r''_{22э}+R_3+$ $+R_4$	i_5		

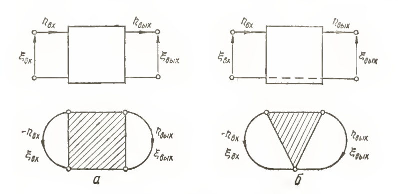


Рис. 168. Схема с двумя сторонами:
а — с различными входными и выходными вершинами; *б* — с общей вершиной для входа и выхода.

Особенно просто записываются уравнения для систем, состоящих из двухполюсников. Например, для механической системы (см. рис. 123, *а*) в соответствии с ее графом (рис. 167), на котором указаны параметры в операторной форме, имеем:

$$\begin{Vmatrix} \frac{p}{K_1}+\frac{1}{p}\times\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right) & -\frac{p}{K_1} & & -\frac{1}{pM_2} & & \\ -\frac{p}{K_1} & B_1+B_2+\frac{p}{K_1} & -B_2 & & & \\ & -B_2 & B_2+\frac{p}{K_2} & -\frac{p}{K_2} & & \\ -\frac{1}{pM_2} & & -\frac{p}{K_2} & \frac{p}{K_2}+\frac{1}{p}\times\left(\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_3}\right) & -\frac{1}{pM_3} & \\ & & & -\frac{1}{pM_3} & \frac{p}{K_3}+\frac{1}{pM_3} & -\frac{p}{K_3} \\ & & & & -\frac{p}{K_3} & \frac{p}{K_3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ -u(t) \end{Vmatrix}.$$

Контурные силы f_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) представляют собой условные расчетные величины, через которые выражаются силы (реакции) двухполюсников. Например, сила двухполюсника M_3 равна $f_4 - f_3$ и т. д.

11. Системы с двумя сторонами. Часто требуется получить математическую модель системы, характеризующую ее относительно двух сторон: входа, к которому приложено воздействие (независимый источник), и выхода, с которым связаны искомые величины (рис. 168, *а*). При этом предполагается, что внутри самой системы независимые источники отсутствуют. Системы с двумя сторонами называют *четырехполюсниками*.

Входная и выходная стороны могут быть представлены внешними дугами, которые характеризуются соответственно входными $-\eta_{вх}$, $\xi_{вх}$ и выходными $\eta_{вых}$, $\xi_{вых}$ величинами (знак минус при входной поперечной величине $\eta_{вх}$ появляется в связи с тем, что ее обычно принятое направление противоположно направлению входной дуги).

Внешние дуги связаны с графом системы (заштрихованная часть) парами входных и выходных вершин. Случай, когда вход и выход имеют общую вершину, показан на рис. 168, *б*.

Для получения уравнений относительно внешних величин в однородной системе сечений необходимо внешние дуги представить как дуги источников поперечных величин (j-дуги) и ввести их в дерево. Без потери общности внешние дуги можно расположить перед y-дугами графа. Тогда в уравнении сечений $Y\xi_T = J$, где

$$\xi_T = \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \\ \xi_{YT} \end{bmatrix}; \quad J = -\Pi_j \vartheta = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\eta_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ -\eta_{\text{вых}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, имеем:

$$Y \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ -\eta_{\text{вых}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где, как и ранее в (4), $Y = \Pi_Y Y_д \Pi_Y^t$.

Записав решение этого уравнения относительно продольных внешних переменных по правилу Крамера, находим

$$\xi_{\text{вх}} = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{aa}\eta_{\text{вх}} - \Delta_{ba}\eta_{\text{вых}});$$

$$\xi_{\text{вых}} = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{ab}\eta_{\text{вх}} - \Delta_{bb}\eta_{\text{вых}}),$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы Y; индексы a и b алгебраических дополнений этой матрицы равны порядковым номерам строк и столбцов, которые соответствуют сечениям, определяемым входной и выходной дугами. В общем случае a и b могут принимать любые значения, а при расположении этих сечений первыми $a = 1$ и $b = 2$.

Полученные уравнения описывают четырехполюсник относительно продольных величин. Они могут быть представлены и относительно поперечных величин. Для этого сложим первое уравнение, умноженное на Δ_{bb}, со вторым, умноженным на $-\Delta_{ba}$:

$$\frac{1}{\Delta}(\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba})\,\eta_{\text{вх}} = \Delta_{bb}\xi_{\text{вх}} - \Delta_{ba}\xi_{\text{вых}},$$

а также сложим первое уравнение, умноженное на Δ_{ab}, со вторым, умноженным на $-\Delta_{aa}$:

$$\frac{1}{\Delta}(\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba})\,\eta_{\text{вых}} = \Delta_{ab}\xi_{\text{вх}} - \Delta_{aa}\xi_{\text{вых}}.$$

Множитель в левых частях полученных равенств преобразуется по формуле $\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba} = \Delta\Delta_{aa,\,bb}$, где $\Delta_{aa,\,bb}$ — двукратное алгебраическое дополнение (3.3.10). В результате получаем

$$\begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{aa,\,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa} \end{bmatrix}.$$

Комбинируя попарно внешние параметры, уравнение четырехполюсника можно представить шестью различными способами (табл. 5). Элементы матриц этих уравнений, называемые *внешними параметрами четырехполюсника*, выражаются через определитель и алгебраические дополнения матрицы $Y = \Pi_Y Y_д \Pi_Y^t$. Аналогичные выражения можно получить и в однородной системе контуров через матрицу $Z = P_Z Z_д P_Z^t$. Для этого необходимо внешние дуги представить как *е*-дуги и отнести их к дополнению. Выполнив преобразования, дуальные приведенным выше, получим требуемые выражения (табл. 5).

Таблица 5

Внешние параметры системы с двумя сторонами

Уравнение	Внешние параметры	
	В системе сечений ($\Delta = \det Y$)	В системе контуров ($\Delta = \det Z$)
$\begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \xi_{вых} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,\,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \xi_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,\,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \eta_{вх} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{вых} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{aa,\,bb} \\ \Delta & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & \Delta \\ \Delta_{aa,\,bb} & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{вых} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \eta_{вх} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{aa,\,bb} \\ -\Delta & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta \\ -\Delta_{aa,\,bb} & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ \xi_{вых} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa,\,bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa,\,bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ \xi_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa,\,bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa,\,bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите топологические уравнения для графа (см. рис. 158) относительно сечений и контуров, определяемых фундаментальным деревом $T = \{E, 1'', R2, Q\}$.

2. Запишите компонентные уравнения дуг, входящих в граф (см. рис. 158) при условии, что:

а) уравнения транзисторов представлены через h-параметры, а резистивные двухполюсники — через сопротивления;

б) уравнения транзисторов представлены через r-параметры, а резистивные двухполюсники — через проводимости.

3. Пользуясь дуальностью математических моделей в однородных системах координат, сформулируйте и выведите правило записи матрицы Z непосредственно из рассмотрения графа и полюсных уравнений z-дуг.

4. Покажите, что фундаментальное дерево всегда может быть построено так, что в него войдут все e-дуги, и оно не будет содержать j-дуг, т. е. все e-дуги являются ветвями дерева, а j-дуги — хордами. Что означала бы невозможность такого построения?

5. Сформулируйте и докажите правила записи матриц Y' и Z', преобразующих независимые источники одного типа в другой.

6. Воспользовавшись свойствами матрицы инцидентности A_0, сформулируйте и докажите правило записи матрично-векторных параметров Y и J уравнения $Y\xi = J$ в канонической системе сечений.

7. Сформулируйте правило записи матрично-векторных параметров Z и E уравнения $Z\eta = E$ в системе ячеек, дуальное правилу записи Y и J, полученному в задаче 6.

8. Покажите, что матрицы Y и Z в уравнениях сечений и контуров для систем, состоящих из двухполюсных компонентов, всегда симметричны.

9. Покажите, что для систем, состоящих из двухполюсников, элементы матриц Y и Z в канонических системах координат (узловые и контурные уравнения) характеризуются следующими свойствами:

а) диагональные элементы положительны и каждый из них равен сумме параметров двухполюсников, дуги которых инцидентны соответствующему узлу (или ячейке);

б) элементы, расположенные на пересечении i-й строки и j-го столбца ($i \neq j$) отрицательны и каждый из них по абсолютной величине равен сумме параметров двухполюсников, дуги которых одновременно инцидентны узлам (или ячейкам), соответствующим данной строке и столбцу.

10. Покажите, что в канонических системах координат параметры компонентов входят не более чем в четыре клетки матриц Y и Z. Рассмотрите частные случаи для собственных и взаимных параметров.

11. Какие типы зависимых источников допустимы при формировании математической модели в однородных системах координат?

12. Запишите уравнения сечений и контуров для электрической схемы, изображенной на рис. 121.

13. Запишите уравнения сечений для механических систем, изображенных на рис. 123 и 125.

14. Запишите узловые уравнения для ламповой схемы (см. рис. 136) и определите напряжение на резисторе $R4$.

15. Запишите уравнения сечений и контуров для транзисторной схемы (см. рис. 138) непосредственно по правилам, изложенным в (4) и (5).

6. НЕОДНОРОДНЫЙ КООРДИНАТНЫЙ БАЗИС

1. Формирование уравнений. Ограничения, накладываемые на компонентные уравнения при использовании однородных систем координат, заставляют в общем случае прибегать к неоднородному координатному базису, который образуется некоторой совокупностью независимых сечений и контуров графа. Наиболее простой алгоритм формирования уравнений в неоднородной системе координат основан на подстановке в компонентные уравнения векторов продольных ξ_X и поперечных η_X переменных дуг графа, полученных из топологических уравнений.

Выберем фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все *e*-дуги, а все *j*-дуги остались в дополнении. С учетом зависимости $P = [-\pi^t \; 1]$ топологические уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{EX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} -\pi^t_{EX} & -\pi^t_{XX} & 1 & 0 \\ -\pi^t_{EJ} & -\pi^t_{XJ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

Так как $\eta_J = \vartheta$ и $\xi_E = \varepsilon$ выражаются через заданные величины (функции времени), то отсюда находим

$$\eta_{XT} = -\pi_{XX}\eta_{XN} - \pi_{XJ}\vartheta; \quad \xi_{XN} = \pi^t_{XX}\xi_{XT} + \pi^t_{EX}\varepsilon.$$

Эти выражения подставляем в компонентное уравнение, которое в неявной форме имеет вид (3):

$$[V_{\xi T}, \; V_{\xi N}, \; V_{\eta T}, \; V_{\eta N}] \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$V_{\xi T}\xi_{XT} + V_{\xi N}\xi_{XN} + V_{\eta T}\eta_{XT} + V_{\eta N}\eta_{XN} = 0.$$

Тогда получаем выражение

$$(V_{\xi T} + V_{\xi N}\pi^t_{XX})\,\xi_{XT} + (V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX})\,\eta_{XN} = -V_{\xi N}\pi^t_{EX}\varepsilon + V_{\eta T}\pi_{XJ}\vartheta,$$

которое и представляет собой математическую модель системы в неоднородном координатном базисе. Оно может быть представлено также в виде:

$$[V_{\xi T} + V_{\xi N}\pi^t_{XX}, \; V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}] \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = [-V_{\xi N}\pi^t_{EX}, \; V_{\eta T}\pi_{XJ}] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в сокращенной записи $WX = QF$ матрицы W и Q выражаются следующим образом:

$$W = [V_{\xi T} + V_{\xi N}\pi^t_{XX},\ V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}];$$
$$Q = [-V_{\xi N}\pi^t_{EX},\ V_{\eta T}\pi_{XJ}].$$

Полученное уравнение соответствует $n = \nu + \sigma - (q_E + q_J)$ скалярным уравнениям, где ν и σ — соответственно ранг и цикломатическое число графа, а q_E и q_J — количества дуг источников продольных и поперечных величин. Поскольку $\nu = p - k$ и $\sigma = q - p + k$, то $n = q - (q_E + q_J) = q_X$ — числу дуг графа системы (без дуг источников). Матрица W — квадратная порядка q_X, а Q — прямоугольная размера $q_X \times (q_E + q_J)$.

Решив уравнение $WX = QF$ относительно вектора $X = (\xi_{XT}, \eta_{XN})$, можно определить векторы η_{XT} и ξ_{XN} по приведенным выше формулам. Из топологических уравнений следуют также соотношения:

$$\eta_E = -\pi_{EX}\eta_{XN} - \pi_{EJ}\vartheta;\quad \xi_J = \pi^t_{XJ}\xi_{XT} + \pi^t_{EJ}\varepsilon,$$

которые используются для определения векторов η_E и ξ_J (если это требуется).

2. Преобразование компонентной матрицы. Матрицу W можно рассматривать как результат преобразования компонентной матрицы

$$V = [V_{\xi T},\ V_{\xi N},\ V_{\eta T},\ V_{\eta N}]$$

в соответствии с матрицей π_{XX}, которая служит оператором этого преобразования. Легко понять, что i-й столбец выражения $V_{\xi T} + V_{\xi N}\pi^t_{XX}$ получается алгебраическим суммированием с i-м столбцом матрицы $V_{\xi T}$ тех столбцов матрицы $V_{\xi N}$, которые соответствуют ненулевым элементам i-й строки матрицы π_{XX} со знаками этих элементов. Аналогично, i-й столбец выражения $V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}$ получается путем алгебраического суммирования с i-м столбцом матрицы $V_{\eta N}$ тех столбцов матрицы $V_{\eta T}$, которые соответствуют ненулевым элементам i-го столбца матрицы π_{XX} с противоположными знаками этих элементов (в обоих случаях i принимает значения всех номеров матриц $V_{\xi T}$ и $V_{\eta N}$).

При реализации алгоритма формирования математической модели на вычислительных машинах сильно разреженную матрицу сечений удобно представлять в сжатой форме списками дуг, инцидентных сечениям. В таких условиях целесообразно оперировать со строками матрицы π_{XX} и для получения выражения $V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}$. Это значит, что i-й столбец матрицы $V_{\eta T}$ должен суммироваться

с теми столбцами матрицы $V_{\eta N}$, которые соответствуют ненулевым элементам i-й строки матрицы π_{XX} с противоположными знаками этих элементов. Процедура преобразования матрицы V для получения матрицы W иллюстрируется на рис. 169.

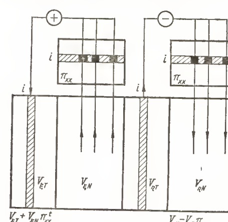
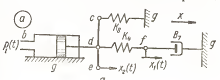


Рис. 169. Процедура формирования матрицы W.

Подобным способом можно сформировать и матрицу Q, при этом операторами преобразования матрицы V служат матрицы π_{EX} и π_{XJ}. При машинной реализации изложенного алгоритма для экономии оперативной памяти может оказаться целесообразным осуществлять преобразование матрицы V построчно, выполняя суммирование ее элементов последовательно в каждой строке и формируя одновременно соответствующие строки матриц W и Q.

3. Гидромеханическая система. Сформируем уравнения для гидромеханической системы (рис. 170, *а*), которая состоит из поршня, рычага и механических двухполюсников. Задающими переменными принимаются давление на входе поршня $p_1(t)$ и перемещения в точках e и f (начало отсчета давления связывается с точкой a, перемещений — с точкой g). Так как полюсный граф рычага содержит дуги различных типов (y и z), то необходимо прибегнуть к неоднородному координатному базису. Граф системы изображен на рис. 170, *б*, где *1* — дуга источника давления на входе поршня; *2* и *3* — дуги источников перемещения (все они являются e-дугами, так как давление и перемещение — продольные переменные); *4* и *8* — дуги пружин с параметрами K_4 и K_8, *5* и *6* — дуги механического рычага; *7* — дуга демпфера с параметром B_7; *9* и *10* — дуги гидравличес-



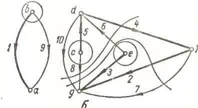


Рис. 170. Гидромеханическая система (*а*) и ее граф (*б*).

кого поршня. Выбрав фундаментальный лес (граф несвязный) так, чтобы в него вошли все e-дуги *1*, *2*, *3*, запишем матрицу сечений:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{EX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1								1	
2		1				—1	1	1		1
3			1			1				
4				1		—1		1		1
5					1			1		

Так как в системе нет источников поперечных величин, матрицы π_{EJ} и π_{XJ} отсутствуют. Полюсные уравнения идеального рычага и гидравлического поршня имеют вид:

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} v_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_9 \\ x_{10} \end{bmatrix},$$

где n — отношение плеч рычага; S — площадь поперечного сечения поршня.

Используя эти соотношения совместно с уравнениями двухполюсников, записываем компонентную матрицу (не смешивать оператор дифференцирования p в матрице с обозначением давления):

$V =$

	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	p_9	x_{10}	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	v_9	f_{10}
4	$-K_4$							1						
5		1	n											
6									$-n$	1				
7				$-pB_7$							1			
8					$-K_8$							1		
9							$-S$						1	
10						S								1
	$V_{\xi T}$			$V_{\xi N}$				$V_{\eta T}$			$V_{\eta N}$			

Сформировав матрицы W и Q путем преобразования матрицы V в соответствии с матрицами π_{XX}, π_{EX} и π_{XJ}, приходим к уравнению:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
-K_4 & & 1 & & -1 & & -1 \\
\hline
-n & 1 & & & & & \\
\hline
 & & 1 & & n & & \\
\hline
 & & & 1 & & & \\
\hline
-K_8 & -K_8 & & & 1 & & \\
\hline
-S & & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{|c|}
\hline
x_4 \\
\hline
x_5 \\
\hline
f_6 \\
\hline
f_7 \\
\hline
f_8 \\
\hline
v_9 \\
\hline
f_{10} \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & & \\
\hline
 & n & -n \\
\hline
 & & \\
\hline
 & pB_7 & \\
\hline
 & K_8 & \\
\hline
 & S & \\
\hline
-S & & \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{|c|}
\hline
p_1(t) \\
\hline
x_2(t) \\
\hline
x_3(t) \\
\hline
\end{array}.
$$

Решив это уравнение (например, с помощью алгоритма Гаусса или LU-разложения), получим выражения для переменных через задающие вершины p_1, x_2, x_3.

4. Иерархия дуг. При формировании математической модели по изложенному алгоритму накладывается обязательное условие: все дуги независимых источников продольных величин (e-дуги) должны быть включены в дерево, а дуги независимых источников поперечных величин (j-дуги) — в дополнение. Как уже отмечалось в (5. 6), для корректно поставленной задачи это условие всегда выполнимо, так как e-дуги не могут образовать контуров, а j-дуги — сечений (в противном случае некоторые из них были бы зависимыми от других в соответствии с уравнениями связей).

Дуги полюсных графов (y-дуги и z-дуги), вообще говоря, могут быть распределены между деревом и дополнением произвольно. Однако в зависимости от того, как решается этот вопрос, матрица W может иметь более или менее удобную для дальнейшего анализа форму. Поскольку решение или преобразование уравнений осуществляется чаще всего методами исключения, то наиболее желательной является такая форма матрицы W, когда элементы ее главной диагонали не равны нулю, а еще лучше равны единице (регулярная форма).

Для достижения этой цели необходимо, прежде всего, записывать строки компонентной матрицы V в таком же порядке, в каком расположены столбцы в ее субматрицах V_ξ и V_η. Очевидно, единичные элементы компонентных уравнений (в неявной форме) должны попасть в $V_{\xi T}$ и $V_{\eta N}$ — субматрицы, которые при преобразовании матрицы V не претерпевают изменений. А это значит, что z-дуги целесообразно включить в дерево, а y-дуги — в дополнение.

Взаимоопределенные ветви дерева целесообразно представить как z-дуги, а взаимоопределенные хорды — как y-дуги.

Приведенное правило не всегда может быть выполнимо полностью, однако его соблюдение всегда приводит к матрице W в наиболее удобной форме. Например, дугу *4* графа гидромеханической системы (рис. 170, *б*) следовало бы включить в дополнение, так как она представлена как y-дуга компонентным уравнением $f_4 = K_4 x_4$. Но тогда вместо нее пришлось бы ввести в дерево одну из дуг *6*, *8* или *10*. Дуги *6* и *10* являются существенно y-дугами, а дуга *8* относится к тому же типу, что и дуга *4*. Если быть до конца последовательным, то следовало бы воспользоваться тем обстоятельством, что дуга *4* взаимоопределенная и представить ее как z-дугу уравнением $x_4 = \frac{1}{K_4} f_4$.

Для получения математической модели системы в дифференциальной форме необходимо использовать только те полюсные уравнения, которые выражают поперечные или продольные переменные через производные. Соответствующие компоненты в первом случае представляются y-дугами (емкости, массы), а во втором — z-дугами (индуктивности, пружины). При несоблюдении этого условия математическая модель может содержать интегральные операторы.

5. Переменные состояния. Переходя к изложению вопросов, связанных с формированием уравнений переменных состояния, будем пользоваться терминами и обозначениями электрических величин. Соответствующие соотношения для других физических систем легко получаются на основе электрических аналогий (см. табл. 4).

Так как дифференциальные уравнения переменных состояния должны содержать только производные первого порядка, то для емкостных и индуктивных дуг используются полюсные уравнения в виде:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt};\ i_L = L\frac{di_L}{dt}.$$

Напряжения на емкостях u_C и токи в индуктивностях i_L, производные которых входят в полюсные уравнения, называют дифференциальными переменными. В отличие от них переменные, которые не содержатся под знаком производной, называются алгебраическими переменными.

Ясно, что совокупность переменных состояния системы образуется из всех тех дифференциальных переменных u_C и i_L, которые являются взаимно независимыми. Поскольку в общем случае векторы u_C и i_L могут содержать зависимые переменные, то необходимо выяснить условия такой зависимости и способы выбора взаимно независимой совокупности дифференциальных переменных.

Если некоторый контур содержит только задающие источники напряжения и емкости (рис. 171, *а*), то напряжения на одной из них выражаются через напряжения источников и напряжения на других емкостях контура. Аналогично при наличии сечения, образованного только задающими источниками тока и индуктивностями (рис. 171, *б*), ток в одной из индуктивностей выражается через токи источников и токи в других индуктивностях сечения. Контуры и сечения, обусловливающие зависимость переменных состояния, будем называть *особыми*. Так как эта зависимость связана исключительно со структурой схемы, то соответствующие переменные будем называть *топологически зависимыми*.

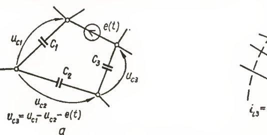


Рис. 171. Особые контур (*а*) и сечение (*б*).

Уравнения в неоднородном координатном базисе будут содержать все независимые напряжения на емкостях и токи в индуктивностях при условии, что они входят в векторы u_{XT} и i_{XN}. Это можно обеспечить на этапе формироьания фундаментального дерева, включая в него все задающие источники напряжения и максимально возможное число емкостных дуг (*C*-дуг). В то же время все задающие источники тока и максимально возможное число индуктивных дуг (*L*-дуг) должно остаться в дополнении. Тогда переменные состояния представляются векторами напряжений на емкостных ветвях дерева u_{CT} и токов в индуктивных хордах i_{LN}.

Итак, при формировании уравнений переменных состояния необходимо выделить из множества дуг компонентов системы подмножества *C*-дуг и *L*-дуг, которые будем называть *реактивными дугами*, а остальные будем рассматривать как *x*-дуги. Очевидно, изложенное выше требование о распределении реактивных дуг между деревом и дополнением будет обеспечено, если фундаментальное дерево формировать в соответствии со следующей иерархией дуг:

$$\frac{\overrightarrow{\text{Дерево}}}{\underleftarrow{e,\ C,\ x,\ L,\ j}\ \text{Дополнение}}\ .$$

Иерархию внутри x-дуг целесообразно (хотя и не обязательно) принять в соответствии с приведенной в (4).

6. Уравнения переменных состояния. Топологические уравнения в системе координат, которая определяется выбранным в соответствии с изложенными требованиями фундаментальным деревом, запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ i_{CT} \\ i_{XT} \\ i_{LT} \\ i_{CN} \\ i_{XN} \\ i_{LN} \\ j(t) \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} -\pi^t_{EC} & -\pi^t_{CC} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi^t_{EX} & -\pi^t_{CX} & -\pi^t_{XX} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\pi^t_{EL} & -\pi^t_{CL} & -\pi^t_{XL} & -\pi^t_{LL} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\pi^t_{EJ} & -\pi^t_{CJ} & -\pi^t_{XJ} & -\pi^t_{LJ} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ u_{CT} \\ u_{XT} \\ u_{LT} \\ u_{CN} \\ u_{XN} \\ u_{LN} \\ u_J \end{bmatrix} = 0$$

Каждому из них соответствуют четыре матричных уравнения, образующие четыре пары взаимно дуальных соотношений. Компонентное уравнение для x-дуг в неявной форме имеет вид:

$$[V_{UT},\ V_{UN},\ V_{IT},\ V_{IN}] \begin{bmatrix} u_{XT} \\ u_{XN} \\ i_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} = 0.$$

Подставив сюда выражения векторов u_{XN} и i_{XT} из топологических уравнений, получим уравнение для безреактивных компонентов:

$$[V_{UT} + V_{UN}\pi^t_{XX},\ V_{IN} - V_{IT}\pi_{XX}] \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} =$$

$$= [-V_{UN}\pi^t_{CX},\ V_{IT}\pi_{XL}] \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + [-V_{UN}\pi^t_{EX},\ V_{IT}\pi_{XJ}] \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v.$$

Матрицы W_0, Q_1 и Q_2 определяются полученными выше выражениями и могут быть найдены преобразованием компонентной матрицы V для x-дуг с помощью субматриц матрицы сечений. Вектор алгебраических переменных x_0, вектор переменных состояния x и задающий вектор v выражаются следующим образом:

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнения переменных состояния можно сформировать на основе соотношений, следующих из топологических уравнений:

$$i_{CT} + \pi_{CC} i_{CN} = -\pi_{CX} i_{XN} - \pi_{CL} i_{LN} - \pi_{CJ} j(t);$$
$$u_{LN} - \pi^t_{LL} u_{LT} = \pi^t_{XL} u_{XT} + \pi^t_{CL} u_{CT} + \pi^t_{EL} e(t).$$

Объединяя эти соотношения в одно матричное уравнение и вводя векторы q и ψ, выражающиеся через заряды для емкостей и потокосцепления индуктивностей

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN}; \; \psi = \psi_{LN} - \pi^t_{LL} \psi_{LT},$$

находим:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CX} \\ \pi^t_{XL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi^t_{CL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi^t_{EL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v.$$

Решив уравнение $W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v$ относительно вектора x_0 и подставив его значение $x_0 = W_0^{-1}(Q_1 x + Q_2 v) = Q'_1 x + Q'_2 v$ в дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (\Theta_0 Q'_1 + \Theta_1) x + (\Theta_0 Q_2 + \Theta_2) v = \Theta'_1 x + \Theta'_2 v.$$

Вектор x_0 можно исключить с помощью алгоритма Гаусса—Жордана (3.4.3) над блочной матрицей Λ (по столбцам матрицы W_0):

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ \hline W_0 & Q_1 & Q_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \Theta'_1 & \Theta'_2 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 \\ \hline \end{array}.$$

Вектор $\tilde{x} = (q, \psi)^t$ выражается через заряд q и потокосцепление ψ, которые, в свою очередь, являются функциями напряжений на емкостях и токах в индуктивностях:

$$q = \varphi_C(u_C); \ \psi = \varphi_L(i_L).$$

Алгоритм формирования уравнений переменных состояния имеет свои особенности для линейных и нелинейных систем, которые рассматриваются ниже.

7. Линейные системы. Для линейных систем $q_C = Cu_C$ и $\psi_L = Li_L$, где C и L — квадратные матрицы, элементами которых являются емкости и индуктивности реактивных двухполюсников. Матрицы C и L (при отсутствии индуктивных связей) диагональны, а если имеются индуктивно связанные двухполюсники, то L не диагональна, но симметрична. Переменные q и ψ можно выразить следующим образом:

$$q = q_{CT} + \pi_{CC}q_{CN} = [1 \ \pi_{CC}]\begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC}q_C = \Pi_{CC}Cu_C;$$

$$\psi = \psi_{LN} - \pi^t_{LL}\psi_{LT} = [-\pi^t_{LL} \ 1]\begin{bmatrix} \psi_{LT} \\ \psi_{LN} \end{bmatrix} = \mathrm{P}_{LL}\psi_L = \mathrm{P}_{LL}Li_L.$$

Из топологических уравнений следуют соотношения $u_{CN} = \pi^t_{CC}u_{CT} + \pi^t_{EC}e$ и $i_{LT} = -\pi_{LL}i_{LN} - \pi_{LJ}j$, на основании которых выразим векторы u_C и i_L:

$$u_C = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ u_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi^t_{CC} \end{bmatrix} u_{CT} + \begin{bmatrix} 0 \\ \pi^t_{EC} \end{bmatrix} e(t) = \Pi^t_{CC}u_{CT} + \Pi^t_{EC}e(t);$$

$$i_L = \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi_{LL} \\ 1 \end{bmatrix} i_{LN} - \begin{bmatrix} \pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} j(t) = \mathrm{P}^t_{LL}i_{LN} + \mathrm{P}^t_{LJ}j(t).$$

Подставляя эти выражения в формулы для q и ψ, получаем:

$$q = (\Pi_{CC}C\Pi^t_{CC})u_{CT} + \Pi_{CC}C\Pi^t_{EC}e(t);$$

$$\psi = (\mathrm{P}_{LL}L\mathrm{P}^t_{LL})i_{LN} + \mathrm{P}_{LL}L\mathrm{P}^t_{LJ}j(t),$$

на основании чего можно записать

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{CC}C\Pi^t_{CC} & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_{LL}L\mathrm{P}^t_{LL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{CC}C\Pi^t_{EC} & 0 \\ 0 & \mathrm{P}_{LL}L\mathrm{P}^t_{LJ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} = W_x x + \Theta_3 v.$$

Приравняв производную этого выражения полученному ранее соотношению, находим:

$$W_x \frac{dx}{dt} = \Theta_1' x + \Theta_2' v - \Theta_3 \frac{dv}{dt},$$

откуда получаем уравнения переменных состояния линейной системы в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv + B' \frac{dv}{dt},$$

где

$$A = W_x^{-1} Q_1'; \; B = W_x^{-1} Q_2'; \; B' = W_x^{-1} B'.$$

Вместо обращения матрицы W_x можно применить алгоритм Гаусса—Жордана по ее столбцам над блочной матрицей Λ_x:

$$\Lambda_x = \left| W_x \;\middle|\; \Theta_1' \;\middle|\; \Theta_2' \;\middle|\; -\Theta_3 \right| \to \left| 1 \;\middle|\; A \;\middle|\; B \;\middle|\; B' \right|.$$

Общая процедура формирования уравнений переменных состояния линейных систем иллюстрируется на рис. 172.

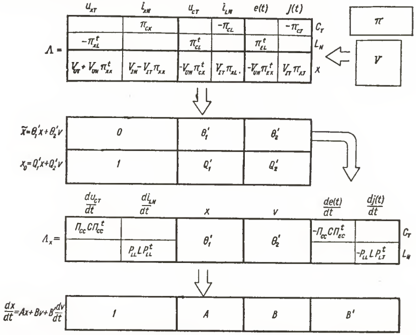


Рис. 172. Процедура формирования уравнений переменных состояния линейных систем.

Появление производной вектора v в уравнении переменных состояния обусловлено особыми контурами и сечениями с задающими источниками. Если такие источники в особых контурах отсутствуют, то $\pi_{EC} = 0$ и $\pi_{LJ} = 0$, следовательно, $\Theta_3 = 0$.

При отсутствии особых контуров вообще все дифференциальные переменные независимы и входят в векторы u_{CT} и i_{LN}, а матрицы π_{CC} и π_{LL} исчезают. Тогда $\Pi_{CC} = 1$ и $P_{LL} = 1$, вследствие чего матрица W_x имеет квазидиагональную структуру:

$$W_x = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix},$$

а при отсутствии индуктивных связей W_x — диагональная матрица, элементами которой являются параметры реактивных двухполюсников. В таких случаях умножение на обратную матрицу W_x^{-1} соответствует делению каждого уравнения переменных состояния на соответствующий диагональный элемент матрицы W_x.

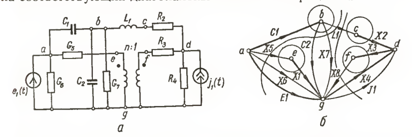


Рис. 173. Электрическая схема с идеальным трансформатором (*а*) и ее граф (*б*).

Рассмотрим в качестве примера линейную электрическую схему, рис. 173, *а*. В соответствии с выбранным фундаментальным деревом графа (рис. 173, *б*) запишем матрицу сечений для хорд:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} =$$

	C2	X5	X6	X7	X8	L1	J1
E1	1	1	1	1		1	
C1	−1			−1		−1	
X1		−1					
X2						−1	
X3					−1		
X4					−1	1	1

.

Компонентная матрица для x-дуг в неявной форме имеет вид:

	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	$X6$	$X7$	$X8$	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	$X6$	$X7$	$X8$
$X1$	1							$-n$								
$X2$		1								$-R_2$						
$X3$			1								$-R_3$					
$X4$				1								$-R_4$				
$X5$					$-G_5$								1			
$X6$						$-G_6$								1		
$X7$							$-G_7$								1	
$X8$									n							1
	V_{UT}				V_{UN}				V_{IT}				V_{IN}			

Преобразовав эту матрицу в ссответствии с субматрицами матрицы сечений, запишем блочную матрицу Λ:

$\Lambda =$

	u_{x1}	u_{x2}	u_{x3}	u_{x4}	i_{x5}	i_{x6}	i_{x7}	i_{x8}	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$j_1(t)$
$C1$							-1			1		
$L1$		1		-1					-1		1	
$X1$	1		n	n								
$X2$		1								R_2		
$X3$			1					$-R_3$				
$X4$				1				$-R_4$		$-R_4$		$-R_4$
$X5$	G_5				1						G_5	
$X6$						1					G_6	
$X7$							1		$-G_7$		G_7	
$X8$					n			1				

Пусть параметры компонентов схемы имеют следующие нормированные значения: $R_2 = R_3 = R_4 = 1$; $G_5 = G_6 = G_7 = 0{,}5$; $n = 2$; $C_1 = C_2 = 0{,}05$; $L_1 = 0{,}2$. Подставив эти значения в матрицу Λ и применив процедуру исключения по столбцам субматрицы W, получим:

u_{x1}	u_{x2}	u_{x3}	u_{x4}	i_{x5}	i_{x6}	i_{x7}	i_{x8}	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$j_1(t)$	
								—0,5	1	0,5		*C1*
								—1	—1,6	0,8	—0,6	*L1*
1									0,4	0,8	0,4	*X1*
	1								1			*X2*
		1							0,4	—0,2	0,4	*X3*
			1						—0,6	—0,2	—0,6	*X4*
				1					—0,2	0,1	—0,2	*X5*
					1					0,5		*X6*
						1		—0,5		0,5		*X7*
							1		0,8		0,8	*X8*

Отсюда имеем уравнения для векторов $\tilde{x}$ и x_0:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1 & -1{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix};$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \\ i_{x5} \\ i_{x6} \\ i_{x7} \\ i_{x8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0{,}4 \\ 0 & -0{,}6 \\ 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}6 \\ 0{,}2 & -0{,}6 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с заданными значениями емкостей и индуктивностей сформируем матрицы:

$$\Pi_{CC} C \Pi^t_{CC} = [1 - 1]\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [C_1 + C_2] = [0{,}1];$$

$$P_{LL} L P^t_{LL} = [1]\,[L_1]\,[1] = [L_1] = [0{,}2];$$

$$\Pi_{CC} C \Pi^t_{CC} = [1 - 1]\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-C_2] = [-0{,}05].$$

Полученные матрицы имеют первый порядок, так как схема характеризуется только двумя переменными состояния — напряжением на емкости u_{CI} и током в индуктивности i_{LI}. Матрица $P_{LL} L P^t_{LJ}$ отсутствует, поскольку нет особых сечений с источниками тока. Матрица Λ_x имеет вид:

$\Lambda_x =$

$\frac{du_{CI}}{dt}$	$\frac{di_{LI}}{dt}$	u_{CI}	i_{LI}	$e_1(t)$	$j_1(t)$	$\frac{de_1(t)}{dt}$	$\frac{dj_1(t)}{dt}$	
0,1		—0,5	1	—1,1	0,2	0,05		*CI*
	0,2	—1	—1,6	0,8	—0,6			*LI*

Разделив первую строку на 0,1, а вторую на 0,2, получим слева единичную матрицу, и, следовательно, уравнения переменных состояния имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{de_1(t)}{dt}.$$

8. Нелинейные системы. Изложенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния легко обобщается на нелинейные системы. При формировании фундаментального дерева из дуг безреактивных компонентов выделяются дуги нелинейных двухполюсников, причем управляемые током дуги помещаются в дерево (после e-дуг и C-дуг), а управляемые напряжением — в дополнение (перед L-дугами и j-дугами). Тогда матрица сечений запишется в виде:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EH} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CH} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{HX} & \pi_{HH} & \pi_{HL} & \pi_{HJ} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XH} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} \end{bmatrix},$$

где индекс H относится к нелинейным безреактивным дугам, а в рамку заключена субматрица матрицы сечений для безреактивных дуг.

Из топологических уравнений, определяемых этой матрицей, следуют соотношения:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CX} \\ \pi^t_{XL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi^t_{CL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi^t_{EL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CH} \\ \pi^t_{HL} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} i_{HT} \\ u_{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HX} \\ \pi^t_{XH} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HL} \\ \pi^t_{CH} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HJ} \\ \pi^t_{EH} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HH} \\ \pi^t_{HH} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$\frac{dx}{dt} = \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v + \Theta_3 x_H;$$

$$y_H = \Omega_0 x_0 + \Omega_1 x + \Omega_2 v + \Omega_3 x_H,$$

где векторы x_0, x и v определены, как и ранее; x_H и y_H — векторы переменных, связанных с нелинейными безреактивными компонентами:

$$x_H = \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}; \quad y_H = \begin{bmatrix} i_{HT} \\ u_{HT} \end{bmatrix}.$$

Вектор x_0 можно исключить из этих выражений на основе уравнения для переменных безреактивных линейных компонентов

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v + Q_3 x_H,$$

которое отличается от линейного (6) только наличием в правой части слагаемого $Q_3 x_H$, где

$$Q_3 = [-V_{UN}\pi^t_{HX},\ V_{IT}\pi_{XH}].$$

Для исключения вектора x_0 удобно, как и ранее, применить алгоритм Гаусса—Жордана (но теперь блочная матрица Λ имеет более общий вид):

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \hline -\Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \hline W_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 \\ \hline 0 & \Omega'_1 & \Omega'_2 & \Omega'_3 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \\ \hline \end{array}.$$

Таким образом, приходим к уравнениям:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \Theta_1' x + \Theta_2' v + \Theta_3' x_H;$$

$$y_H = \Omega_1' x + \Omega_2' v + \Omega_3' x_H;$$

$$x_0 = Q_1' x + Q_2' v + Q_3' x_H.$$

Рис. 174. Транзисторный усилитель (a), его схема замещения ($б$) и граф ($в$).

Если нелинейными являются только безреактивные компоненты, то первое уравнение таким же способом, как и линейное, может быть приведено к нормальной форме, но теперь оно содержит член с вектором x_H переменных нелинейных компонентов. Уравнение переменных состояния совместно с нелинейным алгебраическим уравнением образует систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bv + Fx_H \\ y_H &= \Omega_1' x + \Omega_2' v + \Omega_3' x_H \end{aligned}\right\},$$

решение которой при заданных нелинейных функциях $\varphi(x_H, y_H) = 0$, векторе v и начальных условиях $x(t_0) = x_0$ позволяет найти векторы x и x_H, а значит, и вектор x_0.

При наличии нелинейных реактивных компонентов обычно используется уравнение для производной вектора $\tilde{x}$. Оно решается совместно с нелинейным алгебраическим уравнением каким-либо численным методом, причем вектор $\tilde{x}$ определяется на каждом шаге интегрирования на основе заданных функций $q_C(u_C)$ и $\psi_L(i_L)$ или $C(u_C)$ и $L(i_L)$.

Не останавливаясь на численных методах решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, проиллюстрируем формирование уравнений переменных состояния на примере транзисторного усилителя (рис. 174, *а*). Замещая транзистор нелинейной схемной моделью (см. рис. 151, *б*), получаем схему рис. 174, *б*. Нелинейные безреактивные компоненты $Д_к$ и $Д_э$ задаются уравнениями:

$$i'_к = i_{к0}(e^{\gamma u_к} - 1); \quad i'_э = i_{э0}(e^{\gamma u_э} - 1),$$

а нелинейные емкости выражаются функциями

$$C_к = C_{кб} + C_{к0}e^{\gamma u_к}; \quad C_э = C_{эб} + C_{э0}e^{\gamma u_э},$$

где $i_{к0}$, $i_{э0}$, $C_{кб}$, $C_{эб}$, $C_{к0}$, $C_{э0}$ и γ — величины, выражающиеся через физические параметры транзистора и определяемые соответствующими вычислениями или экспериментальным путем.

Так как зависимые источники тока управляются токами нелинейных двухполюсников $Д_к$ и $Д_э$, то для разделения линейных и нелинейных компонентов введем управляющие короткозамкнутые дуги по току. Граф схемы с выбранным деревом показан на рис. 174, *в*. Матрица сечений для хорд имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} & \pi_{EH} \\ \pi_{CX} & \pi_{CH} \\ \pi_{XX} & \pi_{XH} \end{bmatrix} =$$

	X4	X5	X6	X7	X8	X9	H1	H2
E1		−1	1	1				
E2	1	1						
C1	−1				−1		1	
C2	1		1			−1		1
X1							−1	
X2								−1
X3	1		1					

Компонентная матрица V для линейных безреактивных дуг представляется следующим образом (для короткозамкнутых дуг $u_{X1} = 0$ и $u_{X2} = 0$):

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	1																	
X2		1																
X3			1									$-R_3$						
X4				$-G_4$									1					
X5					$-G_5$									1				
X6						$-G_6$									1			
X7							$-G_7$									1		
X8											$-\alpha_N$						1	
X9										$-\alpha_I$								1

V_{UT} $\quad V_{UN}$ $\quad V_{IT}$ $\quad V_{IN}$

Сформировав соответствующие матрицы, запишем блочную матрицу Λ:

	u_{X1}	u_{X2}	u_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	i_{X7}	i_{X8}	i_{X9}	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	e_2	i_{H1}	i_{H2}
C1				−1				−1						−1	
C2				1		1			−1						−1
H1	1									1					
H2		1									1				
X1	1														
X2		1													
X3			1	R_3		R_3									
X4			$-G_4$	1						$-G_4$	G_4		G_4		
X5					1							$-G_5$	G_5		
X6			$-G_6$			1					G_6	G_6			
X7							1					G_7			
X8								1							α_N
X9									1					α_I	

При использовании общих соотношений для формирования матрицы Λ следует иметь в виду, что в рассматриваемом примере некоторые из топологических субматриц отсутствуют или нулевые. Применив алгоритм исключения и обозначив $\beta = 1 + R_3(G_4 + G_6)$, получим:

$u_{XT} i_{XN}$	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	e_2	i_{H1}	i_{H2}	
0	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_6)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_4(1+R_3G_6)}{\beta}$	-1	α_N	$C1$
	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{G_4+G_6}{\beta}$	$-\frac{G_6}{\beta}$	$-\frac{G_4}{\beta}$	α_I	-1	$C2$
0	1						$H1$
		1					$H2$
							$X1$
							$X2$
	$\frac{R_3G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3}{\beta}(G_4+G_6)$	$-\frac{R_3G_6}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4}{\beta}$			$X3$
1	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_6)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_4(1+R_3G_6)}{\beta}$			$X4$
			$-G_5$	G_5			$X5$
	$\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_6}{\beta}$	$\frac{G_6(1+R_3G_4)}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$			$X6$
			G_7				$X7$
						α_N	$X8$
					α_I		$X9$

Отсюда имеем уравнения переменных состояния вместе с нелинейными алгебраическими уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_{C1} \\ q_{C2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} -G_4(1+R_3G_6) & G_4 \\ G_4 & -(G_4+G_6) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix}-R_3G_4G_6 & G_4(1+R_3G_6)\\ -G_6 & -G_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & \alpha_N\\ \alpha_I & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{HI}\\ i_{H2}\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}u_{HI}\\ u_{H2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{CI}\\ u_{C2}\end{bmatrix}.$$

Остальные строки преобразованной матрицы Λ дают уравнения для алгебраических переменных линейных компонентов.

9. Выходное уравнение. Подлежащие определению переменные можно рассматривать как составляющие искомого вектора y, который выражается *выходным уравнением* через вектор переменных состояний x, задающий вектор v и (в случае нелинейных систем) вектор x_H, т. е.

$$y = Cx + Dv + Hx_H .$$

Если искомые переменные входят в векторы x, x_0 и y_H, то выходное уравнение формируется непосредственно из соответствующих строк преобразованной матрицы Λ. Так как вектор x_0 содержит напряжения ветвей дерева u_{XT} и токи хорд i_{XN}, то целесообразно включать в дерево (если это возможно) x-дуги искомых напряжений и в дополнение — x-дуги искомых токов. В общем случае можно получить уравнение для искомой переменной линейной комбинацией строк преобразованной матрицы Λ. Например, для входного тока $i_{\text{вх}}$ усилителя (рис. 174, *а*) имеем:

$$i_{\text{вх}} = -i_{E1} = -i_5 + i_6 + i_7 =$$
$$= \begin{bmatrix}\frac{RG_4G_6}{\beta} & \frac{G_6}{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix}G_5 + G_7 + \frac{G_6(1+R_3G_4)}{\beta} & -G_6 - \frac{R_3G_4G_6}{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2\end{bmatrix}.$$

Вхождение искомых переменных в вектор x_0 всегда можно обеспечить, вводя фиксирующие короткозамкнутые ветви дерева для токов и разомкнутые хорды для напряжений.

10. Ограничения и обобщения. Внимательный читатель, по-видимому, заметил, что при изложении алгоритма формирования уравнений переменных состояния допускался ряд условий, которые специально не оговаривались, но подразумевались при записи основных соотношений.

Предполагалось, что управляемыми и управляющими являются только дуги безреактивных компонентов, к которым отнесены также

короткозамкнутые и разомкнутые дуги, фиксирующие управляющие токи и напряжения. При этом число управляющих величин для данной дуги не ограничивается, но управляющие параметры рассматриваются как постоянные величины.

Ограничение на характер управляющих двухполюсников легко снимается, если функции управления возложить на дополнительно вводимые дуги, фиксирующие управляющие переменные. Последовательно с управляющим по току двухполюсником вводится короткозамкнутая дуга, а параллельно с управляющим по напряжению двухполюсником — разомкнутая дуга (рис. 175).

Обобщение на случаи управления по нелинейной зависимости достигается введением дуг, фиксирующих управляющие переменные, и отнесением их к множеству дуг нелинейных компонентов. При этом в векторе x_H следует положить нулю компоненты, соответствующие управляющим дугам, что равносильно их удалению совместно с соответствующими столбцами матриц Θ_3', Ω_3' и Q_3'.

Рис. 175. Введение в граф дополнительных управляющих дуг.

Алгоритм формирования уравнений переменных состояния можно обобщить и на случаи управления по производной. Для этого необходимо представить дугу, управляющую по производной тока, в виде последовательного соединения двух емкостей с равными (например, единичными) и противоположными по знаку значениями (общая емкость равна бесконечности, и, следовательно, напряжение дуги равно нулю). Параллельно положительной емкости вводится разомкнутая дуга, управляющая по напряжению $u = \frac{di}{dt}$ (рис. 176, *а*). Аналогично решается вопрос и с управлением по производной напряжения (рис. 176, *б*). Ясно, что при этом появляются зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

При моделировании нелинейных систем по изложенному алгоритму дуги всех нелинейных управляемых током компонентов должны войти в дерево, а дуги всех нелинейных управляемых напряжением компонентов— в дополнение (распределение взаимоопределенных дуг нелинейных компонентов между деревом и дополнением произвольное). Это требование является топологическим ограничением, которое служит одним из *условий детерминированности* системы, т. е. возможности получения для искомых переменных однозначного решения при заданных воздействиях и начальных условиях. Невыполнение этого требования служит

признаком того, что система может оказаться недетерминированной. В таких случаях требуются более тонкие методы исследования.

В соответствии с принятой иерархией управляющие по току короткозамкнутые дуги вводятся в дерево после емкостных дуг, а управляющие по напряжению разомкнутые дуги — в дополнение

Рис. 176. Схемы и графы зависимых источников, управляемых производными по току (*а*) и напряжению (*б*).

после индуктивных дуг (для нелинейных систем дуги нелинейных компонентов имеют преимущества перед управляющими дугами линейных компонентов). При этом в дерево попадает минимально возможное число емкостных дуг, а в дополнение — максимальное число индуктивных дуг. Как правило, тем самым обеспечивается

$$\tilde{\Lambda} = \underbrace{\begin{array}{c|c|c|c} \frac{du_C}{dt} & \frac{di_L}{dt} & u_{XT} & i_{XN} \\ \hline \Pi_{CC} C \Pi^t_{CC} & & & \pi_{CX} \\ \hline & \mathrm{P}_{LL} L \mathrm{P}^t_{LL} & -\pi^t_{XL} & \\ \hline & & V_{UT} + V_{UN}\pi^t_{XX} & V_{IN} - V_{IT}\pi_{XX} \end{array}}_{\tilde{\Lambda}_1}$$

вхождение в уравнения только независимых переменных, которые составляют совокупность переменных состояния. Однако при наличии особых контуров с короткозамкнутыми дугами и особых сечений с разомкнутыми дугами (см. рис. 171) в дерево войдут все емкости таких контуров, а в дополнение — все индуктивности таких сечений. Вследствие этого векторы u_{CT} и i_{LN} будут содержать зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

11. Исключение зависимых дифференциальных переменных. При наличии зависимых переменных математическую модель линейной системы удобно строить на основании одновременного использования уравнений для дифференциальных и алгебраических переменных в виде:

$$\left.\begin{aligned} W_x \frac{dx}{dt} - \Theta_0 x_0 - \Theta_1 x - \Theta_2 v + \Theta_3 \frac{dv}{dt} = 0 \\ W_0 x_0 - Q_1 x - Q_2 v = 0 \end{aligned}\right\},$$

которым соответствует матрица

$$\tilde{\Lambda} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \frac{dx}{dt} & x_0 & x & v & \frac{dv}{dt} \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} W_x & -\Theta_0 & -\Theta_1 & -\Theta_2 & \Theta_3 \\ \hline 0 & W_0 & -Q_1 & -Q_2 & 0 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \frac{dx}{dt}, x_0 & x, v, \frac{dv}{dt} \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c} \tilde{\Lambda}_1 & \tilde{\Lambda}_2 \end{array}\right| \end{array}.$$

Для получения уравнений относительно векторов $\frac{dx}{dt}$ и x_0 необходимо преобразовать матрицу $\tilde{\Lambda}$ к такому виду, чтобы $\tilde{\Lambda}_1$ была единичной (с точностью до перестановки строк и столбцов). Этого можно достигнуть с помощью алгоритма Гаусса—Жордана. В развернутом виде матрица $\tilde{\Lambda}$ записывается следующим образом:

u_C	i_L	$e(t)$	$j(t)$	$\frac{de(t)}{dt}$	$\frac{dj(t)}{dt}$
	π_{CL}		π_{CJ}	$\Pi_{CC} C \Pi^t_{EC}$	
$-\pi^t_{CL}$					$P_{LL} L P^t_{LJ}$
$V_{UN} \pi^t_{CX}$	$-V_{IT} \pi_{XL}$	$V_{UN} \pi^t_{EX}$	$-V_{IT} \pi_{XJ}$		

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\tilde{\Lambda}_2}$

В процессе преобразования $\tilde{\Lambda}_1$ к единичной матрице в ней может появиться нулевая (вырожденная) строка, что препятствует завершению этого преобразования и является признаком зависимости дифференциальных переменных. Соответствующее этой вырожденной строке уравнение не содержит алгебраических переменных и производных, а связывает только дифференциальные переменные и задающие функции времени. Оно и используется для исключения зависимых дифференциальных переменных из уравнений системы.

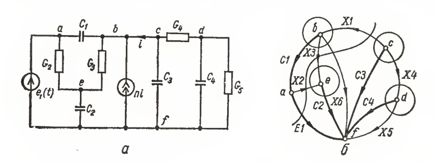


Рис. 177. Схема с зависимыми дифференциальными переменными (a) и ее граф ($б$).

Проиллюстрируем исключение зависимых дифференциальных переменных на примере схемы рис. 177, a, ее граф изображен на рис. 177, $б$. Как видно, граф содержит особый контур с короткозамкнутой управляющей дугой и источником напряжения ($E1$, $C1$, $C3$, $X1$). Поэтому все емкостные дуги этого контура попали в дерево, хотя напряжение одной из них (u_{C1} или u_{C3}) зависимо (например, $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$). По той же причине короткозамкнутая дуга $X1$ не может быть включена в дерево. Для выбранного фундаментального дерева матрица сечений имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} \\ \pi_{CX} \end{bmatrix} =$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
E1	−1	1	1			1
C1	−1		1			1
C2		−1	−1			
C3	1			1		
C4				−1	1	

.

Компонентная матрица имеет следующий вид:

$V =$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	1											
X2		$-G_2$						1				
X3			$-G_3$						1			
X4				$-G_4$						1		
X5					$-G_5$						1	
X6							n					1

Так как дуги всех безреактивных компонентов вошли в дополнение, то субматрицы V_{UT} и V_{IT} (как и субматрица π_{XX}) отсутствуют. Формируем блочную матрицу $\tilde{\Lambda}$ (штрихами отмечены производные):

	u'_{C1}	u'_{C2}	u'_{C3}	u'_{C4}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	u_{C3}	u_{C4}	$e_1(t)$
C1	C_1				-1		1			1					
C2		C_2				-1	-1								
C3			C_3		1			1							
C4				C_4				-1	1						
X1											-1		1		-1
X2						1						G_2			$-G_2$
X3							1				$-G_3$	G_3			$-G_3$
X4								1					$-G_4$	G_4	
X5									1					$-G_5$	
X6					$-n$					1					

Здесь сразу же обнаруживается вырожденная строка, соответствующая уравнению для $X1$ (ее элементы набраны жирным шрифтом), поэтому имеем зависимость

$$-u_{C1} + u_{C3} - e_1(t) = 0.$$

Исключим, например, переменную $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$, что соответствует прибавлению столбца для u_{C3} к столбцам для u_{C1} и $e_1(t)$. Для исключения производной u'_{C3} необходимо продифференци-

ровать полученное соотношение, в результате чего возникает производная по задающему напряжению, т. е.

$$\frac{du_{C3}}{dt} = \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{de_1(t)}{dt}.$$

Образовав для производной $e_1'(t)$ дополнительный столбец, необходимо столбец для u_{C3}' прибавить к столбцам для u_C и $e_1'(t)$. Итак, вырожденная строка дает информацию об операциях, которые необходимо выполнить по столбцам матрицы $\tilde{\Lambda}$ для исключения зависимостей переменной. Разумеется, после этого столбец исключаемой переменной и вырожденную строку следует удалить из матрицы $\tilde{\Lambda}$.

Пусть в нашем примере заданы следующие нормированные значения параметров компонентов (значение управляющего параметра n будет дано позже):

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2}; \; C_2 = 2; \; C_4 = \frac{25}{14}; \; G_2 = G_3 = 1; \; G_4 = \frac{5}{4}; \; G_5 = \frac{10}{7}.$$

Подставив эти значения в матрицу Λ вместе с добавленным столбцом для $e_1'(t)$, после выполнения указанных операций над столбцами и удаления вырожденной строки, получим:

u_{C1}'	u_{C2}'	u_{C4}'	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	u_{C4}	$e_1(t)$	$e_1'(t)$	
$\frac{1}{2}$			-1		1			1						C1
	2			-1	-1									C2
$\frac{1}{2}$			1			1							$\frac{1}{2}$	C3
		$\frac{25}{14}$				-1	1							C4 .
				1						1		-1		X2
					1				-1	1		-1		X3
						1			$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$		X4
							1				$-\frac{10}{7}$			X5
			$-n$					1						X6

Применяя алгоритм исключения Гаусса—Жордана, приходим к матрице (опорные элементы отмечены жирными цифрами):

u'_{C1}	u'_{C2}	u'_{C4}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	u_{C4}	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	
1								1	$\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	*C1*
	1								$-\frac{1}{2}$	1		-1		*C2*
			1					$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	*C3*
		1							$-\frac{7}{10}$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{10}$		*C4*
				1						1		-1		*X2*.
					1				-1	1		-1		*X3*
						1			$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$		*X4*
							1				$-\frac{10}{7}$			*X5*
								$1-\frac{n}{2}$	$\frac{1}{8}n$	$\frac{1}{2}n$	$\frac{-5}{8}n$	$\frac{1}{8}n$	$\frac{1}{4}n$	*X6*

Дальнейший ход решения задачи зависит от численного значения управляющего параметра. При $n \neq 2$ завершается процедура исключения с опорным элементом в последней строке. При $n = 2$ имеем вырожденную строку, которой соответствует уравнение

$$\frac{1}{4} u_{C1} + u_{C2} - \frac{5}{4} u_{C4} + \frac{1}{4} e_1(t) + \frac{1}{2} \frac{de_1(t)}{dt} = 0.$$

Это свидетельствует о зависимости дифференциальных переменных, но здесь эта зависимость обусловлена не структурой схемы, а численными значениями параметров компонентов. Поэтому ее естественно называть *компонентной зависимостью* переменных. Исключение компонентно зависимой переменной, например u_{C4}, проводится тем же способом, что и при топологической зависимости, на основе уравнений

$$u_{C4} = \frac{1}{5} u_{C1} + \frac{4}{5} u_{C2} + \frac{1}{5} e_1(t) + \frac{2}{5} \frac{de_1(t)}{dt};$$

$$\frac{du_{C4}}{dt} = \frac{1}{5} \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{4}{5} \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{1}{5} \frac{de_1(t)}{dt} + \frac{2}{5} \frac{d^2 e_1(t)}{dt^2}.$$

Вводя в матрицу $\tilde{\Lambda}$ дополнительный столбец для второй производной, после выполнения соответствующих операций над столбцами (столбцы для u_{C4} и u'_{C4} прибавляются к другим столбцам с коэффициентами, определяемыми уравнениями для исключаемой переменной и ее производной) имеем:

u'_{C1}	u'_{C2}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	$e''_1(t)$	
1							1	2	-2	2			$C1$
	1							$-\frac{1}{2}$	1	-1			$C2$
		1					$-\frac{1}{2}$						$C3$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$							$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$C4$
			1						1	-1			$X2$
				1				-1	1	-1			$X3$
					1			-1	1	-1	$\frac{1}{2}$		$X4$
						1		$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		$X5$

.

Завершая процедуру исключения, получаем окончательно

u'_{C1}	u'_{C2}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	$e''_1(t)$	
1									2	2	4	2	$C1$
	1							$-\frac{1}{2}$	1	-1			$C2$
		1						1	-2		-2	-1	$C3$
							1	2	-4		-4	-2	$C4$
			1						1	-1			$X2$
				1				-1	1	-1			$X3$
					1			-1	1	-1	$\frac{1}{2}$		$X4$
						1		$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		$X5$

Как видно, $\bar{\Lambda}$ преобразовалась в матрицу, из которой можно получить единичную матрицу перестановкой строк и столбцов (в нашем примере достаточно переставить столбец для i_{X6}). В результате можно записать уравнения переменных состояния и выражение для алгебраических переменных:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{de_1(t)}{dt} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{d^2e_1(t)}{dt};$$

$$\begin{bmatrix} i_{X1} \\ i_{X6} \\ i_{X2} \\ i_{X3} \\ i_{X4} \\ i_{X5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}\frac{de_1(t)}{dt}.$$

Из рассмотренного примера видно, что особые контуры с короткозамкнутыми дугами (как и особые сечения с разомкнутыми дугами) сильно усложняют процедуру формирования уравнений переменных состояния. К счастью, подобные случаи в практике встречаются крайне редко.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите примеры многополюсных компонентов, наличие которых в физической системе приводит к необходимости использования неоднородного координатного базиса.

2. Изобразите процесс формирования матрицы $Q = [-V_{\xi N}\pi^t_{EX}, V_{\eta T}\pi_{X}]$ схемой, аналогичной указанной на рис. 169 для матрицы W.

3. Сформируйте уравнения системы (см. рис. 170) в неоднородном координатном базисе, включив в фундаментальный лес, наряду с e-дугами *1, 2, 3*, дуги *6* и *10*. Сравните результат с полученным в (3) и объясните, почему матрица W получилась в нерегулярной форме.

4. Почему при формировании математической модели в неоднородном координатном базисе взаимоопределенные ветви дерева целесообразно представить как z-дуги, а взаимоопределенные хорды — как y-дуги?

5. Сформируйте уравнения в неоднородном координатном базисе для механической системы рис. 144.

6. Переменные $q = q_{CT} + \pi_{CC}q_{CN}$ и $\psi = \psi_{LN} - \pi^t_{LL}\psi_{LN}$ называют соответственно зарядами сечений и потокосцеплениями контуров. Почему?

7.* Покажите, что при отсутствии индуктивных связей вектор $\tilde{x}$ можно представить в виде:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T + \pi_{CC}C_N\pi^t_{CC} & 0 \\ 0 & L_N + \pi^t_{LL}L_T\pi_{LL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{CC}C_N\pi^t_{EC} & 0 \\ 0 & \pi^t_{LL}L_T\pi^t_{LJ} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

В какой мере можно ослабить условие для индуктивных связей, чтобы это выражение еще было справедливо?

8. Запишите выражение для вектора $\tilde{x}$ при отсутствии особых контуров и сечений.

9. Выведите уравнения переменных состояния для электрической схемы (см. рис. 121, *а*).

10. Выведите уравнения переменных состояния для механической системы (см. рис. 123).

11. Сформируйте уравнения переменных состояния для электрической схемы (см. рис. 173) при заданных численных значениях параметров, выполнив все операции в скалярной форме без применения матриц, для чего:

а) составьте по законам Кирхгофа топологические уравнения для всех независимых сечений и контуров, определяемых выбранным фундаментальным деревом;

б) запишите полюсные уравнения для безреактивных компонентов схемы в неявной форме;

в) выразите напряжения безреактивных хорд и токи безреактивных ветвей дерева из уравнений сечений и контуров и подставьте их в полюсные уравнения;

г) решите систему полюсных уравнений относительно алгебраических переменных — напряжений ветвей дерева и токов хорд безреактивных компонентов;

д) выразите из топологических уравнений токи емкостных дуг и напряжения индуктивных дуг и подставьте в эти уравнения найденные в предыдущем пункте алгебраические величины;

е) воспользовавшись полюсными уравнениями реактивных компонентов замените токи емкостных дуг через производные их напряжений и напряжения индуктивных дуг через производные их токов;

ж) исключите из системы уравнений для реактивных компонентов, полученных в предыдущем пункте, зависимые дифференциальные переменные — напряжения емкостных хорд и токи индуктивных ветвей дерева;

з) запишите уравнения переменных состояния и сравните их с полученными в (7).

12. Объясните причины отсутствия некоторых субматриц в матрице сечений для графа, изображенного на рис. 174, *в*.

13. Введите в граф (рис. 174, *в*) короткозамкнутую дугу, фиксирующую входной ток $i_{вх}$ и получите уравнения переменных состояния и выходное уравнение.

14. Изменяется ли вид уравнений переменных состояния при введении фиксирующих дуг для искомых величин? Если нет, то почему?

15. Почему изложенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния не допускает:

а) включения в дерево короткозамкнутых дуг, если они принадлежат особому контуру?

б) включения в дополнение разомкнутых дуг, если они принадлежат особому сечению?

16. Перечислите все особенности, которые вносят в процедуру формирования уравнений переменных состояния, особые контуры и сечения, состоящие:

а) только из реактивных двухполюсников;

б) из реактивных двухполюсников и источников;

в) из реактивных двухполюсников и фиксирующих дуг;

г) из реактивных двухполюсников, источников и фиксирующих дуг.

17. Сформируйте уравнения переменных состояния для схемы рис. 177, а при заданных численных значениях, исключив зависимые дифференциальные переменные u_{C1} и u_{C2}, и сравните результат с полученным в (11).

18. Покажите, что для схемы рис. 177, *а* условие компонентной зависимости дифференциальных переменных выражается соотношением:

$$n = \frac{C_1}{C_3} + 1.$$

19. По аналогии с электрическими цепями сформулируйте основные положения формирования уравнений переменных состояния для механических и гидравлических систем.

7. СОКРАЩЕННЫЙ КООРДИНАТНЫЙ БАЗИС

1. Исходные положения. При формировании математической модели в неоднородном координатном базисе размеры матрично-векторных параметров определяются в основном числом дуг полюсных графов компонентов системы. В тех случаях, когда система содержит большое число компонентов, это может привести к серьезным трудностям даже при использовании наиболее совершенных вычислительных машин. Поэтому большое практическое значение имеют вопросы, связанные с сокращением координатного базиса, в котором представляются уравнения системы. Один из путей решения этой задачи основан на подстановке полюсных уравнений в топологические уравнения, которые организуются специальным образом.

Ясно, что компонентные уравнения должны быть представлены в явной форме. При этом для их упрощения можно считать, что y-дуги не управляют по поперечным величинам, а z-дуги не управляют по продольным величинам. Если такое управление в системе имеет место, то указанные дуги освобождаются от него введением дополнительных управляющих дуг: последовательно с y-дугой короткозамкнутой дуги, управляющей по поперечной величине, а параллельно с z-дугой — разомкнутой дуги, управляющей по продольной величине. В дальнейшем короткозамкнутые дуги объединяются в множество s-дуг и представляются уравнением $\xi_S = 0$. Разомкнутые дуги объединяются в множество q-дуг и представляются уравнением $\eta_Q = 0$.

Итак, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что дуги полюсных графов компонентов системы управляются продольными величинами y-дуг ξ_Y, поперечными величинами z-дуг η_Z, поперечными величинами s-дуг η_S и продольными величинами q-дуг ξ_Q. Тогда компонентные уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_D & Y_D \\ Z_D & M_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$X' = V_0 X'' + V_D X_D.$$

Дерево теперь формируется в соответствии со следующей иерархией дуг:

$$\overset{\text{Дерево}}{\longrightarrow}$$
$$e,\ s,\ y,\ z,\ q,\ j$$
$$\underset{\text{Дополнение}}{\longleftarrow}$$

и называется *нормальным деревом*. В него входят все e-дуги и s-дуги, а все q-дуги и j-дуги попадают в дополнение (нарушение этого положения свидетельствовало бы о некорректности постановки задачи). Топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Pi_{EY} & \Pi_{EZ} & \Pi_{EQ} & \Pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \Pi_{SY} & \Pi_{SZ} & \Pi_{SQ} & \Pi_{SJ} \\ 0 & 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} & \Pi_{YQ} & \Pi_{YJ} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{ZZ} & \Pi_{ZQ} & \Pi_{ZJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_S \\ \eta_Y \\ \eta_Z \\ \eta_Q \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} P_{YE} & P_{YS} & P_{YY} & 0 & 0 & 0 \\ P_{ZE} & P_{ZS} & P_{ZY} & P_{ZZ} & 0 & 0 \\ P_{QE} & P_{QS} & P_{QY} & P_{QZ} & 1 & 0 \\ P_{JE} & P_{JS} & P_{JY} & P_{JZ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_S \\ \xi_Y \\ \xi_Z \\ \xi_Q \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

В этих уравнениях $\eta_Q = 0$, $\eta_J = \vartheta$, $\xi_E = \varepsilon$ и $\xi_S = 0$. Благодаря специфической структуре, обусловленной способом построения нормального дерева, топологические уравнения вместе с компонентными позволяют сформировать математическую модель в сокращенном координатном базисе.

2. Уравнения в сокращенном координатном базисе. Из топологических уравнений для сечений и контуров, определяемых y-дугами и z-дугами, имеем соотношения:

$$\Pi_{YY}\eta_Y + \Pi_{YZ}\eta_Z + \Pi_{YJ}\vartheta = 0;$$
$$P_{ZZ}\xi_Z + P_{ZY}\xi_Y + P_{ZE}\varepsilon = 0,$$

которые объединяются в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & P_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} \\ P_{ZY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YJ} \\ P_{ZE} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F = 0.$$

Из топологических уравнений для сечений, определяемых s-дугами, и для контуров, определяемых q-дугами, имеем соотношения:

$$\eta_S + \Pi_{SY}\eta_Y + \Pi_{SZ}\eta_Z + \Pi_{SJ}\vartheta = 0;$$
$$\xi_Q + P_{QZ}\xi_Z + P_{QY}\xi_Y + P_{QE}\varepsilon = 0,$$

которые записываются в виде матричного уравнения

$$\begin{bmatrix}\eta_S\\ \xi_Q\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Pi_{SY} & 0\\ 0 & P_{QZ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_Y\\ \xi_Z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \Pi_{SZ}\\ P_{QY} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_Y\\ \eta_Z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \Pi_{SJ}\\ P_{QE} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix} = 0$$

или

$$X_D + \Theta_4 X' + \Theta_5 X'' + \Theta_6 F = 0.$$

Подставляя в записанные соотношения компонентное уравнение $X' = V_0 X'' + V_D X_D$, после несложных преобразований получаем:

$$(\Theta_1 V_0 + \Theta_2) X'' + \Theta_1 V_D X_D + \Theta_3 F = 0;$$
$$(\Theta_4 V_0 + \Theta_5) X'' + (1 + \Theta_4 V_D) X_D + \Theta_0 F = 0.$$

Составляющие вектора X'' выражаются из топологических зависимостей через продольные величины ветвей дерева и поперечные величины хорд:

$$\xi_Y = \Pi^t_Y \xi_T = [\Pi^t_{EY} \;\; \Pi^t_{YY}]\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \xi_{YT}\end{bmatrix} = \Pi^t_{EY}\varepsilon + \Pi^t_{YY}\xi_{YT};$$
$$\eta_Z = P^t_Z \eta_N = [P^t_{ZZ} \;\; P^t_{JZ}]\begin{bmatrix}\eta_{ZN}\\ \vartheta\end{bmatrix} = P^t_{ZZ}\eta_{ZN} + P^t_{JZ}\vartheta,$$

что приводит к соотношению

$$\begin{bmatrix}\xi_Y\\ \eta_Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Pi^t_{YY} & 0\\ 0 & P^t_{ZZ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_{YT}\\ \eta_{ZN}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Pi^t_{EY} & 0\\ 0 & P^t_{JZ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix}$$

или

$$X'' = \Theta^t_1 X_0 + \Theta_7 F.$$

Это преобразование, которое получено благодаря специфической структуре системы координат, и составляет главный момент формирования математической модели в сокращенном координатном базисе. Теперь осталось подставить выражение для X'' в полученные выше соотношения, в результате чего имеем:

$$(\Theta_1 V_0 + \Theta_2)\Theta^t_1 X_0 + \Theta_1 V_D X_D = -[(\Theta_1 V_0 + \Theta_2)\Theta_7 + \Theta_3] F;$$
$$(\Theta_4 V_0 + \Theta_5)\Theta^t_1 X_0 + (1 + \Theta_4 V_D) X_D = -[(\Theta_4 V_0 + \Theta_5)\Theta_7 + \Theta_6] F.$$

Объединяя эти уравнения, можно записать:

$$\begin{bmatrix}(\Theta_1 V_0+\Theta_2)\,\Theta_1^t & \Theta_1 V_D\\ (\Theta_4 V_0+\Theta_5)\,\Theta_1^t & 1+\Theta_4 V_D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\ X_D\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(\Theta_1 V_0+\Theta_2)\,\Theta_7+\Theta_3\\ (\Theta_4 V_0+\Theta_5)\,\Theta_7+\Theta_6\end{bmatrix}F$$

или в сокращенной записи $WX = QF$.

Вектор F в качестве своих компонентов содержит задающие продольные ε и поперечные ϑ величины, а вектор X — продольные переменные y-ветвей дерева, поперечные переменные z-хорд, а также поперечные переменные короткозамкнутых дуг и продольные переменные разомкнутых дуг, т. е.

$$X=\begin{bmatrix}X_0\\ X_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{YT}\\ \eta_{ZN}\\ \eta_S\\ \xi_Q\end{bmatrix};\quad F=\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix}.$$

Таким образом, система координат включает только сечения, определяемые s-дугами и y-ветвями дерева, и контуры, определяемые z-хордами и q-дугами. Сокращение числа координат, а следовательно, и порядка квадратной матрицы W численно равно количеству y-хорд и z-ветвей дерева.

3. Матрично-векторные параметры. Формально матрично-векторные параметры уравнения $WX = QF$ могут быть вычислены по формулам:

$$W=\begin{bmatrix}(\Theta_1 V_0+\Theta_2)\,\Theta_1^t & \Theta_1 V_D\\ (\Theta_4 V_0+\Theta_5)\,\Theta_1^t & 1+\Theta_4 V_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_{00}W_{0D}\\ W_{D0}W_{DD}\end{bmatrix};$$

$$Q=-\begin{bmatrix}(\Theta_1 V_0+\Theta_2)\,\Theta_7+\Theta_3\\ (\Theta_4 V_0+\Theta_5)\,\Theta_7+\Theta_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_0\\ Q_D\end{bmatrix}.$$

Однако такой путь не целесообразен, так как входящие в эти формулы матрицы содержат нулевые блоки. Поэтому имеет смысл перейти к более подробной записи, сделав по пути некоторые преобразования. Рассмотрим сначала блок

$$W_{00}=(\Theta_1 V_0+\Theta_2)\,\Theta_1^t=\Theta_1 V_0\Theta_1^t+\Theta_2\Theta_1^t=$$

$$=\begin{bmatrix}\Pi_{YY} & 0\\ 0 & \mathrm{P}_{ZZ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_0 & N_0\\ M_0 & Z_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_{YY}^t & 0\\ 0 & \mathrm{P}_{ZZ}^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \Pi_{YZ}\\ \mathrm{P}_{ZY} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi_{YY}^t & 0\\ 0 & \mathrm{P}_{ZZ}^t\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\Pi_{YY}Y_0\Pi_{YY}^t & \Pi_{YY}N_0\mathrm{P}_{ZZ}^t\\ \mathrm{P}_{ZZ}M_0\Pi_{YY}^t & \mathrm{P}_{ZZ}Z_0\mathrm{P}_{ZZ}^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \Pi_{YZ}\mathrm{P}_{ZZ}^t\\ \mathrm{P}_{ZY}\Pi_{YY}^t & 0\end{bmatrix}.$$

Из общего свойства $\Pi\mathrm{P}^t = 0$ следует, что произведение любой строки матрицы Π на любой столбец матрицы P^t (или строку матрицы P) дает нулевую матрицу. Поэтому в нашем случае можно записать:

$$[0 0 \Pi_{YY}\Pi_{YZ}\Pi_{YQ}\Pi_{YJ}]\,[\mathrm{P}_{ZE}\mathrm{P}_{ZS}\mathrm{P}_{ZY}\mathrm{P}_{ZZ} 0 0]^t=0,$$

откуда $\Pi_{YY}P^t_{ZY} + \Pi_{YZ}P^t_{ZZ} = 0$, т. е. $\Pi_{YY}P^t_{ZY} = -\Pi_{YZ}P^t_{ZZ}$. Обозначив $\Pi_{YZ}P^t_{ZZ} = \Theta_0$, можно записать $\Pi_{YY}P^t_{ZY} = -\Theta_0$ или $P_{ZY}\Pi^t_{YY} = -\Theta^t_0$. Таким образом, рассматриваемый блок преобразуется к виду:

$$W_{00} = \begin{bmatrix} \Pi_{YY}Y_0\Pi^t_{YY} & \Pi_{YY}N_0P^t_{ZZ} + \Theta_0 \\ P_{ZZ}M_0\Pi^t_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ}Z_0P^t_{ZZ} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая аналогично остальные блоки, получаем развернутые выражения для матрично-векторных параметров:

	ξ_{YT}	η_{ZN}	η_S	ξ_Q
$W =$	$\Pi_{YY}Y_0\Pi^t_{YY}$	$\Pi_{YY}N_0P^t_{ZZ} + \Theta_0$	$\Pi_{YY}N_D$	$\Pi_{YY}Y_D$
	$P_{ZZ}M_0\Pi^t_{YY} - \Theta_0$	$P_{ZZ}Z_0P^t_{ZZ}$	$P_{ZZ}Z_D$	$P_{ZZ}M_D$
	$\Pi_{SY}Y_0\Pi^t_{YY}$	$\Pi_{SY}N_0P^t_{ZZ} + \Pi_{SZ}P^t_{ZZ}$	$1 + \Pi_{SY}N_D$	$\Pi_{SY}Y_D$
	$P_{QZ}M_0\Pi^t_{YY} + P_{QY}\Pi^t_{YY}$	$P_{QZ}Z_0P^t_{ZZ}$	$P_{QZ}Z_D$	$1 + P_{QZ}M_D$

;

	ε	ϑ
$Q =$	$\Pi_{YY}Y_0\Pi^t_{EY}$	$\Pi_{YY}N_0P^t_{JZ} + \Pi_{YJ}$
	$P_{ZZ}M_0\Pi^t_{EY} + P_{ZE}$	$P_{ZZ}Z_0P^t_{JZ}$
	$\Pi_{SY}N_D\Pi^t_{EY}$	$\Pi_{SY}Y_DP^t_{JZ} + \Pi_{SJ}$
	$P_{QZ}Z_D\Pi^t_{EY} + P_{QE}$	$P_{QZ}M_DP^t_{JZ}$

.

Определив матрицы W и Q, из решения уравнения $WX = QF$ можно найти вектор X. Если интерес представляют только искомые величины, зафиксированные короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, достаточно определить вектор X_D.

В частном случае, когда управляющие короткозамкнутые и разомкнутые дуги отсутствуют, матрично-векторные параметры выражаются значительно проще

$$\mathbb{W} = \left\| \begin{array}{c|c} \Pi_{YY} Y_0 \Pi^t_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P^t_{ZZ} + \Theta_0 \\ \hline P_{ZZ} M_0 \Pi^t_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ} Z_0 P^t_{ZZ} \end{array} \right\|; \quad Q = \left\| \begin{array}{c|c} \Pi_{YY} Y_0 \Pi^t_{EY} & \Pi_{YY} N_0 P^t_{JZ} + \Pi_{YJ} \\ \hline P_{ZZ} M_0 \Pi^t_{EY} + P_{ZE} & P_{ZZ} Z_0 P^t_{JZ} \end{array} \right\|,$$

а вектор X содержит только компоненты векторов ξ_{YT} и η_{ZN}.

4. Оптимальное разбиение дуг. Использование сокращенного координатного базиса имеет смысл тогда, когда достигается значительное уменьшение размеров матрицы $\mathbb{W}$. Заметим, что уже при сокращении числа координат на 30% количество клеток матрицы уменьшается примерно вдвое, а трудоемкость решения системы уравнений снижается во много раз. Естественно стремиться достигнуть максимально возможного сокращения координатного базиса, что осуществляется с помощью *оптимального разбиения* взаимоопределенных дуг между множествами y-дуг и z-дуг.

Прежде чем излагать алгоритм оптимального разбиения взаимоопределенных дуг, найдем общее соотношение для количества сокращаемых координат при заданном разбиении. Так как вектор X не содержит составляющих векторов ξ_{YN} и η_{ZT}, то ясно, что сокращаются сечения, определяемые z-ветвями дерева (z-сечения), и контуры, определяемые y-хордами (y-контуры).

Рассмотрим суграф, содержащий только e- и y-дуги (а также все p вершин) исходного графа. Пусть он состоит из k_s компонентов (изолированные вершины также считаются компонентами суграфа), а число всех e- и y-дуг равно q_s. Поскольку фундаментальное дерево формируется с преимуществом e- и y-дуг, то все сечения этого суграфа несокращаемые, а все контуры сокращаемые. Очевидно, количество таких сокращаемых контуров равно цикломатическому числу суграфа, т. е. $\sigma' = q_s - p + k_s$. Количество несокращаемых сечений равно рангу суграфа $p - k_s$, а сокращается $\nu' = \nu - (p - k_s)$ сечений. Следовательно, общее число сокращаемых координат

$$\mu = \sigma' + \nu' = (q_s - p + k_s) + (\nu - p + k_s) = q_s + 2k_s + \nu - 2p.$$

Из соотношения для ранга исходного графа $\nu = p - k$, где k — число его компонентов, следует $p = \nu + k$, на основе чего полученную формулу для числа сокращаемых координат можно представить в виде:

$$\mu = q_s + 2(k_s - k) - \nu = q_s + 2\Delta k - \nu,$$

где Δk — превышение по числу компонентов e- и y-суграфа над исходным графом.

Ранг ν является характеристикой графа, которая не зависит от типа дуг. Поэтому число сокращаемых координат данного графа

определяется только значениями величин q_s и Δk, т. е. разбиением взаимоопределенных дуг. Каждая новая y-дуга увеличивает μ на единицу, а объединение двух частей суграфа (т. е. уменьшение Δk на единицу) уменьшает μ на два. Отсюда ясно, что к y-дугам следует относить, прежде всего, те взаимоопределенные дуги, которые не связывают отдельных частей данного графа. Дуги, связывающие какие-либо две части суграфа, целесообразно относить к y-дугам, если их не меньше двух.

Практически оптимальное разбиение удобно осуществлять на w-графе взаимоопределенных дуг, который получается из исходного графа сокращением (стягиванием) e- и y-дуг и удалением z-, j-дуг

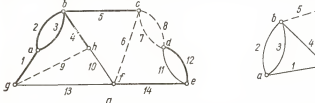


Рис 178. Оптимальное разбиение взаимоопределенных дуг:
а — исходный граф: *б* — граф взаимоопределенных дуг с разбиением на y-дуги (*1, 2, 3, 4, 9*) и z-дуги (*5, 14*)

(разумеется, короткозамкнутые s-дуги также сокращаются, а разомкнутые q-дуги удаляются). К y-дугам следует отнести петли и параллельные дуги w-графа. Каждая новая y-дуга сокращается, и процесс заканчивается тогда, когда в w-графе не останется петель и параллельных дуг. Оставшиеся дуги w-графа после этого относятся к z-дугам.

Например, для графа на рис. 178, *а* (y-дуги изображены сплошными тонкими линиями, z-дуги — штриховыми, а w-дуги — жирными линиями) получаем граф взаимоопределенных дуг, приведенный на рис. 178, *б*. К y-дугам относим, прежде всего, петлю *9* и параллельные дуги *2* и *3*. После их закорачивания снова появляются параллельные дуги *1* и *4*, которые также относим к y-дугам. Дуги *5* и *14* идентифицируются как z-дуги. При полученном разбиении $\mu = 8 + 2 \cdot 2 - 7 = 5$.

5. Определение матрично-векторных параметров. Итак, при моделировании в сокращенном координатном базисе целесообразно предварительно провести оптимальное разбиение взаимоопределенных дуг. К таким дугам относятся обычно дуги двухполюсных компонентов. Однако если требуется получить уравнения в дифференциальной форме, то дуги реактивных двухполюсников идентифицируются как y-дуги или z-дуги в соответствии с их полюсными уравнениями, которые выражают соответственно поперечные или продольные переменные через производные.

Матрично-векторные параметры системы W и Q можно определить путем операций над топологическими и компонентными субматрицами в соответствии с выражениями, полученными в (3). В качестве примера рассмотрим гидромеханическую систему (рис. 170, *а*), граф которой с нормальным деревом изображен на рис. 179, *а*. Как видно из графа взаимоопределенных дуг (рис. 179, *б*), получающегося из графа системы закорачиванием *е*-дуг (*1*, *2*, *3*) и *у*-дуг (*6*, *9*, *10*), а также удалением *z*-дуги (*5*), по условию оптимального разбиения дуги *4*, *7* идентифицируются как *у*-дуги, а *8* — как

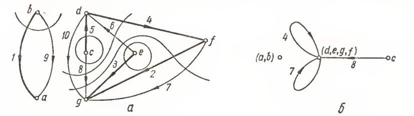


Рис. 179. Граф гидромеханической системы (*а*) и граф взаимоопределенных дуг (*б*).

z-дуга. При этом $q_s = 8$, $\Delta k_s = 1$, $\nu = 5$, следовательно, число сокращаемых координат $\mu = 8 + 2 \cdot 1 - 5 = 5$. Топологические матрицы имеют вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EZ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} \\ 0 & 0 & \Pi_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8
1	1						1			
2		1			—1	1		1		1
3			1		1					
4				1	—1			1		1
5									1	1

;

$$P = \begin{bmatrix} P_{YE} P_{YY} & 0 \\ P_{ZE} P_{ZY} & P_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8
6		1	—1	1	1					
7		—1				1				
9	—1						1			
10		—1		—1				1		
8		—1		—1					—1	1

.

Компонентная матрица V_0 запишется следующим образом (матрица V_D отсутствует, так как граф не содержит короткозамкнутых и разомкнутых управляющих дуг):

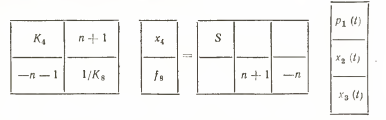
$$V_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} =$$

4	6	7	9	10	5	8	
K_4							4
					n		6
		pB_7					7
				S			9
			$-S$				10
	$-n$						5
						$\frac{1}{K_8}$	8

Тройные произведения матриц, входящие в блоки матрично-векторных параметров W и Q, можно получить путем операций над строками и столбцами соответствующих блоков компонентной матрицы V_0 подобно тому, как это делалось при формировании математической модели в однородных системах координат (5). Так как

$$\Theta_0 = \Pi_{YZ} P_{ZZ}^t = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1],$$

то записав матрицу W и вектор Q, приходим к уравнениям в сокращенном координатном базисе:



6. Операции над столбцами. Обычно компонентные матрицы V_0 и V_D сильно разреженные, а их размеры определяются числом

q_x дуг полюсных графов компонентов и числом q_D управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг (матрица V_0 квадратная q_x-го порядка, V_D имеет размер $q_x \times q_D$). Работать с такими матрицами неудобно, особенно, если система содержит большое число компонентов.

Заслуживает внимания другой способ определения матрично-векторных параметров системы в сокращенном координатном базисе. Он основан на непосредственном введении параметров каждой дуги в топологические уравнения:

$$\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F = 0;$$
$$X_D + \Theta_4 X' + \Theta_5 X'' + \Theta_6 F = 0,$$

которые удобно представить в объединенной форме:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \\ X_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_6 \end{bmatrix} F = 0.$$

Компонентные уравнения линейных систем выражают каждую составляющую x_k' вектора X' через составляющие x_r векторов X'' и X_D в виде суммы

$$x_k' = \sum_r w_{kr} x_r,$$

где w_{kr} — параметр, который характеризует зависимость x_k' от x_r (для реактивных компонентов w_{kr} содержит операторы дифференцирования или интегрирования). Для исключения переменной x_k' из топологического уравнения достаточно соответствующий этой переменной столбец матрицы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix}$$

умножить на параметр w_{kr} и сложить со столбцом, соответствующим переменной x_r (для всех значений r, при которых w_{kr} отлично от нуля). После этого столбец, соответствующий переменной x_k, удаляется из матрицы Θ, а переменная x_k исключается из вектора X'. Таким способом можно ввести параметры всех компонентов, в результате чего вектор X' исключается из исходных топологических уравнений, и они преобразуются к виду:

$$[\Lambda_X \Lambda_D] \begin{bmatrix} X'' \\ X_D \end{bmatrix} + \Lambda_F F = 0.$$

После этого остается подставить $X'' = \Theta_1^t X_0 + \Theta_7 F$ и в результате получаем

$$[\Lambda_X \Theta_1^t \; \Lambda_D] \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = -(\Lambda_X \Theta_7 + \Lambda_F) F,$$

что соответствует уравнению системы $WX = QF$ в сокращенном координатном базисе, где

$$W = [\Lambda_X \Theta_1^t \ \Lambda_D]; \quad Q = -(\Lambda_X \Theta_7 + \Lambda_F).$$

И на этом этапе алгебраические операции над матрицами можно заменить операциями над столбцами матрицы $[\Lambda_X \Lambda_D \Lambda_F]$. Для

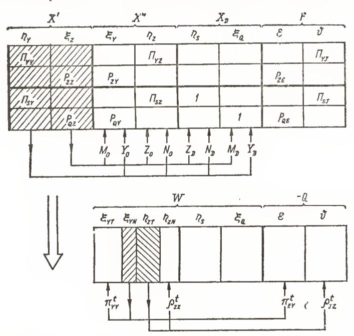


Рис. 180. Определение матрично-векторных параметров линейной системы в сокращенном координатном базисе.

этого достаточно столбцы матрицы Λ_X преобразовать согласно уравнению $X'' = \Theta_1^t X_0 + \Theta_7 F$, которому соответствуют соотношения:

$$\xi_Y = \Pi_{YY}^t \xi_{YT} + \Pi_{EY}^t \varepsilon; \quad \eta_Z = P_{ZZ}^t \eta_{ZN} + P_{JZ}^t \vartheta$$

или

$$\xi_{YN} = \pi_{YY}^t \xi_{YT} + \pi_{EY}^t \varepsilon; \quad \eta_{ZT} = \rho_{ZZ}^t \eta_{ZN} + \rho_{JZ}^t \vartheta.$$

В результате в матрице Λ_X останутся только столбцы для вектора $X_0 = (\xi_{YT}, \eta_{ZN})$, которые совместно с матрицей Λ_D образуют матрицу W, а матрица Λ_F преобразуется в матрицу $-Q$. Изложенный способ определения матрично-векторных параметров иллюстри-

руется на рис. 180, а его применение к рассмотренной в (5) гидромеханической системе — на рис. 181.

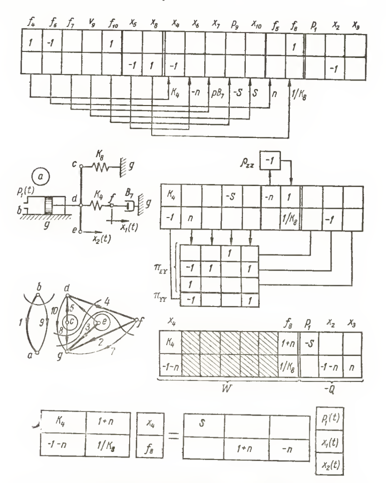


Рис. 181. Определение матрично-векторных параметров гидромеханической системы.

7. Уравнения переменных состояния. Разобьем множество y-дуг на реактивные (емкостные) C-дуги и безреактивные G-дуги, а множество z-дуг — на реактивные (индуктивные) L-дуги и безреактивные R-дуги. Нормальное дерево строится в соответствии с иерархией дуг (E, S, C, G, R, L, Q, J), и матрица сечений имеет вид:

$$
\Pi = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & & & & & & \pi_{EC} & \pi_{EG} & \pi_{ER} & \pi_{EL} & \pi_{EQ} & \pi_{EJ} \\
 & 1 & & & & & \pi_{SC} & \pi_{SG} & \pi_{SR} & \pi_{SL} & \pi_{SQ} & \pi_{SJ} \\
 & & 1 & & & & \pi_{CC} & \pi_{CG} & \pi_{CR} & \pi_{CL} & \pi_{CQ} & \pi_{CJ} \\
 & & & 1 & & & & \pi_{GG} & \pi_{GR} & \pi_{GL} & \pi_{GQ} & \pi_{GJ} \\
 & & & & 1 & & & & \pi_{RR} & \pi_{RL} & \pi_{RQ} & \pi_{RJ} \\
 & & & & & 1 & & & & \pi_{LL} & \pi_{LQ} & \pi_{LJ}
\end{array}\right| .
$$

На основе этой матрицы, учитывая, что $\eta_Q = 0$ и $\xi_S = 0$, а также используя зависимость $\rho = -\pi^t$, можно записать две системы топологических уравнений. Одна из них служит исходной для формирования уравнений переменных состояния в сокращенном координатном базисе:

$$
\left.\begin{array}{l}
\eta_S + \pi_{SC}\eta_{CN} + \pi_{SG}\eta_{GN} + \pi_{SR}\eta_{RN} + \pi_{SL}\eta_{LN} + \pi_{SJ}\vartheta = 0; \\
\eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} + \pi_{CG}\eta_{GN} + \pi_{CR}\eta_{RN} + \pi_{CL}\eta_{LN} + \pi_{CJ}\vartheta = 0; \\
\eta_{GT} + \pi_{GG}\eta_{GN} + \pi_{GR}\eta_{RN} + \pi_{GL}\eta_{LN} + \pi_{GJ}\vartheta = 0; \\
\xi_{RN} - \pi^t_{RR}\xi_{RT} - \pi^t_{GR}\xi_{GT} - \pi^t_{CR}\xi_{CT} - \pi^t_{ER}\varepsilon = 0; \\
\xi_{LN} - \pi^t_{LL}\xi_{LT} - \pi^t_{RL}\xi_{RT} - \pi^t_{GL}\xi_{GT} - \pi^t_{CL}\xi_{CT} - \pi^t_{EL}\varepsilon = 0; \\
\xi_{Q} - \pi^t_{LQ}\xi_{LT} - \pi^t_{RQ}\xi_{RT} - \pi^t_{GQ}\xi_{GT} - \pi^t_{CQ}\xi_{CT} - \pi^t_{EQ}\varepsilon = 0.
\end{array}\right\}
$$

Параметры безреактивных компонентов можно вводить, как и ранее, преобразованием столбцов матрицы, соответствующей этой системе уравнений. Параметры реактивных компонентов вводятся в соответствии с компонентными уравнениями:

$$
\eta_C = C\frac{d\xi_C}{dt}; \quad \xi_L = L\frac{d\xi_L}{dt},
$$

где C и L — емкости и индуктивности электрических компонентов или их аналоги для компонентов другой физической природы.

Другая система топологических уравнений, соответствующая сокращаемым координатам, используется для удаления из исход-

ной системы (после введения параметров компонентов) зависимых переменных η_{RT}, η_{LT}, ξ_{CN} и ξ_{GN}:

$$\eta_{RT} = -\pi_{RR}\eta_{RN} - \pi_{RL}\eta_{LN} - \pi_{RJ}\vartheta; \quad \eta_{LT} = -\pi_{LL}\eta_{LN} - \pi_{LJ}\vartheta;$$
$$\xi_{GN} = \pi^t_{GG}\xi_{GT} + \pi^t_{CG}\xi_{CT} + \pi^t_{EG}\varepsilon; \quad \xi_{CN} = \pi^t_{CC}\xi_{CT} + \pi^t_{EC}\varepsilon.$$

Зависимые дифференциальные переменные исключаются на основании продифференцированных уравнений для η_{LT} и ξ_{CN}:

$$\frac{d\eta_{LT}}{dt} = -\pi_{LL}\frac{d\eta_{LN}}{dt} - \pi_{LJ}\frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi^t_{CC}\frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi^t_{EC}\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

При этом могут появиться производные задающих функций $\vartheta(t)$ и $\varepsilon(t)$ источников, для которых отводится необходимое количество столбцов (по числу ненулевых столбцов матриц π_{LJ} и π^t_{EC}).

Так как зависимые переменные η_{CN} и ξ_{LT} не входят в уравнения для G-сечений и R-контуров, то соответствующие члены можно исключить в соответствии с соотношениями для поперечных переменных:

$$\pi_{SC}\eta_{CN} = \pi_{SC}C_N\frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi_{SC}C_N\pi^t_{CC}\frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{SC}C_N\pi^t_{EC}\frac{d\varepsilon}{dt};$$
$$\eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} = [1 \;\; \pi_{CC}]\begin{bmatrix}\eta_{CT}\\ \eta_{CN}\end{bmatrix} = \Pi_{CC}\eta_C =$$
$$= \Pi_{CC}C\Pi^t_{CC}\frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{CC}C_N\pi^t_{EC}\frac{d\varepsilon}{dt};$$

и для продольных переменных:

$$\xi_{LN} - \pi^t_{LL}\xi_{LT} = [-\pi^t_{LL} \;\; 1]\begin{bmatrix}\xi_{LT}\\ \xi_{LN}\end{bmatrix} =$$
$$= P_{LL}\xi_L = P_{LL}LP^t_{LL}\frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi^t_{LL}L_T\pi_{LJ}\frac{d\vartheta}{dt};$$
$$\pi^t_{LQ}\xi_{LT} = \pi^t_{LQ}L_T\frac{d\eta_{LT}}{dt} = \pi^t_{LQ}L_T\pi_{LL}\frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi^t_{LQ}L_T\pi_{LJ}\frac{d\vartheta}{dt},$$

где $\Pi_{CC} = [1 \;\; \pi_{CC}]$; $P_{LL} = [-\pi^t_{LL} \;\; 1]$; C и L — матрицы параметров реактивных компонентов (при отсутствии индуктивных связей они диагональны), а C_N и L_T — их субматрицы, образованные соответственно из столбцов для C-хорд и L-ветвей дерева. Приведенные соотношения пригодны и для случаев, когда имеются индуктивные связи.

Процедура формирования уравнений для линейных систем с использованием сокращенного координатного базиса иллюстрируется на рис. 182. После объединения преобразованных матриц достаточно разделить алгебраические и дифференциальные переменные, применив алгоритм Гаусса—Жордана по столбцам для η_S,

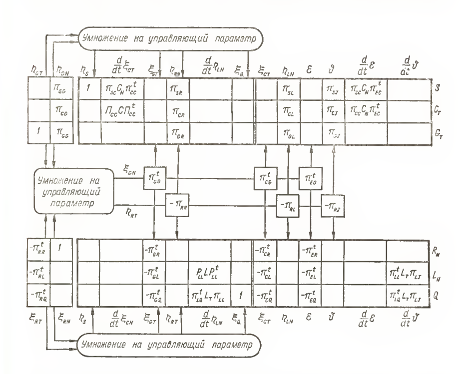


Рис. 182. Формирование уравнений линейной системы в сокращенном координатном базисе.

$\frac{d\xi_{CT}}{dt}$, ξ_{GT}, η_{RN}, $\frac{d\eta_{LN}}{dt}$, ξ_Q. В результате квадратная матрица из этих столбцов преобразуется в единичную, а остальная часть преобразованной матрицы содержит необходимую информацию для записи уравнений переменных состояния и выходных уравнений.

Пусть после применения алгоритма Гаусса—Жордана получена матрица:

η_S	$\frac{d\xi_{CT}}{dt}$	ξ_{GT}	η_{RN}	$\frac{d\eta_{LN}}{dt}$	ξ_Q	ξ_{CT}	η_{LN}	ε	ϑ	$\frac{d\varepsilon}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$
1						W_{SC}	W_{SL}	W_{SE}	W_{SJ}	W'_{SE}	W'_{SJ}
	1					W_{CC}	W_{CL}	W_{CE}	W_{CJ}	W'_{CE}	W'_{CJ}
		1				W_{GC}	W_{GL}	W_{GE}	W_{GJ}	W'_{GE}	W'_{GJ}
			1			W_{RC}	W_{RL}	W_{RE}	W_{RJ}	W'_{RE}	W'_{RJ}
				1		W_{LC}	W_{LL}	W_{LE}	W_{LJ}	W'_{LE}	W'_{LJ}
					1	W_{QC}	W_{QL}	W_{QE}	W_{QJ}	W'_{QE}	W'_{QJ}

Тогда уравнения переменных состояния запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\xi_{CT}\\ \eta_{LN}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}W_{CC} & W_{CL}\\ W_{LC} & W_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_{CT}\\ \eta_{LN}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}W_{CE} & W_{CJ}\\ W_{LE} & W_{LJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix}W'_{CE} & W'_{CJ}\\ W'_{LE} & W'_{LJ}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix}.$$

Выходное уравнение получается из тех строк, которые соответствуют искомым переменным. Если все искомые переменные зафиксированы короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, то оно формируется из соответствующих строк уравнения:

$$\begin{bmatrix}\eta_S\\ \xi_Q\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}W_{SC} & W_{SL}\\ W_{QC} & W_{QL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_{CT}\\ \eta_{LN}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}W_{SE} & W_{SJ}\\ W_{QE} & W_{QJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix}W'_{SE} & W'_{SJ}\\ W'_{QE} & W'_{QJ}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \vartheta\end{bmatrix}.$$

На рис. 183 изложенный алгоритм иллюстрируется для электрической схемы, которая рассматривалась в (6.7). Нормальное дерево выбрано в соответствии с оптимальным разбиением взаимоопределенных дуг. Матрица сечений для хорд имеет вид:

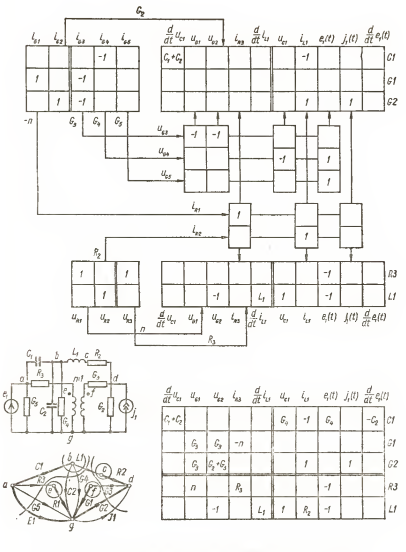


Рис. 183. Формирование уравнений электрической схемы.

$\pi =$

	C2	G3	G4	G5	R3	L1	J1
E1	1		1	1	1	1	
C1	−1		−1			−1	
G1		−1					
G2		−1				1	1
R1					−1		
R2						−1	

После преобразования полученной матрицы в сокращенном координатном базисе с помощью алгоритма Гаусса—Жордана легко записать уравнения переменных состояния и требуемые выходные уравнения.

8. Особенности сокращенного координатного базиса. Главная положительная особенность моделирования систем в сокращенном координатном базисе состоит в том, что топологически зависимые переменные (дифференциальные ξ_{CN}, η_{LT} и алгебраические ξ_{GN}, η_{RT}) исключаются путем алгебраического суммирования столбцов матриц без применения алгоритма Гаусса—Жордана или подобной ему процедуры. При этом ход вычислительного процесса подсказывается самой структурой системы и осуществляется наилучшим образом с учетом всех ее особенностей. Дальнейшее исключение переменных вплоть до получения уравнений переменных состояния и выходных уравнений проводится на матрице минимальных размеров, благодаря чему уменьшается опасность накопления ошибок вычислений за счет неудачного выбора опорных элементов. Разумеется, существенно снижается и общий объем вычислительной работы. Даже в таком простом примере, как на рис. 183, порядок матрицы, которую требовалось преобразовать к единичной, уменьшился вдвое по сравнению с полученной в (6.7).

При реализации изложенного алгоритма в сокращенном координатном базисе на вычислительных машинах достигается предельно возможная экономия оперативной памяти. Для матрицы схемы отводится требуемый массив памяти, а столбцы для переменных η_G и ξ_R (рис. 182) могут вызываться поочередно по мере введения параметров компонентов. Размеры матрицы схемы и каждого из ее

блоков известны уже после формирования дерева, и поэтому при программировании можно воспользоваться динамическим распределением памяти, отводя в каждом случае для этой матрицы столько ячеек, сколько требуется в соответствии с характером решаемой задачи.

Благодаря тому, что нормальное дерево формируется с преимуществом короткозамкнутых дуг перед емкостными и индуктивных дуг перед разомкнутыми, в сокращенном координатном базисе отсутствуют топологически зависимые дифференциальные переменные даже в тех случаях, когда имеются особые контуры с короткозамкнутыми дугами и особые сечения с разомкнутыми дугами. Например, для схемы рис. 177, рассмотренной в (6.11), нормальное дерево показано на рис. 184 (по условию оптимального разбиения все резисторы представляются G-дугами). Так как в дерево не вошла дуга $C3$, то ее напряжение u_{C3} заведомо будет отсутствовать в уравнениях схемы и при формировании математической модели не потребуется ее исключение (при $n = 2$ будет иметь место компонентная зависимость переменных, которая исключается по изложенному ранее способу).

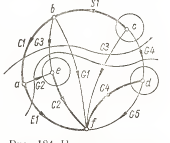


Рис. 184. Нормальное дерево графа схемы с особым контуром, содержащим короткозамкнутую дугу.

Изложенный алгоритм (см. рис. 182) построен при некоторых ограничениях на характер управляющих дуг. Кроме короткозамкнутых и разомкнутых дуг, ими могут быть только безреактивные дуги полюсных графов компонентов, причем G-дуги не должны управлять по поперечной величине (току), а R-дуги — по продольной величине (напряжению). Это весьма слабое ограничение, так как в любом случае можно ввести необходимое количество управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг. Кроме того, чаще всего управляющими являются взаимоопределенные дуги и их можно отнести к R-дугам, если они управляют по поперечной величине, или к G-дугам, если они управляют по продольной величине.

9. **Обобщенная процедура.** Обобщим изложенную процедуру формирования уравнений переменных состояния на нелинейные системы, сняв одновременно ограничения на характер управляющих дуг. При этом воспользуемся обозначениями и терминами электрических величин, распространяя полученные результаты на другие физические системы по аналогии.

При формировании фундаментального дерева, определяющего систему координат, дуги нелинейных двухполюсников распределяются между деревом и дополнением следующим образом: дуги

управляемых током двухполюсников помещаются в дерево (после C-дуг), а управляемых напряжением — в дополнение (перед L-дугами). Взаимоопределенные дуги распределяются между деревом и дополнением произвольно. При этом матрица сечений имеет вид:

$\Pi =$

E	S	C_T	H_T	G_T	R_T	L_T	C_N	G_N	R_N	H_N	L_N	Q	J	
1							π_{EC}	π_{EG}	π_{ER}	π_{EH}	π_{EL}	π_{EQ}	π_{EJ}	E
	1						π_{SC}	π_{SG}	π_{SR}	π_{SH}	π_{SL}	π_{SQ}	π_{SJ}	S
		1					π_{CC}	π_{CG}	π_{CR}	π_{CH}	π_{CL}	π_{CQ}	π_{CJ}	C_T
			1					π_{HG}	π_{HR}	π_{HH}	π_{HL}	π_{HQ}	π_{HJ}	H_T
				1				π_{GG}	π_{GR}	π_{GH}	π_{GL}	π_{GQ}	π_{GJ}	G_T
					1				π_{RR}	π_{RH}	π_{RL}	π_{RQ}	π_{RJ}	R_T
						1					π_{LL}	π_{LQ}	π_{LJ}	L_T

Для исключения топологически зависимых алгебраических переменных наряду с соотношениями

$$u_{CN} = \pi^t_{CC} u_{CT} + \pi^t_{EC} e(t); \ \ i_{LT} = -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} j(t),$$

используются соотношения:

$$u_{GH} = \pi^t_{GG} u_{GT} + \pi^t_{HG} u_{HT} + \pi^t_{CG} u_{CT} + \pi^t_{EG} e(t);$$
$$i_{RT} = -\pi_{RR} i_{RN} - \pi_{RH} i_{HN} - \pi_{RL} i_{LN} - \pi_{RJ} j(t).$$

Обобщенная процедура формирования уравнений нелинейной системы в сокращенном координатном базисе показана на рис. 185.

На этом этапе вводятся параметры только безреактивных компонентов, представленных G-дугами и R-дугами. Управляющей может быть любая дуга, в том числе и дуги источников. Единственное ограничение на характер управляющих дуг состоит в том, что G-дуги не должны управлять по току, а R-дуги — по напряжению. Это ограничение не существенно для резисторов, так как управляющие

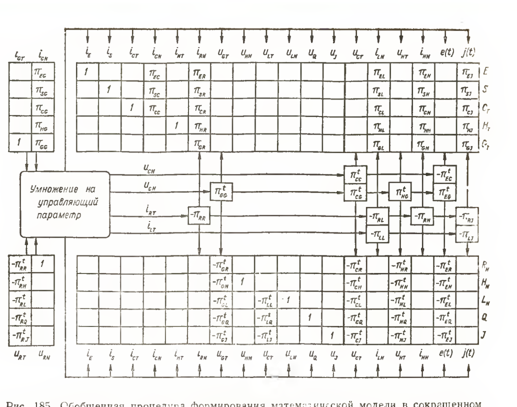


Рис. 185. Обобщенная процедура формирования математической модели в сокращенном координатном базисе.

по току резисторы можно всегда представить как R-дуги, а управляющие по напряжению резисторы — как G-дуги (при этом такие резисторы исключаются из множества взаимоопределенных w-дуг и не подлежат оптимальному разбиению).

Управляемые G-дуги зависимых источников тока могут управлять другими источниками только по напряжению, а управляемые R-дуги зависимых источников напряжения — только по току. Таким образом, остается наложить запрет на управление G-дугами зависимых источников тока по току и R-дугами зависимых источников напряжения — по напряжению. Если такая ситуация все же имеет место, то она легко устраняется на этапе подготовки данных путем преобразования управляющих параметров. Пусть, например, зависимый источник тока, управляемый напряжением u_j некоторого двухполюсника и описываемый уравнением $i_k = gu_j$, сам управляет по току источником напряжения. Тогда последний можно представить уравнением $u_s = ri_k = rgu_j = mu_j$ и считать, что он также управляется напряжением u_j двухполюсника с управляющим параметром $m = rg$. Аналогично преобразуются управляющие параметры и в других подобных случаях.

Излагаемая процедура формирования уравнений допускает управление зависимыми источниками и со стороны независимых источников как по току, так и по напряжению. Однако если независимые источники напряжения не управляют по току, а независимые источники тока — по напряжению, то переменные i_E и u_J можно исключить из системы уравнений путем удаления соответствующих им столбцов и строк. Это обусловлено тем, что в столбцах для таких переменных имеется единственный ненулевой элемент (единица), расположенный в исключаемой строке.

10. Введение реактивных параметров. После введения параметров безреактивных двухполюсников по процедуре, представленной на рис. 185, получаем матричное уравнение в виде:

$$\Lambda_E i_E + \Lambda_S i_S + \Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} + \Lambda_{HT} i_{HT} + \Lambda_{RN} i_{RN} + \Lambda'_{GT} i_{GT} +$$
$$+ \Lambda'_{HN} u_{HN} + \Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} + \Lambda'_Q u_Q + \Lambda'_J u_J + \Lambda'_{CT} u_{CT} + \Lambda_{LN} i_{LN} +$$
$$+ \Lambda'_{HT} u_{HT} + \Lambda_{HN} i_{HN} + \Lambda'_E e(t) + \Lambda_J j(t) = 0.$$

Реактивные параметры вводятся в соответствии с соотношениями для емкостей:

$$i_{CT} = C_T \frac{du_{CT}}{dt};$$

$$i_{CN} = C_N \frac{du_{CN}}{dt} = C_N \frac{d}{dt} (\pi^t_{CC} u_{CT} + \pi^t_{EC} e = C_N \pi^t_{CC} \frac{du_{CT}}{dt} + C_N \pi^t_{EC} \frac{de}{dt}$$

и для индуктивностей

$$u_{LT} = L_T \frac{di_{LT}}{dt} = L_T \frac{d}{dt} (-\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} j) = -L_T \pi_{LL} \frac{di_{LN}}{dt} - L_T \pi_{LJ} \frac{dj}{dt};$$

$$u_{LN} = L_N \frac{di_{LN}}{dt}.$$

Здесь C_T и C_N — матрицы емкостей; L_T и L_N — матрицы индуктивностей реактивных дуг фундаментального дерева и дополнения. С учетом приведенных соотношений слагаемые для реактивных переменных преобразуются следующим образом:

$$\Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} = (\Lambda_{CT} C_T + \Lambda_{CN} C_N \pi_{CC}^t) \frac{du_{CT}}{dt} + \Lambda_{CN} C_N \pi_{EC}^t \frac{de}{dt};$$

$$\Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} = (\Lambda'_{LN} L_N - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LL}) \frac{di_{LN}}{dt} - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LJ} \frac{dj}{dt}.$$

Появление производных задающих напряжений $e(t)$ и токов $j(t)$ обусловлено наличием особых контуров и сечений, что индицируется ненулевыми субматрицами π_{EC} и π_{LJ}.

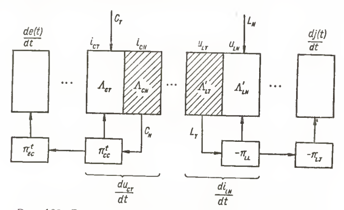


Рис. 186. Введение параметров реактивных компонентов.

Матрицы C_T и C_N диагональные, а при отсутствии индуктивных связей диагональными являются также матрицы L_T и L_N. Поэтому реактивные параметры можно ввести по схеме, приведенной на рис. 186. Столбцы для токов емкостных дуг умножаются на соответствующие емкости, после чего столбцы для емкостных хорд суммируются со столбцами для емкостных ветвей дерева в соответствии с субматрицей π_{CC}^t. В результате получаем столбцы для производных напряжений емкостных ветвей дерева. Столбцы для производных независимых источников напряжения получаются

в соответствии с оператором, которым служит субматрица π_{EC}^{t}. Аналогично вводятся и параметры индуктивных двухполюсников.

Если между двухполюсниками имеются индуктивные связи, то необходимо исходить из соотношения

$$\begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} = L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix},$$

где L — матрица, элементами которой являются собственные и взаимные индуктивности.

Тогда члены полученного ранее матричного уравнения, которые содержат напряжения на индуктивностях, преобразуются следующим образом:

$$\Lambda_{LT}' u_{LT} + \Lambda_{LN}' u_{LN} = [\Lambda_{LT}' \, \Lambda_{LN}'] \begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} =$$

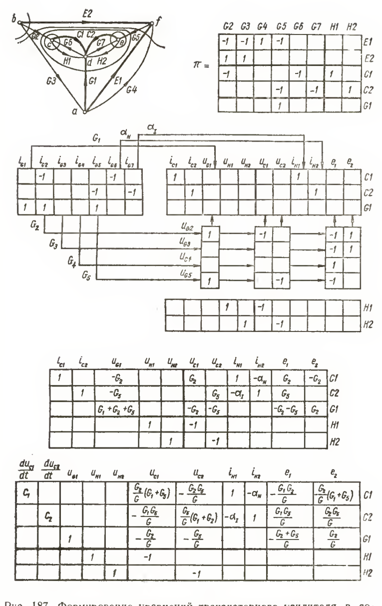
$$= [\Lambda_{LT}' \, \Lambda_{LN}'] \, L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = [\Lambda_{LT}' \, \Lambda_{LN}'] \, L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} j \\ i_{LN} \end{bmatrix} =$$

$$= [\Lambda_{LT}' \, \Lambda_{LN}] \, L \begin{bmatrix} -\pi_{LL} \\ 1 \end{bmatrix} i_{LN} - [\Lambda_{LT}' \, \Lambda_{LN}'] \, L \begin{bmatrix} -\pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dj}{dt}.$$

11. Разделение переменных. Формирование математической модели в пространстве переменных состояния завершается разделением переменных. Эта процедура сводится по существу к решению уравнений в сокращенном координатном базисе относительно производных переменных состояния u_{CT} и i_{LN}, переменных нелинейных компонентов i_{HT} и u_{HN}, а также токов i_E, i_S, i_{RN} и напряжений u_J, u_Q, u_{GT}.

Если параметры реактивных компонентов постоянны, то для разделения переменных можно использовать алгоритм Гаусса—Жордана по соответствующим столбцам. В результате получаем уравнения переменных состояния вместе с присоединенными к ним нелинейными и выходными уравнениями.

Если физическая система содержит нелинейные или параметрические реактивные компоненты, то целесообразно из ее уравнений, полученных с помощью обобщенной процедуры (см. рис. 185), исключить алгебраические переменные i_E, i_{RN}, u_{GT}, u_J, а также те переменные из i_S и u_Q, которые не являются выходными величинами. После этого на каждом шаге интегрирования вводятся реактивные параметры и полученные уравнения решаются методами неявного интегрирования или преобразуются к уравнениям переменных состояния.



$\pi =$

	G2	G3	G4	G5	G6	G7	H1	H2
E1	-1	-1	1	-1				
E2	1	1						
C1	-1				-1		1	
C2				-1		-1		1
G1				1				

	i_{C1}	i_{C2}	u_{G1}	u_{H1}	u_{H2}	u_{C1}	u_{C2}	i_{H1}	i_{H2}	e_1	e_2
C1	1		$-G_2$			G_2		1	$-\alpha_N$	G_2	$-G_2$
C2		1	$-G_5$				G_5	$-\alpha_I$	1	G_5	
G1			$G_1+G_2+G_5$			$-G_2$	$-G_5$			$-G_2-G_5$	G_2
H1				1		-1					
H2					1		-1				

	$\frac{du_{C1}}{dt}$	$\frac{du_{C2}}{dt}$	u_{G1}	u_{H1}	u_{H2}	u_{C1}	u_{C2}	i_{H1}	i_{H2}	e_1	e_2
C1	C_1					$\frac{G_2}{G}(G_1+G_5)$	$-\frac{G_2G_5}{G}$	1	$-\alpha_N$	$-\frac{G_1G_2}{G}$	$-\frac{G_2}{G}(G_1+G_5)$
C2		C_2				$-\frac{G_1G_5}{G}$	$\frac{G_5}{G}(G_1+G_2)$	$-\alpha_I$	1	$\frac{G_1G_5}{G}$	$\frac{G_2G_5}{G}$
G1			1			$-\frac{G_2}{G}$	$-\frac{G_5}{G}$			$-\frac{G_2+G_5}{G}$	$\frac{G_2}{G}$
H1				1		-1					
H2					1		-1				

Рис. 187. Формирование уравнений транзисторного усилителя в сокращенном координатном базисе.

На рис. 187 показано применение обобщенной процедуры формирования уравнений в сокращенном координатном базисе для транзисторного усилителя, рассмотренного в (6. 8). По условию оптимального разбиения все линейные резисторы представлены G-дугами, причем для них приняты другие обозначения по сравнению с теми, которые приведены в (6. 8): дуги $X3$, $X4$, $X5$, $X6$, $X7$ обозначены соответственно через $G5$, $G2$, $G3$, $G1$, $G4$, а их проводимости — через G_5, G_2, G_3, G_1, G_4. Зависимые источники тока представлены дугами $G6$ и $G7$, которые ранее были обозначены через $X8$ и $X9$. На основе полученной матрицы математическая модель в пространстве переменных состояния записывается в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_2}{C_1 G}(G_1 + G_5) & \frac{G_2 G_5}{C_1 G} \\ \frac{G_2 G_5}{C_2 G} & -\frac{G_5}{C_2 G}(G_1 + G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{\alpha_N}{C_1} \\ \frac{\alpha_I}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{G_1 G_2}{C_1 G} & \frac{G_2}{C_1 G}(G_1 + G_5) \\ -\frac{G_1 G_5}{C_2 G} & -\frac{G_2 G_5}{C_2 G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{H1} \\ u_{H2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что матрица W в сокращенном координатном базисе для систем, состоящих только из двухполюсных компонентов, всегда кососимметрична.

2. Выведите из уравнения $WX = QF$ в сокращенном координатном базисе уравнения в однородных системах координат, как частные случаи, когда граф системы содержит только:
   а) y-дуги, управляемые продольными величинами;
   б) z-дуги, управляемые поперечными величинами.

3. Определите количество сокращаемых координат μ для графа на рис. 178, *а* при следующих разбиениях взаимоопределенных дуг:
   а) y-дуги — *1, 2, 3, 9*; z-дуги — *4, 5, 14*.
   б) y-дуги — *1, 4, 9*; z-дуги — *2, 3, 5, 14*.

   Сравните результаты со значением μ, полученным при оптимальном разбиении взаимоопределенных дуг.

4. Из уравнений для гидромеханической системы в неоднородном координатном базисе, полученных в (6. 3), выразите переменные x_4 и f_8 и сравните с уравнениями в сокращенной системе координат (5).

5. Сформируйте уравнение в сокращенном координатном базисе для механической системы (см. рис. 144, *а*).

6. Для электрической схемы (см. рис. 173, *а*) выполните оптимальное разбиение взаимоопределенных дуг и сравните выбор дерева, определяющего неоднородный (рис. 173, *б*) и сокращенный (рис. 183) координатный базис. Объясните различие между этими деревьями.

7. Покажите, что матрица электрической схемы (рис. 173, *а*) в сокращенном координатном базисе (рис. 183) при заданных численных значениях

параметров (в новых обозначениях $G_2 = G_3 = 1$; $G_4 = G_5 = 0,5$; $R_1 = 1$; $R_3 = 2$; $n = 2$) приводится к виду:

$\frac{du_{C1}}{dt}$	u_{G_1}	u_{G_2}	i_{R_3}	$\frac{di_{L1}}{dt}$	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$j_l(t)$	$\frac{de_1(t)}{dt}$
1					5	—10	—5		0,5
	1					—0,2	—0,4	—0,2	
		1				0,6	—0,2	0,6	
			1			0,2	—0,1	0,2	
				1	5	8	—4	3	

Запишите уравнения переменных состояния и выходные уравнения, если искомыми величинами являются u_{G2} и i_{R1}.

8. Дайте полное обоснование всех операций алгоритма формирования уравнений переменных состояния в сокращенном координатном базисе (см. рис. 182) на основе топологических и компонентных уравнений.

9. Сформируйте уравнения в сокращенном координатном базисе для электрической схемы (см. рис. 183) без использования матриц, для чего:

а) составьте уравнения по законам Кирхгофа для несокращающихся сечений и контуров;

б) подставьте в полученные соотношения выражения для переменных из полюсных уравнений;

в) выразите все переменные через продольные величины y-ветвей дерева и поперечные величины z-хорд и подставьте их в уравнения, полученные в предыдущем пункте;

г) запишите полученную систему уравнений в матричной форме и сравните результат с приведенным на рис. 183.

10. Выведите уравнения переменных состояния с использованием сокращенного координатного базиса для электрической схемы (см. рис. 121, *а*).

11. Выведите уравнения переменных состояния с использованием сокращенного координатного базиса для механической системы (см. рис. 123, *а*).

12. Покажите, что в графе (рис. 184) по условию оптимального разбиения все резисторы должны быть представлены G-дугами. Какие варианты нормальных деревьев, кроме представленного на рис. 184, возможны? Какое число координат сокращается?

13. Сформируйте уравнения переменных состояния для схемы (см. рис. 177, *а*) с помощью сокращенной системы координат, определяемой нормальным деревом (рис. 184), выполнив все процедуры в соответствии с рис. 182.

14. Постройте процедуру формирования уравнений в сокращенном координатном базисе для линейных систем как частный случай, приведенный на рис. 185, и дополните ее вплоть до получения уравнений переменных состояния и выходных уравнений.

Литература

Систематическое изложение теории графов дано в монографиях: А. А. Зыков «Теория конечных графов» (Новосибирск, «Наука», 1969), К. Берж «Теория графов и ее применения» (М., Изд. иностр. лит., 1962), О. Оре «Теория

графов» (М., «Наука», 1968), Ф. Харари «Теория графов» (М., «Мир», 1973). Популярное изложение основ теории графов дано в книге О. Оре «Графы и их применение» (М., «Мир», 1965).

Разнообразные приложения аппарата теории графов рассматриваются в книге Р. Басакера и Т. Саати «Конечные графы и сети» (М., «Наука», 1974), а также в сборнике под ред. Д. Кернопа и Р. Розенберга «Применение теории графов связей в технике» (М., «Мир», 1974).

Теория электрических цепей излагается на основе аппарата теории графов в учебных пособиях: С. Сешу и М. Б. Рид «Линейные графы и электрические цепи» (М., «Высшая школа», 1971), Н. Г. Максимович «Методы топологического анализа электрических цепей» (Львов, Изд. Львовского университета, 1970), Л. А. Бессонов «Линейные электрические цепи» (М., «Высшая школа», 1968), П. А. Ионкин и др. «Основы инженерной электрофизики», ч. 2 (М., «Высшая школа», 1972).

Среди книг, посвященных моделированию электронных цепей с использованием теории графов, можно указать следующие: С. Мэзон, Г. Циммерман «Электронные цепи, сигналы и системы» (М., Изд. иностр. лит., 1963), В. П. Сигорский «Матрицы и графы в электронике» (М., «Энергия», 1968), В. П. Сигорский и А. И. Петренко «Алгоритмы анализа электронных схем» (Киев, «Техніка», 1970), Л. Я. Нагорный «Моделирование электронных цепей на ЦВМ» (Киев, «Техніка», 1974).

Применение теории графов к анализу электромеханических систем рассмотрено в монографиях: Г. Кёниг, В. Блекуэлл «Теория электромеханических систем» (М.— Л., «Энергия», 1965), Л. Робишо, М. Буавер и Ж. Робер «Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам» (М.— Л., «Энергия», 1964), И. Ф. Ильинский и В. К. Цаценкин «Приложение теории графов к задачам электромеханики» (М., «Энергия», 1968).

Теория динамических аналогий, используемых при моделировании физических систем, изложена в монографии Г. Ольсона «Динамические аналогии» (М. ГИИЛ, 1947), а также затрагивается в книгах: М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс «Переходные процессы в линейных системах (М., Гостехиздат, 1951) и Е. В. Фудим «Пневматическая вычислительная техника» (М., «Наука», 1973).

Среди книг, в которых аппарат теории графов используется для решения прикладных задач, отметим также следующие: Т. Ху «Целочисленное программирование и потоки в сетях» (М., «Мир», 1974), А. Н. Мелихов, Л. С. Берштейн и В. М. Курейчик «Применение графов для проектирования дискретных устройств» (М., «Наука», 1974), В. В. Кафаров, В. Л. Перов, В. П. Мешалкин «Принципы математического моделирования химико-технологических систем» (М., «Химия», 1974), Ф. Э. Келлер «Графы кодов, кодирующие и декодирующие устройства» (Л., «Энергия», 1972), В. И. Брегман «Графы в задачах управления производством» (М., «Статистика», 1974).

Глава 5

ЛОГИКА

Одной из основных задач математической логики является анализ оснований математики. Но в настоящее время она уже вышла из рамок этой задачи и оказала существенное влияние на развитие самой математики. Из ее идей возникло точное определение понятия алгоритма, что позволило решать многие вопросы, которые без этого остались бы в принципе неразрешенными. Возникший в математической логике аппарат нашел приложение в вопросах конструкций вычислительных машин и автоматических устройств.

П. С. Новиков

В начале этой главы излагаются основные положения, относящиеся к логическим функциям. Подробно исследуются булевы функции двух переменных, зависимости между ними и методы построения функционально полных систем. Наряду с булевой алгеброй, рассматривается алгебра Жегалкина, что позволяет глубже проникнуть в структуру логических функций.

Аппарат математической логики в значительной степени сложился под влиянием прикладных проблем, в рамках которых развились его специфические особенности. Пробным камнем среди технических приложений была задача анализа и синтеза контактных схем. Успехи в этой области послужили стимулом для использования аппарата математической логики и в других областях.

Триумфом сотрудничества математики и техники явилось создание вычислительных машин с программным управлением. К тому времени, когда электроника, магнитная техника и электромеханика смогли предложить эффективные методы построения логических элементов и устройств преобразования информации, математическая логика уже располагала в общих чертах аппаратом для проектирования схем, реализующих сложные логические функции.

Дальнейшие обобщения привели к развитию теории автоматов, основной задачей которой является математическое моделирование физических или абстрактных процессов, технических устройств и некоторых сторон поведения живых организмов. Автоматы используются в качестве универсальной модели в самых разнообразных областях, в том числе и при проектировании вычислительных машин.

При рассмотрении конечных автоматов, контактных и логических схем используются различные способы представления логических функций: многомерные кубы, карты Карно, символика s-кубов. На основе таких представлений излагаются основные методы мини-

мизации булевых функций и их применения к синтезу контактных и логических схем.

В последнее время, наряду с двоичными функциональными элементами, разработаны и находят практическое применение многозначные элементы, характеризующиеся рядом положительных особенностей. В связи с этим сильно возросло значение многозначной логики, изложению основных положений которой посвящен специальный параграф. Там же кратко представлены другие логики, развившиеся в связи с техническими и биологическими проблемами: пороговая, мажоритарная, нейронная, потенциально-импульсная и фазоимпульсная.

Значительное внимание в настоящей главе уделяется логике высказываний и логике предикатов. Символический язык этих разделов математической логики широко используется не только в самой математике, но и в технической литературе. Кроме того можно полагать, что формальные методы логического обоснования станут со временем необходимым элементом при решении практических задач, а значит, и составной частью математического аппарата инженера. Этому в значительной мере способствует развитие автоматизации проектирования с применением вычислительной техники.

В заключительном параграфе приводятся некоторые сведения из теории алгоритмов, которые могут представлять интерес для инженеров в связи с задачами алгоритмизации процессов производства и проектирования.

1. ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Логические функции как отображения. Отличительная особенность логических функций состоит в том, что они принимают значения в конечных множествах. Иначе говоря, область значений логической функции всегда представляет собой конечную совокупность чисел, символов, понятий, свойств и, вообще, любых объектов. Если область значений функции содержит k различных элементов, то она называется *k-значной функцией*.

Чтобы различать элементы области значений функции, их необходимо как-то отметить. Удобнее всего элементы перенумеровать числами от 1 до k или обозначить какими-нибудь символами (например, буквами). Перечень всех символов, соответствующих области значений, называют *алфавитом*, а сами символы — *буквами* этого алфавита (буквами могут служить как собственно буквы латинского, русского или другого алфавита, так и порядковые числа или любые другие символы).

Логические функции могут зависеть от одной, двух и, вообще, любого числа переменных (аргументов) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В отличие от самой функции, аргументы могут принимать значения из элементов как конечных, так и бесконечных множеств.

В теоретико-множественном смысле логическая функция n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой отображение множества *наборов* (n-мерных векторов, кортежей, последовательностей) вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющегося областью ее определения, на множество ее значений $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Логическую функцию можно также рассматривать как операцию, заданную законом композиции $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to N$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — множества, на которых определены аргументы $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.

2. Однородные функции. Если аргументы принимают значения из того же множества, что и сама функция, то ее называют *однородной функцией*. В этом случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = N$ и однородная функция, рассматриваемая как закон композиции $N^n \to N$, определяет некоторую *n-местную операцию* на конечном множестве N.

Областью определения однородной функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ служит множество наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемых *словами*, где каждый из аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ замещается буквами k-ичного алфавита $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Количество n букв в данном слове определяет его *длину*.

Очевидно, число всевозможных слов длины n в k-ичном алфавите равно k^n. Так как каждому такому слову имеется возможность предписать одно из k значений множества N, то общее количество однородных функций от n переменных выражается числом $k^{(k^n)}$.

Если буквами алфавита служат числа от 0 до $k-1$, то каждое слово $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ символически представляется упорядоченной последовательностью n таких чисел и рассматривается как запись n-разрядного числа в позиционной системе счисления с основанием k, т. е. $x_1k^{n-1} + x_2k^{n-2} + \ldots + x_{n-1}k^1 + x_nk^0 = q$. Числа $q = 0, 1, \ldots, k^n - 1$ служат *номерами слов* и тем самым на множестве всех слов вводится естественная упорядоченность (отношение строгого порядка). Аналогично *номерами функций* можно считать k^n-разрядные числа в той же системе счисления.

Различные слова длины n в данном алфавите образуются как n-перестановки с повторениями (2. 10. 1). Так, в трехзначном алфавите $\{0, 1, 2\}$ словами длины 4 будут все четырехразрядные числа с основанием $k = 3$, т. е. 0000, 0001, 0002, 0010, 0011, ..., 2221, 2222, которые соответствуют десятичным числам от 0 до $80 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. Поставив каждому такому четырехразрядному числу в соответствие одну из букв алфавита $\{0, 1, 2\}$, получим некоторую функцию четырех переменных

$f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, причем количество таких функций выражается огромным числом 3^{81}.

Пусть алфавит состоит из трех букв русского алфавита {о, п, т}. Множество пятибуквенных слов в этом алфавите состоит из $3^5 = 243$ элементов. Наряду с такими имеющими прямой смысл словами, как «топот» и «потоп», оно также включает все другие 5-перестановки, например: «ооппт», «поппп», «тттоп» и др.

Примерами однородных логических функций двух переменных могут служить операции сложения и умножения одноразрядных m-значных чисел по модулю m (2. 8. 7), внутренние операции поля Галуа (2. 8. 9) с четырехзначным алфавитом {0, 1, A, B} и т. п.

3. Табличное задание функций. Как и бинарный закон композиции (2. 7. 2), однородная функция двух переменных может быть задана таблицей соответствия (матрицей), строки и столбцы которой соответствуют буквам алфавита. Таким способом представлялись функции одной и двух переменных в (1. 5. 2), (1. 5. 8) и (1. 5. 10). Для представления функций трех и большего числа переменных потребовались бы трехмерные и, вообще, n-мерные таблицы. Этого можно избежать, если столбцы матрицы поставить в соответствие не буквам алфавита, а словам, т. е. образовать k^n столбцов. Для каждой функции отводится строка, клетки которой заполняются буквами из данного алфавита. Матрица всех функций n переменных в k-значном алфавите содержит $k^{(k^n)}$ строк и называется *общей таблицей соответствия*. Например, для $k = 3$ и $n = 2$ такая матрица имеет вид:

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
y_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
y_2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_{2361}	0	1	0	0	1	2	2	0	1
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_{19682}	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Номера столбцов определяются расположенными над ними n-разрядными числами с основанием k, каждое из которых читается сверху вниз. Номера функций отождествляются с k^n-разрядными числами, которые соответствуют строкам матрицы в той же системе счисления.

4. Двузначные однородные функции. Наиболее простым и в то же время важнейшим классом однородных функций являются *двузначные (булевы) функции*, частично рассмотренные в (1. 5. 2) и последующих пунктах.

Областью определения булевых функций от n переменных служит множество слов длины n. Они представляют собой всевозможные наборы из n двоичных цифр и их общее количество равно 2^n.

Число всевозможных булевых функций n переменных $\nu = 2^{2^n}$ быстро возрастает с увеличением n (при $n = 3$ оно равно 256, а при $n = 5$ превышает 4 миллиарда). Но функции одной и двух переменных еще можно перечислить и подробно исследовать, так как их количество сравнительно невелико ($\nu = 4$ при $n = 1$ и $\nu = 16$ при $n = 2$).

5. Булевы функции одной переменной. Общая таблица соответствия для булевых функций одной переменной имеет вид (справа указаны обозначения функций):

x	0	1	y
y_0	0	0	0
y_1	0	1	x
y_2	1	0	$\bar{x}$
y_3	1	1	1

Две функции $y_0 = 0$ и $y_3 = 1$ представляют собой *функции-константы* (тождественный нуль и тождественная единица), так как они не изменяют своих значений при изменении аргумента. Функция $y_1 = x$ повторяет значения переменной x и потому просто совпадает с ней.

Единственной нетривиальной функцией является $y_2 = \bar{x}$, называемая *отрицанием* или *инверсией* ($\bar{x}$ читается «не x»). Она равна 1, когда аргумент принимает значение 0, и равна 0 при аргументе 1.

6. Булевы функции двух переменных. Все 16 функций двух переменных приведены в табл. 6, где указаны условные обозначения, названия и чтения функций (в скобках даны встречающиеся в литературе варианты).

Шесть из приведенных функций не зависят от x_1 или x_2 (или от обоих вместе). Это две константы ($y_0 = 0$ и $y_{15} = 1$), повторения ($y_3 = x_1$ и $y_5 = x_2$) и отрицания ($y_{10} = \bar{x}_2$, $y_{12} = \bar{x}_1$), являющиеся функциями одной переменной (x_1 или x_2). Из остальных десяти функций две (y_4 и y_{11}) отличаются от соответствующих им (y_2 и y_{13}) лишь порядком расположения аргументов и поэтому не являются самостоятельными. Поэтому из 16 булевых функций двух переменных только восемь являются оригинальными (y_1, y_2, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{13}, y_{14}).

Рассмотрение булевых функций одной, двух и большего числа переменных показывает, что всякая функция от меньшего числа переменных содержится среди функций большего числа переменных. Функции, которые сводятся к зависимости от меньшего числа переменных, называют *вырожденными*, а функции, существенно

Таблица 6

Булевы функции двух переменных

x_1 / x_2	0 0 1 1 / 0 1 0 1	Обозначения	Названия	Чтение
y_0	0 0 0 0	0	Константа 0 (тождественный нуль, всегда ложно)	Любое 0
y_1	0 0 0 1	$x_1 x_2$; $x_1 \wedge x_2$ (x_1 & x_2; $x_1 \cap x_2$)	Конъюнкция (совпадение, произведение, пересечение, логическое «и»)	x_1 и x_2 (и x_1 и x_2)
y_2	0 0 1 0	$x_1 \leftarrow x_2$ ($x_1 \not\supset x_2$; $x_1 \setminus x_2$)	Отрицание импликации (совпадение с запретом, антисовпадение, запрет)	x_1, но не x_2
y_3	0 0 1 1	x_1	Повторение (утверждение, доминация) первого аргумента	Как x_1
y_4	0 1 0 0	$x_2 \leftarrow x_1$ ($x_1 \not\subset x_2$; $x_2 \setminus x_1$)	Отрицание обратной импликации (обратное антисовпадение)	Не x_1, но x_2
y_5	0 1 0 1	x_2	Повторение (утверждение, доминация) второго аргумента	Как x_2
y_6	0 1 1 0	$x_1 + x_2$ ($x_1 \bigtriangledown x_2$; $x_1 \oplus x_2$)	Сумма по модулю 2 (неравнозначность, антиэквивалентность)	x_1 не как x_2 (или x_1 или x_2)
y_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$ ($x_1 + x_2$; $x_1 \cup x_2$)	Дизъюнкция (разделение, логическая сумма, сборка, логическое «или»)	x_1 или x_2 (x_1 или хотя бы x_2)
y_8	1 0 0 0	$x_1 \downarrow x_2$ ($x_1 \overline{\vee} x_2$; $x_1 \bigcirc x_2$)	Стрелка Пирса (функция Вебба, отрицание дизъюнкции, логическое «не — или»)	Ни x_1, ни x_2

Продолжение табл. 6

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Обозначения	Названия	Чтение
y_9	1 0 0 1	$x_1 \sim x_2$ ($x_1 \equiv x_2$; $x_1 \leftrightarrow x_2$)	Эквиваленция (равнозначность, эквивалентность, взаимозависимость)	x_1 как x_2 (x_1, если и только если x_2)
y_{10}	1 0 1 0	$\bar{x}_2$ (x_2'; $\sim x_2$; $\neg x_2$)	Отрицание (инверсия) второго аргумента (дополнение к первой переменной)	Не x_2
y_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$ ($x_1 \subset x_2$; $x_1 < x_2$)	Обратная импликация (обратное разделение с запретом, обратная селекция)	Если x_2, то x_1 (x_1 или не x_2)
y_{12}	1 1 0 0	$\bar{x}_1$ (x_1'; $\sim x_1$; $\neg x_1$)	Отрицание (инверсия) первого аргумента (дополнение ко второй переменной)	Не x_1
y_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$ ($x_1 \supset x_2$; $x_1 > x_2$)	Импликация (разделение с запретом, следование, селекция)	Если x_1, то x_2 (не x_1 или x_2)
y_{14}	1 1 1 0	x_1/x_2 ($\overline{x_1 \wedge x_2}$; $\overline{x_1 \& x_2}$)	Штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, несовместность, логическое «не—и»)	Не x_1 или не x_2
y_{15}	1 1 1 1	1	Константа 1 (тождественная единица, всегда истинно)	Любое 1

зависящие от всех переменных, являются *невырожденными*. Так, среди функций одной переменной имеются две вырожденные (константы 0 и 1, которые можно рассматривать как функции от нуля переменных), функции двух переменных содержат те же константы и четыре функции одной переменной и т. д.

7. Зависимость между булевыми функциями. Из табл. 6 видно, что между функциями имеются зависимости $y_i = \bar{y}_{15-i}$ ($i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 15$), на основании которых можно записать соотношения для констант $0 = \bar{1}$ и $1 = \bar{0}$, для функции одной переменной $x = \bar{\bar{x}}$ и для функций двух переменных:

$$x_1 x_2 = \overline{x_1/x_2};\ x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2};\ x_1 + x_2 = \overline{x_1 \sim x_2};\ x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2},$$

или

$$x_1/x_2 = \overline{x_1 x_2};\ x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1 \leftarrow x_2};\ x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2};\ x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}.$$

Из этих зависимостей следует, что любая функция двух переменных (включая константы) выражается в аналитической форме через совокупность шести функций, содержащей отрицание $\bar{x}$ и любую из каждой пары функций $\{y_0, y_{15}\}$, $\{y_1, y_{14}\}$, $\{y_2, y_{13}\}$, $\{y_6, y_9\}$, $\{y_7, y_8\}$. Например, такой совокупностью могут служить функции: константа 0, отрицание $\bar{x}$, конъюнкция x_1x_2, дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, эквиваленция $x_1 \sim x_2$ и импликация $x_1 \to x_2$. Как уже упоминалось в (1. 5. 8), они используются в исчислении высказываний.

Выбранная таким способом совокупность шести функций является избыточной. Можно показать, что импликация и эквиваленция выражаются через остальные функции этой совокупности:

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2;$$
$$x_1 \sim x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2).$$

Для этого достаточно построить таблицу соответствия и сравнить ее с табл. 6:

x_1	0	0	1	1	
x_2	0	1	0	1	
$\bar{x}_1$	1	1	0	0	
$\bar{x}_2$	1	0	1	0	
$\bar{x}_1 \vee x_2$	1	1	0	1	$x_1 \to x_2$ ·
$x_1 \vee \bar{x}_2$	1	0	1	1	
$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$	1	0	0	1	$x_1 \sim x_2$

Таким образом, комплект элементарных функций сокращается до четырех: константа 0, отрицание $\bar{x}$, конъюнкция x_1x_2 и дизъюнкция $x_1 \vee x_2$. Этот комплект обладает существенными удобствами и часто применяется на практике, но и он может быть сокращен. Так, из законов де Моргана и свойства двойного отрицания вытекают тождества:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}; \quad x_1x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}.$$

Отсюда следует, что булевы функции выражаются через отрицание и конъюнкцию или через отрицание и дизъюнкцию.

Более того, для записи любой булевой функции достаточно только одной из двух элементарных функций — стрелки Пирса или штриха Шеффера. Это вытекает из соотношений (их доказательство приводится аналогично с помощью таблиц соответствия):

$$\bar{x} = x \downarrow x = x/x;$$
$$x_1x_2 = (x_1/x_2)/(x_1/x_2); \; x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2).$$

8. Булевы функции многих переменных. С помощью суперпозиции функций, т. е. подстановки в логические формулы вместо переменных некоторых булевых функций, можно получить более слож-

ные функции от любого числа переменных. Например, подставляя в выражение ab формулы $a = x_1 \vee x_2$ и $b = x_2 \to c$, а также $c = \bar{x}_3$, получаем $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)$. Таблица соответствия для сложных формул записывается на основании общей таблицы для элементарных функций. Для данного примера она имеет вид:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$x_1 \vee x_2$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\bar{x}_3$	1	0	1	0	1	0	1	0
$x_2 \to \bar{x}_3$	1	1	1	0	1	1	1	0
$(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)$	0	0	1	0	1	1	1	0

Если на всех наборах значений переменных функция принимает значение 0 или 1, то она вырождается в соответствующую константу и называется *тождественным нулем* или *тождественной единицей*. Например, $x \vee \bar{x} = 1$; $x\bar{x} = 0$; $x\bar{x} \vee x\bar{x}y = 0$; $((xy \vee \bar{y}z) \to \bar{z}) \vee (x \vee \bar{y})\, z = 1$; $x(x \to y) \to y = 1$ и т. п.

9. Геометрическое представление. Область определения булевых функций от n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как совокупность n-мерных векторов (слов длины n), компонентами которых являются буквы 0 и 1 двоичного алфавита. При $n = 3$ каждый вектор представляется вершиной единичного куба в трехмерном пространстве (рис. 188).

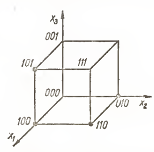


Рис. 188. Отображение булевой функции $y = (x_1 \vee x_2) \times (x_2 \to \bar{x}_3)$ на трехмерном кубе.

В общем случае совокупность векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отображается на множество вершин n-мерного куба. Все такие вершины образуют *логическое пространство*.

Булева функция отображается на n-мерном кубе путем выделения вершин, соответствующих векторам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на которых булева функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значения 1. Обычно такие вершины отмечают жирными точками. Так, на рис. 188 отображена функция $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)$ в соответствии с таблицей из (8).

10. Неоднородные функции. Аргументы *неоднородных функций*, в отличие от однородных, могут принимать значения из любых конечных или бесконечных множеств, но область значений самих функций ограничена конечными множествами.

Важным примером неоднородных функций являются двузначные *n-местные предикаты* (1. 5. 9). Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает одно из двух значений — «истинно» (1) или «ложно» (0) в зависимости от конкретных значений, приписываемых переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если значения переменных выбираются из некоторого множества M (универсума), то n-местный предикат можно рассматривать как n-местное отношение, определенное на этом множестве.

Одноместный предикат $P(x)$ задает некоторое свойство элементов множества M и вполне определяется подмножеством $P \subset M$ тех объектов $x \in M$, на которых он принимает значение «истинно».

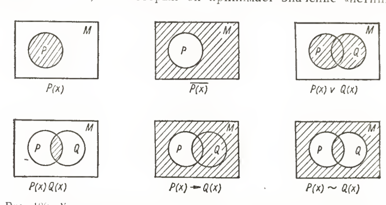


Рис. 189. Характеристические подмножества, соответствующие операциям над предикатами (область истинных значений заштрихована).

Множество объектов, на которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложно», соответствует дополнению множества P, т. е. $\overline{P}$. Очевидно, если $P(x)$ истинно, то $\overline{P(x)}$ — ложно и наоборот. Например, если на множестве натуральных чисел определен предикат $P(x) =$ = «x — четное число», то $\overline{P(x)}$ = «x — нечетное число». Таким образом, одноместный предикат, определенный на множестве M, разбивает это множество на два подмножества P и $\overline{P}$. Подмножество $P \subset M$, на котором предикат $P(x)$ принимает значение «истинно», называется *характеристическим подмножеством*.

Пусть на M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, характеристическими подмножествами которых являются соответственно P и Q. Рассматривая предикаты как двузначные функции, можно с помощью операций алгебры логики строить новые одноместные предикаты на множестве M. *Конъюнкция* $P(x)$ и $Q(x)$ — это предикат $R(x) = P(x) \wedge Q(x)$, который истинен для тех и только тех объектов из M, для которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ истинны.

Характеристическим множеством предиката $R(x)$ является пересечение $P \cap Q$. Подобным образом вводятся и операции дизъюнкции $P(x) \vee Q(x)$, импликации $P(x) \to Q(x)$, эквиваленции $P(x) \sim Q(x)$ и др. На рис. 189 показаны соответствующие этим операциям характеристические подмножества (область истинных значений заштрихована). Их легко получить из таблиц соответствия для функций двух переменных. Имеют место также соответствия между различными операциями, вытекающие из зависимостей между булевыми функциями: $P(x) \to Q(x)$ соответствует $\overline{P}(x) \vee Q(x)$, $P(x) \sim Q(x)$ соответствует $(P(x) \vee \overline{Q(x)})(\overline{P(x)} \wedge Q(x))$ или $P(x)Q(x) \vee \overline{P(x)}\overline{Q(x)}$ и т. п.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите таблицы соответствия для следующих булевых функций:

а) $x\overline{z} \vee yz$;
б) $(x \vee y)(y \to \overline{z}) \vee x$;
в) $(x \to y) \sim (\overline{x} \vee y)$;
г) $(x \to yz) \vee \overline{x}y$;
д) $(x \downarrow y)/(x \leftarrow z)$.

2. Найдите значения каждой из следующих булевых функций при $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$:

а) $(x_1 \vee x_2)\overline{x}_3 \vee x_4$;
б) $(x_1x_2 \to x_3)x_4$;
в) $x_1\overline{x}_2 \to (x_2 \sim x_3)$;
г) $(x_1 \downarrow x_2)/(x_2 \downarrow x_4)$.

3. С помощью таблиц соответствия убедитесь в справедливости соотношений:

а) $\overline{x} = x \downarrow x = x/x$;
б) $x_1x_2 = (x_1/x_2)/(x_1/x_2)$;
в) $x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.

4. Воспользовавшись зависимостями между функциями, выразите все (вырожденные и невырожденные) функции двух переменных через:

а) константу 0, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию;
б) отрицание и конъюнкцию;
в) отрицание и дизъюнкцию;
г) стрелку Пирса;
д) штрих Шеффера.

Проверьте результаты с помощью таблиц соответствия.

5. Отобразите на кубе соответствующей размерности функции из задачи 1.

6. С помощью таблиц соответствия убедитесь в справедливости следующих равносильностей:

а) $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$;
б) $xy \vee zu = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

7. Путем тождественных преобразований докажите равносильность

$$(x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3) \vee \overline{x}_3 \vee (x_1 \vee x_2)(x_4 \vee x_5) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$$

и проверьте результат с помощью таблиц соответствия.

8. Покажите, что приведенные ниже формулы являются тождественными единицами:

а) $x(x \to y) \to y$;

б) $(x \to (y \to z)) \to (xy \to z)$;

в) $(x \to y)(z \to y) \sim (xz \to y)$;

г) $(x \sim y) \sim (x \to y)(y \to x)$.

9. Какие логические функции соответствуют разности и дизъюнктивной сумме множеств?

10. Какие операции над множествами соответствуют импликации, эквивалентности, функции Шеффера, стрелке Пирса?

2. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1. Двойственность формул булевой алгебры. Из свойств, приведенных в (1. 5. 5), видно, что в булевой алгебре, как и в алгебре множеств, имеет место *принцип двойственности*. Взаимно двойственными операциями являются дизъюнкция и конъюнкция. Заменяя в некоторой формуле каждую операцию на двойственную ей, получаем *двойственную формулу*. Например, из формулы $x(y \vee \vee z(u \vee v))$ имеем $x \vee y(z \vee uv)$.

На основе законов де Моргана выводится следующее положение: если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — двойственные формулы, то $\overline{\varphi}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильна $\varphi(\overline{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отсюда следует, что

$$\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\varphi}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$

т. е. двойственная формула выражается как отрицание формулы, полученной из исходной замещением каждой переменной ее отрицанием. Таблица соответствия двойственной функции получается заменой значений аргументов в исходной функции на противоположные, т. е. 0 заменяется на 1, а 1 — на 0. Формула или функция, равносильная своей двойственной, называется *самодвойственной*.

Если формулы $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны, то и двойственные им формулы $\varphi_1{}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_2{}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также равносильны.

2. Нормальные формы. *Дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма* — это дизъюнкция (конъюнкция) конечного числа различных членов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию (дизъюнкцию) отдельных переменных или их отрицаний, входящих в данный член не более одного раза.

Данная формула приводится к нормальной форме следующим путем: 1) с помощью законов де Моргана формула преобразуется к такому виду, чтобы знаки отрицания относились только к отдельным переменным; 2) на основе первого (второго) дистрибутивного закона формула сводится к дизъюнкции конъюнкций (конъюнкции дизъюнкций); 3) полученное выражение упрощается в соответствии с тождествами $xx = x$ и $x\overline{x} = 0$ $(x \vee x = x$ и $x \vee \overline{x} = 1)$.

Пример: $(xy \vee \bar{y}z)\,\overline{\bar{x}u} = (xy \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{u}) = (xy \vee \bar{y}z)\,x \vee (xy \vee \bar{y}z)\,\bar{u} =$ $= xyx \vee \bar{y}zx \vee xy\bar{u} \vee \bar{y}z\bar{u} = xy \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{u} \vee \bar{y}z\bar{u}$ (дизъюнктивная нормальная форма); $(xy \vee \bar{y}z)\,\overline{\bar{x}u} = (xy \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{u}) = (x \vee \bar{y}z)(y \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{u}) =$ $= (x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee \bar{u}) = (x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee z)(x \vee \bar{u})$ (конъюнктивная нормальная форма).

Члены дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы, представляющие собой элементарные конъюнкции (дизъюнкции) k букв, называют *минитермами (макстермами)* k-го ранга. Так, в приведенных выше формах xy — минитерм второго ранга, $x\bar{y}z$ — минитерм третьего ранга, а $x \vee \bar{y}$ — макстерм второго ранга.

Если исходная формула содержит другие операции, то они предварительно выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, например:

$$\overline{x \to (\bar{x} \sim z)}\,(y \to \bar{z}) \vee \overline{x \to z} = \overline{\bar{x} \vee (x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z})}\,(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \overline{\bar{x} \vee z} =$$
$$= x\,\overline{(x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z})}\,(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = x(\bar{x}\bar{z} \vee xz)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} =$$
$$= (xxz \vee xxz)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = xz(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee x\bar{z} = xz\bar{y} \vee xz\bar{z} \vee x\bar{z} = x\bar{y}z \vee x\bar{z}.$$

3. **Совершенные нормальные формы.** Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо в прямом, либо в инверсном виде), то она называется *совершенной нормальной формой*.

Можно показать, что любая булева функция, не являющаяся тождественным нулем (единицей), имеет одну и только одну совершенную дизъюнктивную (конъюнктивную) нормальную форму. Если какой-либо член φ дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы не содержит переменной x_i, то она вводится тождественным преобразованием $\varphi = \varphi(x_i \vee \bar{x}_i) = \varphi x_i \vee \varphi\bar{x}_i$ (соответственно $\varphi = \varphi \vee x_i\bar{x}_i = (\varphi \vee x_i)(\varphi \vee \bar{x}_i)$). В силу тождеств $\varphi \vee \varphi = \varphi$ и $\varphi\varphi = \varphi$ одинаковые члены, если они появляются, заменяются одним таким членом.

Продолжая второй пример из (2), приведем данную функцию к совершенной дизъюнктивной нормальной форме: $x\bar{y}z \vee x\bar{z} =$ $= x\bar{y}z \vee x\bar{z}(y \vee \bar{y}) = x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$. Приведение к совершенной конъюнктивной нормальной форме иллюстрируется следующим примером:

$$\overline{x \vee y\bar{z}}\,(x \vee z) = \bar{x}\overline{y\bar{z}}\,(x \vee z) = \bar{x}(\bar{y} \vee z)(x \vee z) = (\bar{x} \vee y\bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x\bar{x})(x \vee$$
$$\vee z \vee y\bar{y}) = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z).$$

4. Проблема разрешимости. Формула (или соответствующая ей функция) называется *выполнимой*, если она не является тождественным нулем или единицей. Решение с помощью конечного числа действий вопроса, является ли данная формула выполнимой, т. е. не равна ли она тождественно нулю или единице, носит название *проблемы разрешимости*.

Ответ на этот вопрос можно получить, построив для данной формулы таблицу соответствия, что сводится по существу к определению значений формулы при всевозможных наборах значений входящих в нее переменных. Если на всех наборах формула принимает значения только 0 или только 1, то она невыполнима.

При большом количестве переменных такой способ практически неосуществим из-за огромного числа возможных наборов значений переменных. Более удобный путь — приведение формулы к нормальной форме. Если в процессе такого приведения формула не обращается в тождественный 0 или 1, то это свидетельствует о ее выполнимости.

5. Конституенты и представление функций. Для совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражение $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_n$ называют *конституентой единицы*, а выражение $\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$ — *конституентой нуля* ($\tilde{x}_i$ означает либо x_i, либо $\bar{x}_i$). Данная конституента единицы (нуля) обращается в единицу (нуль) только при одном соответствующем ей наборе значений переменных, который получается, если все переменные принять равными единице (нулю), а их отрицания — нулю (единице). Например, конституенте единицы $x_1\bar{x}_2x_3x_4$ соответствует набор (1011), а конституенте нуля $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$ — набор (1001).

Так как совершенная дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная форма является дизъюнкцией (конъюнкцией) конституент единицы (нуля), то можно утверждать, что представляемая ею булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обращается в единицу (нуль) только при наборах значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующих этим конституентам. На остальных наборах эта функция обращается в нуль (единицу).

Справедливо и обратное утверждение, на котором основан способ представления в виде формулы любой булевой функции, заданной таблицей. Для этого необходимо записать дизъюнкции (конъюнкции) конституент единицы (нуля), соответствующих наборам значений переменных, на которых функция принимает значение, равное единице (нулю). Например функции, заданной таблицей

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	1	1	0	1	0	0	1

соответствуют совершенные нормальные формы:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Полученные выражения можно преобразовать к другому виду на основании свойств булевой алгебры.

6. Алгебра Жегалкина. Другая замечательная алгебра булевых функций строится на основе операций сложения по модулю 2 и конъюнкции. Она называется *алгеброй Жегалкина* по имени предложившего ее советского ученого. Непосредственной проверкой по таблицам соответствия устанавливаются следующие основные свойства этой алгебры:

коммутативность $x + y = y + x$; $xy = yx$;
ассоциативность $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(yz) = (xy)z$;
дистрибутивность умножения относительно сложения $x(y + z) = xy + xz$;
свойства констант $x \cdot 1 = x$; $x \cdot 0 = 0$; $x + 0 = x$.

Все эти свойства подобны обычной алгебре, но в отличие от булевой алгебры закон дистрибутивности сложения относительно умножения не имеет силы ($xy + z \neq xz + yz$). Справедливы также следующие тождества:

закон приведения подобных членов при сложении $x + x = 0$;
закон идемпотентности для умножения $xx = x$.

Таким образом, в формулах алгебры Жегалкина, как и в булевой алгебре, не могут появляться коэффициенты при переменных и показатели степени. С помощью табл. 6 выводятся также следующие соотношения:

$$\bar{x} = 1 + x;\ x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2;\ x_1 + x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2.$$

Первые два тождества позволяют перейти от любой формулы булевой алгебры к соответствующей ей формуле алгебры Жегалкина, а с помощью третьего тождества осуществляется обратный переход. Например:

$$x(\bar{x} \vee y) = x[(1 + x) + y + (1 + x)y] = x(1 + x + y + y + xy) =$$
$$= x(1 + x + xy) = x + xx + xxy = x + x + xy = xy;$$
$$1 + x + y + xy = (1 + x)(1 + y) = \bar{x}\bar{y}.$$

Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = 1 + x_1 + x_1x_2;$$
$$x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = 1 + x_1 + x_2;$$
$$x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \to x_2} = x_1 + x_1x_2;$$
$$x_1 / x_2 = \overline{x_1x_2} = 1 + x_1x_2;$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2.$$

7. Канонические многочлены. Любая булева функция приводится к каноническому многочлену, члены которого не содержат числовых коэффициентов и линейны относительно любой из переменных (переменные входят только в первой степени).

Действительно, если привести данную функцию к совершенной нормальной форме и заменить все знаки дизъюнкции знаками суммы (по модулю 2), а отрицание переменных представить в соответствии с тождеством $\bar{x} = 1 + x$, то после раскрытия скобок получим некоторое алгебраическое выражение. Оно приводится к *каноническому многочлену* на основе соотношений $x + x = 0$ и $xx = x$. Такое представление всегда возможно и единственно (с точностью до порядка расположения членов).

Пример: $(1 + x + y)(1 + xy) + (x + xy)y = 1 + x + y + xy + xxy + yxy + xy + xyy = 1 + x + y + xy + xy + xy + xy + xy = 1 + x + y + xy$.

Проблема разрешимости в алгебре Жегалкина сводится к указанным преобразованиям, в процессе которых делается вывод о выполнимости той или иной формулы. Например, $x(x \to y) \to y = x(1 + x + xy) \to y = xy \to y = 1 + xy + xyy = 1 + xy + xy = 1$; так как эта формула является тождественной единицей, то она невыполнима.

Преимущество алгебры Жегалкина состоит в арифметизации логики, что позволяет выполнять преобразования булевых функций, используя опыт преобразования обычных алгебраических выражений. Ее недостаток по сравнению с булевой алгеброй — сложность формул, что особенно сказывается при значительном числе переменных, например: $x \vee y \vee z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz$. Однако при использовании вычислительных машин различия в сложности выполнения операций булевой алгебры и арифметических операций значительно ослабляются.

8. Типы булевых функций. В алгебре логики из множества $\nu = 2^{2^n}$ различных булевых функций n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выделяются следующие пять типов булевых функций.

1) *Функции, сохраняющие константу* 0, т. е. такие $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Так как на одном из 2^n наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значения таких функций фиксированы, то их число равно $2^{2^n - 1} = \frac{1}{2} 2^{2^n} = \frac{1}{2}\nu$, т. е. половина всех функций n переменных сохраняет константу 0.

2) *Функции, сохраняющие константу* 1, т. е. такие $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Их число, как и в предыдущем случае, равно половине общего числа всех функций n переменных.

3) *Самодвойственные функции*, т. е. такие, которые принимают противоположные значения на любых двух противоположных наборах. Если в общей таблице соответствия наборы, как обычно

следуют в порядке их номеров, то противоположные друг другу наборы располагаются симметрично относительно середины их расположения. Это значит, что строка значений самодвойственной функции должна быть антисимметричной относительно своей середины. Самодвойственная функция полностью определяется заданием ее значений на половине всех наборов (остальные значения определяются по условию антисимметричности), поэтому число независимых наборов равно $\frac{1}{2}2^n$ и число всех таких функций $2^{\frac{1}{2}2^n} = \sqrt{2^{2^n}} = \sqrt{\nu}$.

4) *Линейные функции*, т. е. такие, которые представляются в алгебре Жегалкина каноническим многочленом, не содержащем произведений переменных: $a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ принимают значения 0 или 1. Так как всего коэффициентов $n+1$, то число различных линейных многочленов будет 2^{n+1}. В силу однозначности представления функции каноническим многочленом это число выражает и количество линейных функций.

5) *Монотонные функции*, т. е. такие, которые для любых двух наборов из множества значений переменных, частично упорядоченного соотношением $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ при $\alpha_i \leqslant \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяют неравенству $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Рассмотренные типы функций замкнуты относительно операции суперпозиции, т. е. суперпозиция любого числа булевых функций данного типа является функцией того же типа.

9. Функциональная полнота. Система функций, суперпозицией которых может быть представлена любая функция из некоторого множества булевых функций, называется *функционально полной*. Если в такой системе допускаются константы 0 и 1, то ее называют *ослабленно функционально полной*. Говорят, что функционально полная система функций образует *базис в логическом пространстве*. Система функций называется минимально полным базисом, если удаление из нее любой функции превращает эту систему в неполную.

Рассмотренные в (1.7) функционально полные системы комплектовались путем сопоставления различных выражений для булевых функций. Общее решение вопроса основано на *теореме о функциональной полноте*: для того чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она включала хотя бы одну функцию: несохраняющую константы 0, несохраняющую константы 1, несамодвойственную, нелинейную и немонотонную. Эту теорему следует понимать так, что одна и та же функция может представлять в функционально полной системе одно или несколько требуемых свойств, если она обладает этими свойствами.

С помощью табл. 6 можно следующим образом охарактеризовать свойства булевых функций с позиций функциональной полноты (звездочкой отмечены свойства, которыми обладает данная функция):

Булева функция	Формулы	Свойства				
		Несохранение 0	Несохранение 1	Несамодвойственность	Нелинейность	Немонотонность
Константа 0	0		*	*		
Константа 1	1	*		*		
Отрицание	$\bar{x}$	*	*			*
Конъюнкция	$x_1 x_2$			*	*	
Дизъюнкция	$x_1 \vee x_2$			*	*	
Импликация	$x_1 \rightarrow x_2$	*		*	*	*
Эквиваленция	$x_1 \sim x_2$	*		*		*
Отрицание импликации	$x_1 \leftarrow x_2$		*	*	*	*
Сумма по модулю 2	$x_1 + x_2$		*	*		*
Штрих Шеффера	x_1 / x_2	*	*	*	*	*
Стрелка Пирса	$x_1 \downarrow x_2$	*	*	*	*	*

Отсюда видно, что рассмотренные в (1. 7) системы операций (дизъюнкция и отрицание, конъюнкция и отрицание, штрих Шеффера, стрелка Пирса) удовлетворяют теореме о функциональной полноте. Система операций алгебры Жегалкина (сумма по модулю 2 и конъюнкция) вместе с константой 1 образует ослабленно функционально полную систему.

Выбрав любую элементарную функцию и дополнив ее одной или несколькими другими функциями так, чтобы все они вместе удовлетворяли теореме о функциональной полноте, можно выразить через них все другие булевы функции. Например, в основу одного из таких комплектов можно положить импликацию и константу 0. Тогда $x_1 \vee x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2$ и $\bar{x} = x \rightarrow 0$, а через дизъюнкцию и отрицание выразятся и все остальные функции. В качестве другого функционально полного комплекта можно взять конъюнкцию, эквиваленцию и константу 0. При этом $\bar{x} = 0 \sim x$ и формулы алгебры логики, построенной на этих операциях, будут двойственны формулам алгебры Жегалкина, если в качестве двойственных символов принять $+$ и $\sim$, а также 1 и 0.

По-видимому, все лучшее, что можно извлечь из различных вариантов функционально полных систем, уже заложено в булевой алгебре и алгебре Жегалкина. Но при решении специальных задач не исключается построение и применение других алгебр логики.

10. Булевы алгебры. Алгебра, основные свойства которой приведены в (1.5.4) и (1.5.5), является лишь частным и простейшим случаем широкого класса так называемых *булевых алгебр*. Обычно при определении булевой алгебры одну из операций (дизъюнкцию) называют сложением, а другую (конъюнкцию) — умножением и наделяют их свойствами, аналогичными уже рассмотренным свойствам.

Сравнив свойства булевой алгебры и алгебры множеств (2.1.1), легко убедиться, что алгебра множеств также является булевой алгеброй относительно операции объединения $\bigcup$ и пересечения $\bigcap$. Роль единицы и нуля играют соответственно исходное множество (универсум) U и пустое множество $\varnothing$, а операции отрицания соответствует дополнение до исходного множества. В то же время алгебра Жегалкина (6) не относится к классу булевых алгебр, так как одна из ее операций (сложение по модулю 2) не является дистрибутивной относительно другой операции (конъюнкции).

Приведем еще один пример булевой алгебры на ограниченном множестве M действительных чисел, содержащем верхнюю p и нижнюю q грани. Операции сложения и умножения (дизъюнкции и конъюнкции) можно определить как $x \vee y = \max(x, y)$ и $xy = \min(x, y)$. Роль 1 и 0 играют соответственно p и q. Отрицание $\bar{x}$ определяется числом, симметричным числу x относительно центра множества $\frac{1}{2}(p+q)$, т. е. предполагается, что множество M симметрично относительно своего центра (сам центр может и не входить в состав множества). Эта алгебра включает и двоичную алгебру как частный случай, когда множество M состоит только из двух чисел 0 и 1, причем $p = 1$ и $q = 0$ (центр $^1/_2$ не входит в M).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Для упрощения формул часто используются равносильности:

$$x \vee xy = x;\ x \vee \bar{x}y = x \vee y;\ \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y.$$

Запишите двойственные соотношения и докажите их справедливость.

2. Покажите, что функция $xy \vee xz \vee yz$ является самодвойственной (с помощью тождественных преобразований и таблиц соответствия).

3 Покажите, что двойственными для функций $x_1 \to x_2$; $x_1 \downarrow x_2$; $x_1 + x_2$ являются соответственно функции $x_2 \leftarrow x_1$; x_1 / x_2; $x_1 \sim x_2$.

4. Приведите к совершенным дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам функцию

$$y = ((x_1 \to x_2) \vee x_2) \to x_2 x_3:$$

а) путем тождественных преобразований;
б) с помощью таблицы соответствия.

5. Запишите совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы функций y_1 и y_2 трех переменных x_1, x_2, x_3, заданных таблицей соответствия:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
y_1	0	1	1	0	0	1	0	1
y_2	1	0	1	0	0	1	0	0

Упростите полученные выражения с помощью тождественных преобразований.

6. Запишите все функции двух переменных (таблица 6) в совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах.

7. Выразите через операции алгебры Жегалкина следующие функции:
а) $x \vee y \vee z$; б) $(x \to y)\bar{z}$; в) $\bar{x}y \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$.

8. Покажите, что функция $y = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ является линейной.

9. Пользуясь приведенными в (9) свойствами булевых функций, покажите, какие из следующих систем являются функционально полными:
а) импликация и константа 0;
б) сумма по модулю 2 и импликация;
в) эквиваленция, отрицание и константа 0;
г) конъюнкция, отрицание импликации и константа 1;
д) дизъюнкция и эквиваленция;
е) дизъюнкция, сумма по модулю 2 и отрицание. Какие из них являются ослабленно функционально полными и минимально полными?

10. Укажите всевозможные функционально полные системы, состоящие из двух функций. Какие из них являются ослабленно функционально полными и минимально полными?

11. Укажите всевозможные минимально полные системы функций, которые образуются с участием:
а) суммы по модулю 2;
б) импликации.

12. Пусть k — натуральное число, а M — множество его целых положительных делителей. Определите для любых элементов из M $(x, y \in M)$ операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции следующим образом: $\bar{x}$ — частное от деления k на x; $x \vee y$ — наименьшее общее кратное x и y; xy — наибольший общий делитель x и y. Роль константы 0 играет число 1, а константы 1 — число k. Покажите, что при этом множество делителей числа k образует булеву алгебру.

3. КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ

1. Контакты. Как уже отмечалось в (1.5.7), любую булеву функцию можно реализовать схемой, состоящей из последовательно и параллельно соединенных ключей. Каждый такой ключ может находиться в двух состояниях — разомкнут (0) и замкнут (1), а переход из одного состояния в другое осуществляется каким-либо управляющим органом.

В электрических цепях роль ключей играют многочисленные устройства, предназначенные для коммутации (замыкания и раз-

мыкания): выключатели, электромагнитные реле, телеграфные ключи, электронные ключевые схемы и т. п. Обычные выключатели, телеграфные ключи и подобные им устройства управляются рукой человека. Состояние электромагнитного реле изменяется под воздействием электрического тока, протекающего по обмотке катушки (рис. 190, *а*). Ключом в широком смысле является всякое устройство, способное принимать только одно из двух возможных состояний: механические защелки, дверные замки, рычаги управления, железнодорожные светофоры и т. п. Более того, двузначную переменную, независимо от ее конкретного смысла, можно рассматривать, как ключ, состояние которого соответствует значению этой переменной.

В рамках общей теории целесообразно отвлечься от конструктивных и специфических особенностей ключевых объектов и интерпретировать ключ как отрезок проводника с контактом, который может быть разомкнут или замкнут. Разомкнутое состояние контакта отождествляется с нулем, а замкнутое — с единицей.

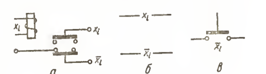


Рис 190. Контакты:
а — электромагнитное реле; *б* — условное изображение размыкающих (x_i) и замыкающих ($\bar{x}_i$) контактов (*в*)

Замыкающие (нормально разомкнутые) контакты обозначаются x_i, *размыкающие* (нормально замкнутые) контакты — через $\bar{x}_i$ (рис. 190, *б*). При управляющем воздействии контакт меняет свое состояние: нормально разомкнутый контакт замыкается, а нормально замкнутый — размыкается. В зависимости от своего состояния контакты пропускают электрический ток или препятствуют его прохождению.

Процессы переключения в реальных устройствах занимают некоторое, иногда довольно большое время. Однако во многих задачах время переключения можно не учитывать, считая, что контакты переходят из одного состояния в другое мгновенно.

2. Однотактные схемы. Схемы, образованные соединением контактов, которые переключаются одновременно (за один такт), а время переключения не учитывается, называются *однотактными*.

Простейшие примеры таких схем были рассмотрены в (1.5.7). Каждая из них, будучи включена в цепь с источником, в результате совместного действия контактов замыкает или размыкает эту цепь и, следовательно, сама является некоторым контактом по отношению к цепи с источником (рис. 191, *а*). Подобные контактные схемы называют *двухполюсными*.

Соответствие между двухполюсной контактной схемой и булевой функцией $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается следующим образом:

значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются наличием (1) или отсутствием (0) тока в обмотке реле, а значения функции y — состоянием двухполюсной цепи (как и для контактов, 0 соответствует разомкнутой, а 1 — замкнутой цепи).

Независимо от характера ключей двухполюсная контактная схема представляется как схема с n входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и одним

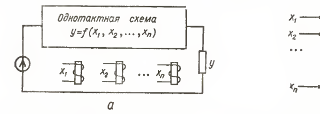


Рис. 191. Контактная схема с n входами (a) и ее условное представление ($б$).

выходом y (рис. 191, $б$). Состояния входов определяют воздействия на контакты схемы, причем вход x_i управляет всеми контактами, обозначенными этой буквой (x_i или $\bar{x}_i$).

3. Анализ контактных схем. Задача *анализа* контактной схемы состоит в построении соответствующей ей булевой функции. Для параллельно-последовательных схем эта задача решается на основе

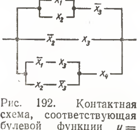


Рис. 192. Контактная схема, соответствующая булевой функции $y = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \vee (\bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3) x_4$.

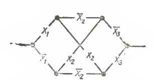


Рис. 193. Мостиковая схема, соответствующая булевой функции $y = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

того, что параллельное соединение контактов соответствует дизъюнкции, а последовательное соединение — конъюнкции переменных, которыми эти контакты обозначены в схеме. Например, для двухполюсной контактной схемы (рис. 192) $y = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \vee (\bar{x}_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3)x_4$.

Если схема (или ее часть) имеет произвольную структуру, то ее анализ проводится путем выделения всех путей между входным

и выходным полюсами схемы. Каждый такой путь представляется конъюнкцией переменных входящих в нее контактов, а вся схема — дизъюнкцией этих конъюнкций. Например, для мостиковой схемы (рис. 193) $y = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$. Интересно отметить, что эта функция реализует операцию сложения по модулю 2 трех двоичных переменных, т. е. $y = x_1 + x_2 + x_3$, в чем можно убедиться по таблицам соответствующих функций.

4. Синтез контактных схем. При построении контактной схемы по заданной булевой функции *(задача синтеза)* исходная функция может быть задана как логической формулой, так и таблицей. В обоих случаях прежде всего необходимо выразить функции через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Каждая операция конъюнкции соответствует последовательному соединению

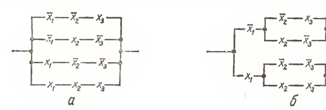


Рис. 194. Контактные схемы, соответствующие совершенной дизъюнктивной нормальной форме (*а*) и упрощенному выражению (*б*) булевой функции.

контактов, а операция дизъюнкции — параллельному соединению. В результате получаем последовательно-параллельную контактную схему.

Пусть, например, функция задана таблицей соответствия, приведенной в (2.5). На основе ее в совершенной дизъюнктивной нормальной форме строится схема в виде параллельного соединения ветвей, каждая из которых представляет собой последовательное соединение контактов, соответствующих переменным конституент единицы (рис. 194, *а*).

Преобразуя исходное выражение, можно получить другие контактные схемы, соответствующие данной функции. Так, для рассматриваемого примера: $y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3) \vee x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3)$.

Этому выражению соответствует схема рис. 194, *б*, которая содержит на два контакта меньше. Еще проще мостиковая схема (рис. 193), которая реализует ту же функцию.

Центральной проблемой синтеза является построение наиболее простой или в каком-то смысле оптимальной схемы. Часто эта проблема сводится к *минимизации булевых функций*, т. е. к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат

минимальное количество вхождений переменных. Проблема оптимального синтеза еще далека от полного решения, но разработанные методы позволяют существенно упрощать формулу и схемы, а в сравнительно простых случаях получать и оптимальные схемы.

5. Схемы со многими выходами. Если необходимо реализовать несколько булевых функций, то каждая из них может быть представлена соответствующей контактной схемой. Однако такой путь неэкономичен. Более целесообразно построить единую схему с несколькими выходами (рис. 195), соответствующими данной системе функций:

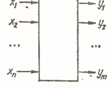


Рис. 195. Контактная схема с n входами и m выходами.

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n);\; y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n);\; \ldots;\; y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Примером *многовыходной схемы* может служить *полное релейное дерево*, в котором каждая конституента единицы представлена одним выходным полюсом, а всего имеется 2^n выходов (на рис. 196, *а* изображено полное релейное дерево для $n = 3$).

Любую функцию от n переменных можно реализовать объединением выходов полного релейного дерева, которые соответствуют тем наборам переменных, на которых функция принимает значения 1. Контакты, которые не подсоединены к требуемым выходам,

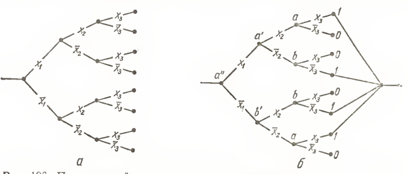


Рис. 196. Полное релейное дерево для трех переменных (*а*) и его преобразование для конкретной функции (*б*).

удаляются из схемы. Например, для функции, заданной таблицей в (2.5), построение приведено на рис. 196, *б*. После упрощения эта схема приводится к виду рис. 194, *б*.

Более простые схемы можно получить объединением участков релейного дерева, общих для путей, которые соответствуют различным конституентам. Для этого обозначаем одинаковыми буквами или цифрами те узлы, из которых выходят пары x_n и $\bar{x}_n$ с совпадаю-

щими значениями функции. Дальше аналогично обозначаем одинаковыми буквами узлы, из которых выходят пары x_{n-1} и $\overline{x}_{n-1}$ с совпадающими предыдущими обозначениями (порядок букв также учитывается) и т. д. до последней пары x_1 и $\overline{x}_1$. После этого одинаково обозначенные узлы объединяются и проводятся упрощения в соответствии с рис. 197.

Так, в схеме рис. 196, *б* для пар $(x_3, \overline{x}_3)$ имеется две комбинации значений (1, 0) и (0, 1). Узлы, из которых выходят пары с комбинациями (1, 0), обозначаем буквой *a*, а узлы, из которых выходят пары с комбинациями (0, 1) — буквой *b*. Для пар $(x_2, \overline{x}_2)$ также встречаются две комбинации в предыдущих обозначениях: (*a*, *b*)

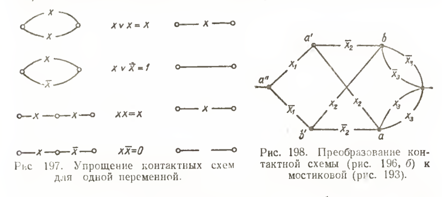


Рис 197. Упрощение контактных схем для одной переменной.

Рис. 198. Преобразование контактной схемы (рис. 196, *б*) к мостиковой (рис. 193).

и (*b*, *a*). Узлы, из которых выходят эти пары, обозначаем соответственно через *a'* и *b'*. Наконец, для пары $(x_1, \overline{x}_1)$ имеется единственная комбинация (*a'*, *b'*), и узел, из которого выходит эта пара, обозначаем через *a''*. Объединяя узлы с одинаковыми обозначениями (*a* и *b*), приходим к схеме, показанной на рис. 198, которая после замены параллельных контактов x_3 и x_3 на x_3, а также $\overline{x}_3$ и $\overline{x}_3$ на x_3, совпадает с мостиковой схемой (рис. 193).

Объединяя выходы полного релейного дерева, можно построить контактные схемы и для нескольких функций при условии, что множества наборов значений переменных, на которых эти функции принимают значения 1, не пересекаются. Пусть, например, требуется построить контактную схему с двумя выходами, реализующую функции $y_1 = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$ и $y_2 = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$. Из таблицы соответствия для этих функций

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
y_1	0	1	0	0	0	0	1	1
y_2	1	0	1	0	1	1	0	0

видим, что ни на одном наборе значений переменных функции не принимают одновременно значений, равных 1. Следовательно, для построения требуемой контактной схемы можно воспользоваться полным релейным деревом (рис. 199, *а*), в результате преобразования которого получаем схему с двумя выходами (рис. 199, *б*).

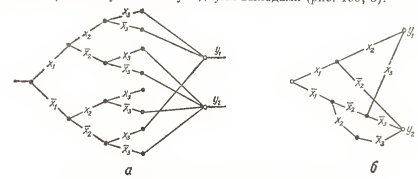


Рис. 199 Построение схемы с двумя выходами:
а — преобразование полного релейного дерева; *б* — контактная схема

6. Булевы матрицы. Для описания контактных схем произвольной структуры с любым числом выходов используются различные типы *булевых матриц*, элементами которых являются константы 0 и 1, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функции этих переменных.

Рис. 200. К определению булевых матриц контактной схемы.

Пусть контактная схема имеет k узлов. *Матрица непосредственных связей (примитивная матрица соединений)* P — это квадратная таблица $k \times k$, элементы главной диагонали которой равны 1, а элементы $p_{ij} = p_{ji}$ представляют собой булеву функцию прямого соединения между узлами i и j. *Матрица полных связей (полная матрица соединений)* Q отличается тем, что ее элементы $q_{ij} = q_{ji}$ представляют собой булеву функцию с учетом всевозможных путей без циклов между узлами i и j. Так, для схемы рис. 200 имеем:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_4 & x_2 \\ 0 & x_4 & 1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1(x_2 \vee x_3x_4) & x_1(x_3 \vee x_2x_4) & x_1 \\ x_1(x_2 \vee x_3x_4) & 1 & x_4 \vee x_2x_3 & x_2 \vee x_3x_4 \\ x_1(x_3 \vee x_2x_4) & x_4 \vee x_2x_3 & 1 & x_3 \vee x_2x_4 \\ x_1 & x_2 \vee x_3x_4 & x_3 \vee x_2x_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведение булевых матриц определяется, как и для обычных матриц, правилом «строка на столбец», но операциям сложения и умножения действительных чисел соответствуют дизъюнкция и конъюнкция логических переменных и функций. Элементы матрицы $C = AB$, где A и B — булевы матрицы, выражаются соотношением $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} \vee a_{i2}b_{2j} \vee \ldots \vee a_{in}b_{nj}$. Произведения матрицы самой на себя выражаются как ее степени $AA = A^2$, $A^2A = A^3$, ..., $A^{n-1}A = A^n$.

Можно показать, что для любой контактной схемы с k узлами существует такое $r \leqslant k - 1$, что $P^r = P^{r+s} = Q$, где s — произвольное целое положительное число. Это значит, что матрицу полных связей можно получить умножением матрицы непосредственных связей P на саму себя до тех пор, пока результат не начнет повторяться, причем число таких умножений не превышает $k - 1$. Так, для рассматриваемого примера имеем:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1 \\ x_1x_2 & 1 & x_4 \vee x_2x_3 & x_2 \vee x_3x_4 \\ x_1x_3 & x_4 \vee x_2x_3 & 1 & x_3 \vee x_2x_4 \\ x_1 & x_2 \vee x_3x_4 & x_3 \vee x_2x_4 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^3 = Q.$$

Следует отметить, что элементы матрицы P^i представляют собой функции всех связей между узлами посредством не более чем $i - 1$ узлов. В частности, каждый элемент матрицы P^2 учитывает непосредственные связи между парой узлов и связи между ними посредством еще одного узла. Например, $p_{23} = p_{32} = x_4 \vee x_2x_3$ соответствует непосредственной связи между узлами 2 и 3 через контакт x_4, а также связи посредством узла 4 (член x_2x_3).

7. Исключение узлов (анализ). При анализе контактной схемы с помощью булевых матриц сначала записывается матрица непосредственных связей P, а затем путем возведения ее в соответствующую степень получается матрица полных связей Q. Элементы q_{ij} матрицы Q и представляют собой булевы функции данной контактной схемы между парами узлов с номерами i и j.

Однако такой способ в большинстве случаев не является рациональным, так как обычно представляют интерес только некоторые из функций q_{ij} между внешними узлами (полюсами) схемы. Поэтому имеет смысл предварительно исключить внутренние узлы и таким образом уменьшить порядок матрицы P, прежде чем возводить ее в требуемую степень. При исключении s-го узла в матрице непосредственных связей вычеркиваются s-я строка и s-й столбец и каждый ее элемент p_{ij} заменяется элементом $p_{ij} \vee p_{is}p_{sj}$. Член $p_{is}p_{sj}$ учитывает путь между узлами i и j через узел s, который действует параллельно с непосредственной связью p_{ij}. В результате исключения узла матрица P преобразуется к матрице P_s на единицу

меньшего порядка, которая представляет собой матрицу непосредственных связей относительно неисключенной совокупности узлов.

Пусть, например, в схеме рис. 201 требуется определить булевы функции между узлами *1*, *2* и *3*. Матрицы P и P_4 имеют вид:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ x_1 & 1 & x_2 \vee x_3 & 0 \\ \bar{x}_2 & x_2 \vee \bar{x}_3 & 1 & x_3 \\ \bar{x}_1 & 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \\ x_1 & 1 & x_2 \vee \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 & x_2 \vee \bar{x}_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определив P_4^2 после преобразований, получим матрицу полных связей относительно узлов *1*, *2* и *3*, называемую *матрицей выходов*:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2) & \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 (x_2 \vee \bar{x}_3) \\ x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2) & 1 & x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \vee x_3 \\ \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 (x_2 \vee \bar{x}_3) & x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \vee x_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы являются функциями выходов: $f_{12} = x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)$; $f_{13} = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 (x_2 \vee \bar{x}_3)$; $f_{23} = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \vee x_3$.

8. Введение узлов (синтез). При синтезе контактных схем задаются функции для внешних узлов (полюсов), которые определяют матрицу выходов. Необходимое и достаточное условие непротиворечивости этих функций состоит в том, что матрица выходов должна быть *устойчивой*, т. е. удовлетворять равенству $F = F^2$.

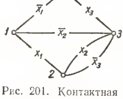


Рис. 201. Контактная схема к примеру.

Структуру контактной схемы, реализующей заданную непротиворечивую совокупность функций, можно получить из матрицы F путем ее последовательного расширения, соответствующего *операции введения узла*. Эта операция обратна исключению узла и приводит к матрице F_s, порядок которой на единицу выше, а элементы таковы, что при исключении узла s снова получим матрицу F. Последовательным применением операции введения узла исходная матрица расширяется и преобразуется к виду, при котором элементы представляют собой константы 0 или 1, переменные, их отрицания или элементарные конъюнкции переменных. Тогда полученную матрицу можно рассматривать как матрицу непосредственных связей, на основе которой легко построить соответствующую контактную схему. При этом элементарные конъюнкции реализуются последовательными соединениями соответствующих контактов.

Операция введения неоднозначна, поэтому можно получать различные схемы, удовлетворяющие заданным функциям. Выбор наилучшего пути преобразования матрицы F к матрице непосред-

ственных связей P, определяющей вид контактной схемы, в значительной степени зависит от искусства инженера.

Пусть требуется построить контактную схему со следующими функциями; $f_{12} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$; $f_{13} = \bar{x}_3(x_2 \vee x_1x_4)$; $f_{23} = 0$. Матрица выходов имеет вид:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 & \bar{x}_3(x_2 \vee x_1x_4) \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 & 1 & 0 \\ \bar{x}_3(x_2 \vee x_1x_4) & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы можно рассматривать как результат исключения узла 4, который мы должны ввести, т. е. $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 = f'_{12} \vee f'_{14}f'_{42}$, $\bar{x}_3(x_2 \vee x_1x_4) = f'_{13} \vee f'_{14}f'_{43}$ и $0 = f'_{23} \vee f'_{24}f'_{43}$. Полагая $f'_{14} = x_2 \vee x_1x_4$ и $f'_{43} = \bar{x}_3$ (возможны и другие варианты), имеем $f'_{13} = f'_{42} = f'_{23} = f'_{24} = 0$ и $f'_{12} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$. Таким образом, в результате введения узла 4 имеем матрицу

$$F_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 & 0 & x_2 \vee x_1x_4 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{x}_3 \\ x_2 \vee x_1x_4 & 0 & \bar{x}_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Продолжая аналогично, можно записать соотношения для элементов матрицы $F_{(4,5)}$, соответствующей введению узла 5: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 = f''_{12} \vee f''_{15}f''_{52}$; $0 = f''_{13} \vee f''_{15}f''_{53}$; $x_2 \vee x_1x_4 = f''_{14} \vee f''_{15}f''_{54}$; $0 = f''_{23} \vee f''_{25}f''_{53}$; $0 = f''_{24} \vee f''_{25}f''_{54}$; $\bar{x}_3 = f''_{31} \vee f''_{35}f''_{51}$. Если принять $f''_{15} = x_1$, то необходимо положить $f''_{12} = \bar{x}_1\bar{x}_2$; $f''_{52} = x_3$; $f''_{13} = f''_{53} = 0$; $f''_{14} = x_2$; $f''_{54} = x_4$; $f''_{23} = f''_{25} = f''_{24} = 0$. В результате приходим к матрице, которую можно рассматривать как матрицу непосредственных связей P синтезируемой схемы:

$$P = F_{(4,5)} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & 0 & x_2 & x_1 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{x}_3 & 0 \\ x_2 & 0 & \bar{x}_3 & 1 & x_4 \\ x_1 & x_3 & 0 & x_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Схема, соответствущая этой матрице, показана на рис. 202.

9. Вентильные схемы. До сих пор предполагалось, что контакты обладают двусторонней проводимостью, т. е. в открытом состоянии они пропускают сигналы как в прямом, так и в обратном направлениях. Таковы, например, контакты электромагнитных реле. Однако при использовании электронных ключей, например управляемых диодов, проводимость в прямом направлении настолько превышает проводимость в обратном направлении, что практически можно считать контакты односторонними, т. е. пропускающими сигналы

только в прямом направлении. Схемы с односторонними контактами называют *вентильными схемами*.

На вентильных схемах, как и ранее, изображаются только соединения контактов, а управляющие цепи обычно опускаются. При этом предполагается, что управление осуществляется как сигналами, соответствующим переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и их отрицаниям $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, что отмечается на схеме одним из символов x_i или $\bar{x}_i$ для каждого контакта. Кроме того, в вентильных схемах обычно имеет место естественное разделение сигналов: если к узлу схемы одновременно поступают несколько сигналов, то результирующий сигнал в этом узле действует как их дизъюнк-

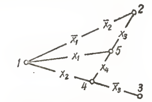


Рис. 202. Схема, построенная по матрице непосредственных связей.

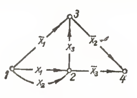


Рис. 203. Вентильная схема.

ция. Направления прохождений сигналов обозначаются на схемах стрелками, относящимися к соответствующим контактам. Пример вентильной схемы показан на рис. 203.

Булевы матрицы вентильных схем в общем случае несимметричны. Так, для приведенной схемы имеем:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \vee x_2 & \bar{x}_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & \bar{x}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \vee x_2 & \bar{x}_1 \vee x_3 & \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \\ 0 & 1 & x_3 & \bar{x}_2 \vee x_3 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом в соответствии с (6) $Q = P^3$. Матрицу Q можно также записать непосредственно из вентильной схемы, учитывая для ее элементов q_{ij} все пути от i-го узла к j-му узлу по направлению стрелок. Так, $q_{12} = x_1 \vee x_2$; $q_{13} = \bar{x}_1 \vee (x_1 \vee x_2)x_3 = \bar{x}_1 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = \bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_2x_3 = \bar{x}_1 \vee x_3$; $q_{14} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee (x_1 \vee x_2)\ (\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_2) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$ и т. д. Булева функция для любого выхода может быть определена также последовательным исключением узлов, кроме входного и выходного.

Синтез вентильных схем осуществляется аналогично изложенному в (8), причем в исходной матрице выходов все функции, кроме заданных, обычно полагаются тождественно равными нулю. Пусть,

например, $f_{12} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$ и $f_{13} = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2$. Матрица выходов и ее расширения имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 & x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_1\bar{x}_3 & \bar{x}_1x_2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & \bar{x}_3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F_{(4,5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & \bar{x}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & \bar{x}_3 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_3 & x_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рис. 204. Схемы, реализующие функции $f_{12} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$ и $f_{13} = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2$: *а* — с четырьмя узлами; *б* — с пятью узлами.

Рис. 205. Условное изображение криотрона.

Рис. 206. Криотронная схема с инверсными выходами (*а*) и соответствующая ей контактная схема (*б*).

Схемы, соответствующие $F_{(4)}$ и $F_{(4,5)}$ показаны на рис. 204. Как видно, вторая схема (рис. 204, *б*) содержит на один контакт меньше, чем первая (рис. 204, *а*).

10. Криотронные схемы. Перспективным ключевым элементом является пленочный криотрон, действие которого основано на явлении сверхпроводимости при низких температурах. Условное

изображение криотрона показано на рис. 205. При отсутствии тока в управляющей шине материал (например, олово) обладает сверхпроводимостью, а при прохождении по шине A тока достаточной величины этот материал имеет конечное сопротивление. В результате цепь B действует как двусторонний управляемый контакт, причем для управления используются сигналы, соответствующие переменным x_i и их отрицаниям $\bar{x}_i$.

Для анализа и синтеза криотронных схем применяют все рассмотренные методы с учетом специфических особенностей криотронов. Например, на рис. 206, *а* показана *криотронная схема с инверсными выходами*, реализующая функции $y = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$ и $\bar{y} = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$, а на рис. 206, *б* — соответствующая ей последовательно-параллельная контактная схема. Аналогично используются полное криотронное дерево, булевы матрицы и т. п.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте контактные схемы, реализующие функции двух переменных: импликацию, отрицание импликации, эквиваленцию, сумму по модулю 2, штрих Шеффера, стрелку Пирса.

2. Постройте контактные схемы, соответствующие приведенным ниже булевым функциям в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах:

а) $(x_1 \vee x_2) \to \bar{x}_1x_3$;

б) $x_1\bar{x}_2 \sim x_2x_3$;

в) $(x_1 + x_2) \to x_3$.

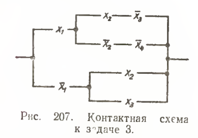


Рис. 207. Контактная схема к задаче 3.



Рис. 208. Контактная схема к задаче 7.

3. Запишите булеву функцию, которая соответствует контактной схеме показанной на рис. 207.

4. Реализуйте функцию, полученную в задаче 3, с помощью полного релейного дерева и сравните результат с контактной схемой рис. 207.

5. Реализуйте с помощью полного релейного дерева булеву функцию $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданную таблицей соответствия:

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
y	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1

Упростите полученную контактную схему.

6. Реализуйте контактную схему, на выходе которой появляется сигнал, когда большинство аргументов функции пяти переменных принимает значения 1 (постарайтесь получить наиболее простую схему).

7. Выполните следующие операции для контактной схемы (рис. 208):
а) запишите матрицу непосредственных связей P и матрицу полных связей Q;
б) покажите, что матрица Q может быть получена как степень матрицы P;
в) исключите узел 4 и найдите матрицу выходов относительно остальных узлов.

8. Постройте контактную схему с двумя выходами, реализующую функции $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ и $y_2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Можно ли для этой цели использовать полное релейное дерево (если нет, то почему)?

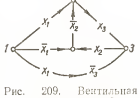


Рис. 209. Вентильная схема к задаче 9.

9. Запишите для вентильной схемы (рис. 209) матрицу непосредственных связей P и возведением ее в степень найдите матрицу полных связей. Проверьте результат по схеме.

10. Постройте вентильную схему с двумя выходами, реализующую функции $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1x_2$ (такая схема называется вентильным полусумматором).

4. ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

1. Логические элементы. Контактные схемы исторически были первыми техническими средствами реализации булевых функций и первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач. Впоследствии появилось много различных устройств, реализующих элементарные булевы функции одной и нескольких переменных. Они основаны на использовании электронных и магнитных цепей, параметронов, струйной техники (пневмоники) и т. д.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называют *логическими элементами*. Их входы соответствуют булевым переменным, а выход — реализуемой функции.

В технике для обозначения логических элементов используют различные графические символы и названия, которые учитывают свойства и специфические особенности конкретных элементов. В теории принимаются упрощенные изображения в виде прямоугольников или других фигур, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующей функции (табл. 7). Обычно рассматривают элементы с одним (для отрицания) и двумя входами (для функций двух переменных).

2. Логические схемы. Подобно суперпозиции функций логические схемы образуются *суперпозицией элементов* посредством объединения их внешних узлов (полюсов). При этом множество всех узлов схемы разбивается на *входные*, *выходные* и *внутренние узлы*. Например, на рис. 210, *а* показана схема, реализующая функцию

Таблица 7

Логические элементы, реализующие элементарные булевы функции

Функция	Нормальная форма	Контактная схема	Графическое изображение элемента	Название элемента
Отрицание $\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	x; НЕ	Инвертор
Конъюнкция x_1x_2	x_1x_2	x_1 — x_2	x_1, x_2; И	Совпадение
Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_2$	x_1; x_2	x_1, x_2; ИЛИ	Разделение
Импликация $x_1 \rightarrow x_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$\bar{x}_1$; x_2	x_1, x_2; $\rightarrow$	Разделение с запретом
Эквиваленция $x_1 \sim x_2$	$x_1x_2 \vee$ $\vee\ \bar{x}_1\bar{x}_2$	x_1 — x_2; $\bar{x}_1$ — $\bar{x}_2$	x_1, x_2; $\sim$	Равнозначность
Отрицание импликации $x_1 \leftarrow x_2$	$x_1\bar{x}_2$	x_1 — $\bar{x}_2$	x_1, x_2; $\leftarrow$	Совпадение с запретом
Сумма по модулю 2 $x_1 + x_2$	$\bar{x}_1x_2 \vee$ $\vee\ x_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$ — x_2; x_1 — $\bar{x}_2$	x_1, x_2; $+$	Неравнозначность

Продолжение табл. 7

Функция	Нормальная форма	Контактная схема	Графическое изображение элемента	Название элемента
Штрих Шеффера x_1/x_2	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ (параллельно)	x_1, x_2 → НЕ-ИЛИ →	Разделение с двумя запретами
Стрелка Пирса $x_1 \downarrow x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$ — $\bar{x}_2$	x_1, x_2 → НЕ-И →	Совпадение с двумя запретами

$y = (x_1/x_2) + (\bar{x}_3 \rightarrow x_1)$, которая имеет три входных, один выходной и три внутренних узла. Обычно для упрощения узлы на схемах не изображаются и во избежание излишних пересечений входы рассредоточиваются с указанием связанных с ними переменных (рис. 210, *б*).

Корректно построенные схемы должны удовлетворять следующим условиям:

1) не допускать замкнутых контуров, которые могут привести к неоднозначности сигналов на входах элементов;

2) любой вход элемента должен быть связан только с одним входом схемы или выходом другого элемента;

3) выходы элементов, не являющиеся выходами схемы и не связанные со входами других элементов, считаются лишними и исключаются из схемы.

Рис. 210. Логическая схема (*а*) и ее упрощенное изображение (*б*).

Не составляет большого труда записать булеву функцию для данной логической схемы. Так же просто строится логическая схема для данного аналитического выражения булевой функции. Однако задача проектирования логических схем состоит в том, чтобы обеспечить наиболее экономичную реализацию булевой функции

в некотором базисе, который обусловлен имеющимся в распоряжении инженера набором логических элементов или выбирается по соображениям наибольшей простоты реализации данного класса функций.

3. Реализация в различных базисах. Прежде всего исходная функция преобразуется к такому виду, чтобы она представляла собой суперпозицию только тех функций, которые входят в данный базис. Например, в базисе, состоящем из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, функция из (2) преобразуется к виду $y = (x_1/x_2) + (\bar{x}_3 \to x_1) = \overline{x_1x_2} + (x_3 \vee x_1) = (x_1x_2 \vee x_3 \vee x_1)\,(\overline{x_1x_2} \vee \overline{x_3 \vee x_1})$.

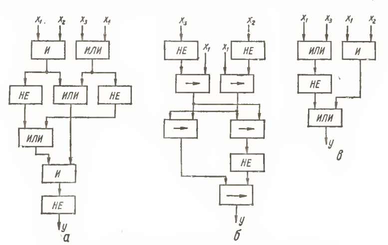


Рис. 211. Логические схемы, реализующие функцию $y = (x_1/x_2) + (\bar{x}_3 \to x_1)$:

а — в базисе $\{НЕ, И, ИЛИ\}$; *б* — в базисе $\{НЕ, \to\}$; *в* — упрощенная схема в базисе $\{НЕ, И, ИЛИ\}$.

Ее реализация в системе базисных элементов $\{НЕ, И, ИЛИ\}$ показана на рис. 211, *а*.

Если в качестве базиса приняты отрицание и импликация, то функция преобразуется по формулам: $x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \to x_2$; $x_1x_2 = x_1 \to \bar{x}_2$; $x_1/x_2 = x_1 \to \bar{x}_2$; $x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \to x_2$; $x_1 \sim x_2 = (x_1 \to \bar{x}_2) \to \bar{x}_1 \to x_2$; $x_1 + x_2 = (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2) \to x_1 \to x_2 = (x_2 \to x_1) \to x_1 \to x_2$. Так, для рассматриваемого примера имеем: $y = (x_1/x_2) + (\bar{x}_3 \to x_1) = (x_1 \to \bar{x}_2) + (\bar{x}_3 \to x_1) = ((\bar{x}_3 \to x_1) \to (x_1 \to \bar{x}_2)) \to \overline{(x_1 \to \bar{x}_2) \to (\bar{x}_3 \to x_1)}$. Соответствующая логическая схема в базисе $\{НЕ, \to\}$ изображена на рис. 211, *б*.

Аналогично реализуются схемы и в других базисах. Как правило, в практике используются неминимальные базисы, так как

минимальные базисы не всегда обеспечивают наиболее экономичную реализацию булевых функций.

4. Упрощение формул. Между формулой, выражающей булеву функцию, и функциональной схемой, реализующей эту функцию, имеется функциональное соответствие. Однако, поскольку одна и та же функция может быть выражена различными формулами, ее реализация неоднозначна. Всегда можно построить много различных логических схем, соответствующих данной логической функции. Такие схемы называют *эквивалентными*.

Из множества эквивалентных схем можно выделить наиболее экономичную или хотя бы достаточно простую схему путем упрощения формулы, соответствующей данной функции. Обычно принято считать более простыми те формулы, которые содержат меньшее количество вхождений переменных и символов логических операций.

Задача упрощения аналитических выражений решается в конкретном базисе с помощью тождественных преобразований. Чаще всего эту задачу связывают с базисом, состоящим из отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, который будем называть *булевым базисом*. После того как формула выражена через основные операции, она упрощается на основании тождеств булевой алгебры, приведенных в (2. 1).

Например, функция из (3) упрощается следующим образом: $y = (x_1/x_2) \oplus (\overline{x}_3 \to x_1) = \overline{x_1x_2} \oplus (x_3 \vee x_1) = x_1x_2(x_3 \vee x_1) \vee \overline{x_1x_2}\,\overline{x_3 \vee x_1} = x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2}\,\overline{(x_3 \vee x_1)} = x_1x_2 \vee \overline{x_1 \vee x_3}$. Соответствующая логическая схема показана на рис. 211, *в*.

5. Минимальные формы. Как было показано в (2. 3), любая булева функция представима в совершенной нормальной форме (дизъюнктивной или конъюнктивной). Более того, такое представление является первым шагом перехода от табличного задания функции к ее аналитическому выражению. В дальнейшем будем исходить из дизъюнктивной формы, а соответствующие результаты для конъюнктивной формы получаются на основе принципа двойственности (2. 1).

Каноническая задача синтеза логических схем в булевом базисе сводится к минимизации булевых функций, т. е. к представлению их в дизъюнктивой нормальной форме, которая содержит наименьшее число букв (переменных и их отрицаний). Такие формы называют *минимальными*. При каноническом синтезе предполагается, что на входы схемы подаются как сигналы x_i, так и их инверсии $\overline{x}_i$.

Формула, представленная в дизъюнктивной нормальной форме, упрощается многократным применением *операции склеивания* $ab \vee \vee a\overline{b} = a$ и *операций поглощения* $a \vee ab = a$ и $a \vee \overline{a}b = a \vee b$ (дуальные тождества для конъюнктивной нормальной формы имеют

вид: $(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a$; $a(a \vee b) = a$ и $a(\bar{a} \vee b) = ab$). Здесь под a и b можно понимать любую формулу булевой алгебры. В результате приходим к такому аналитическому выражению, когда дальнейшие преобразования оказываются уже невозможными, т. е. получаем *тупиковую форму*.

Среди тупиковых форм находится и минимальная дизъюнктивная форма, причем она может быть неединственной. Чтобы убедиться в том, что данная тупиковая форма является минимальной, необходимо найти все тупиковые формы и сравнить их по числу входящих в них букв.

Пусть, например, функция задана в совершенной нормальной дизъюнктивной форме: $y = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee$ $\vee\ x_1x_2x_3$. Группируя члены и применяя операцию склеивания, имеем $y = (\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3) \vee x_1x_2x_3 = \bar{x}_1x_2 \vee$ $x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3$. При другом способе группировки получим $y =$ $= \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee (\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee\ x_1\bar{x}_2$. Обе тупиковые формы не являются минимальными. Чтобы получить минимальную форму, нужно догадаться повторить в исходной формуле один член (это всегда можно сделать, так как $x \vee x = x$). В первом случае таким членом может быть $\bar{x}_1x_2x_3$. Тогда $y = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee (x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$. Добавив член $x_1\bar{x}_2x_3$, получим: $y = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee (x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3) =$ $= \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$. Перебрав все возможные варианты, можно убедиться, что две последние формы являются минимальными.

Работа с формулами на таком уровне подобна блужданию в потемках. Процесс поиска минимальных форм становится более наглядным и целеустремленным, если использовать некоторые графические и аналитические представления и специально разработанную для этой цели символику.

6. Многомерный куб. Каждой вершине n-мерного куба (1. 9), можно поставить в соответствие конституенту единицы (2. 5). Следовательно, подмножество отмеченных вершин является отображением на n-мерном кубе булевой функции от n переменных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. На рис. 212 показано такое отображение для функции из (5).

Для отображения функции от n переменных, представленной в любой дизъюнктивной нормальной форме, необходимо установить соответствие между ее минитермами (2. 2) и элементами n-мерного куба.

Минитерм $(n - 1)$-го ранга φ_{n-1} можно рассматривать как результат склеивания двух минитермов n-го ранга (конституент единицы), т. е. $\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}x_i \vee \varphi_{n-1}\bar{x}_i$. На n-мерном кубе это соответствует замене двух вершин, которые отличаются только значениями координаты x_i, соединяющим эти вершины ребром (говорят, что ребро *покрывает* инцидентные ему вершины). Таким образом,

минитермам ($n - 1$)-го порядка соответствуют ребра n-мерного куба. Аналогично устанавливается соответствие минитермов ($n - 2$)-го порядка граням n-мерного куба, каждая из которых покрывает четыре вершины (и четыре ребра).

Элементы n-мерного куба, характеризующиеся s измерениями, называют *s-кубами*. Так, вершины являются 0-кубами, ребра — 1-кубами, грани — 2-кубами и т. д. Обобщая приведенные рассуждения, можно считать, что минитерм ($n - s$)-го ранга в дизъюнктивной нормальной форме для функции n переменных отображается s-кубом, причем каждый s-куб покрывает все те s-кубы низшей размерности, которые связаны только с его вершинами. В качестве

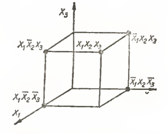


Рис. 212. Отображение на трехмерном кубе функции, представленной в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

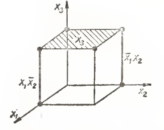


Рис. 213. Покрытие функции $y = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_3$ совокупностью s-кубов.

примера на рис. 213 дано отображение функции трех переменных $y = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_3$. Здесь минитермы $\bar{x}_1x_2$ и $x_1\bar{x}_2$ соответствуют 1-кубам ($s = 3 - 2 = 1$), а минитерм x_3 отображается 2-кубом ($s = 3 - 1 = 2$).

Итак, любая дизъюнктивная нормальная форма отображается на n-мерном кубе совокупностью s-кубов, которые покрывают все вершины, соответствующие конституентам единицы (0-кубы). Справедливо и обратное утверждение: если некоторая совокупность s-кубов покрывает множество всех вершин, соответствующих единичным значениям функции, то дизъюнкция соответствующих этим s-кубам минитермов является выражением данной функции в дизъюнктивной нормальной форме. Говорят, что такая совокупность s-кубов (или соответствующих им минитермов) образует *покрытие функции*.

Стремление к минимальной форме интуитивно понимается как поиск такого покрытия, число s-кубов которого было бы поменьше, а их размерность s — побольше. Покрытие, соответствующее минимальной форме, называют *минимальным покрытием*. Например, для функции из (5) покрытие на рис. 214, *а* соответствует немини-

мальной форме $y = \bar{x}_1 x_2 \lor x_1\bar{x}_2 \lor x_1x_3 \lor x_2x_3$, а покрытия на рис. 214, *б* и *в* — минимальным формам $y = \bar{x}_1x_2 \lor x_1x_2 \lor x_2x_3$ и $y = \bar{x}_1x_2 \lor x_1\bar{x}_2 \lor x_1x_3$.

Отображение функции на n-мерном кубе наглядно и просто при $n \leqslant 3$. Четырехмерный куб можно изобразить, как показано на

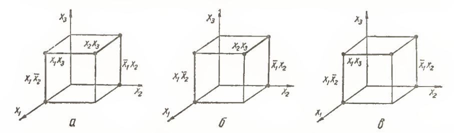


Рис. 214. Покрытия функции $y = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \lor \bar{x}_1x_2x_3 \lor x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \lor x_1\bar{x}_2x_3 \lor x_1x_2x_3$: *а* — неминимальное; *б*, *в* — минимальные

рис. 215, где отображены функция четырех переменных и ее минимальное покрытие, соответствующие выражению $y = x_1\bar{x}_3 \lor x_2x_4 \lor \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$. Использование этого метода при $n > 4$ требует настолько сложных построений, что теряются все его преимущества.

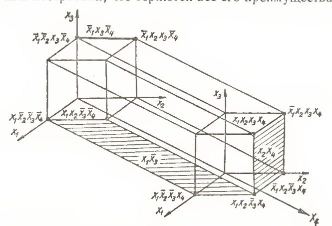


Рис. 215. Отображение функции $y = x_1\bar{x}_3 \lor x_2x_4 \lor \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ на четырехмерном кубе.

7. Карты Карно. В другом методе графического отображения булевых функций используются *карты Карно*, которые представляют собой специально организованные таблицы соответствия. Столбцы и строки таблицы соответствуют всевозможным наборам значений не более двух переменных, причем эти наборы расположены

в таком порядке, что каждый последующий отличается от предыдущего значением только одной из переменных. Благодаря этому и соседние клетки таблицы по горизонтали и вертикали отличаются значением только одной переменной. Клетки, расположенные

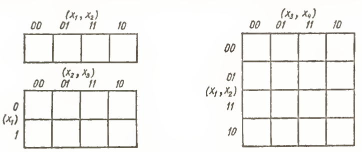


Рис. 216. Карты Карно для двух, трех и четырех переменных.

по краям таблицы, также считаются соседними и обладают этим свойством. На рис. 216 показаны карты Карно для двух, трех и четырех переменных.

Как и в обычных таблицах соответствия (1. 3), клетки наборов, на которых функция принимает значение 1, заполняются единицами (нули обычно не вписывают, им соответствуют пустые клетки).

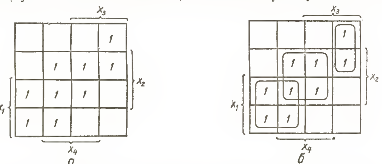


Рис. 217. Отображение на карте Карно функции четырех переменных (*а*) и ее минимального покрытия (*б*).

Например, на рис. 217, *а* показана карта Карно для функции, отображение которой на четырехмерном кубе дано на рис. 215. Для упрощения строки и столбцы, соответствующие значениям 1 для некоторой переменной, выделяются фигурной скобкой с обозначением этой переменной.

Между отображениями функции на n-мерном кубе и на карте Карно имеет место взаимно-однозначное соответствие. На карте

Карно s-кубу соответствует совокупность 2 соседних клеток, размещенных в строке, столбце, квадрате или прямоугольнике (с учетом соседства противоположных краев карты). Поэтому все положения, изложенные в (6), справедливы и для карт Карно. Так, на рис. 217, *б* показано покрытие единиц карты, соответствующее минимальной дизъюнктивной форме $y = x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ рассматриваемой функции.

Считывание минитермов с карты Карно осуществляется по простому правилу. Клетки, образующие s-куб, дают минитерм $(n - s)$-го ранга, в который входят те $(n - s)$ переменные, которые сохраняют одинаковые значения на этом s-кубе, причем значениям 1 соответствуют сами переменные, а значениям 0 — их отрицания. Переменные, которые не сохраняют свои значения на s-кубе, в минитерме

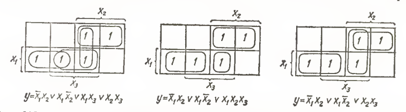


Рис. 218. Способы считывания с карты Карно дизъюнктивной нормальной формы булевой функции.

отсутствуют. Различные способы считывания приводят к различным представлениям функции в дизъюнктивной нормальной форме (рис. 218).

Использование карт Карно требует более простых построений по сравнению с отображением на n-мерном кубе, особенно в случае четырех переменных. Для отображения функций пяти переменных используются две карты Карно на четыре переменные, а для функций шести переменных — четыре таких карты. При дальнейшем увеличении числа переменных карты Карно становятся практически непригодными.

Известные в литературе *карты Вейча* отличаются только другим порядком следования наборов значений переменных и обладают теми же свойствами, что и карты Карно.

8. Комплекс кубов. Несостоятельность графических методов при большом числе переменных компенсируется различными аналитическими методами представления булевых функций. Одним из таких представлений является *комплекс кубов*, использующий терминологию многомерного логического пространства в сочетании со специально разработанной символикой.

Комплекс кубов $K(y)$ функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется как объединение множеств $K^s(y)$ всех ее s-кубов $(s = 0, 1, \ldots, n)$,

т. е. $K(y) = \bigcup\limits_{s} K^s(y)$, причем некоторые из $K^s(y)$ могут быть пустыми. Для записи s-кубов и минитермов функции от n переменных используются слова длины n, буквы которых соответствуют всем n переменным. Входящие в минитерм переменные называются *связанными* и представляются значениями, при которых минитерм равен единице (1 для x_i и 0 для $\bar{x}_i$). Не входящие в минитерм переменные являются *свободными* и обозначаются через x. Например, 2-куб функции пяти переменных, соответствующий минитерму $x_2\bar{x}_3x_5$, запишется как $(x10x1)$. 0-кубы, соответствующие конституентам единицы, представляются наборами значений переменных,

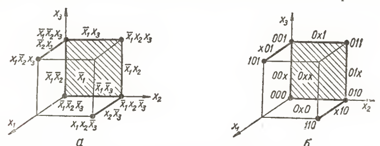


Рис. 219. Комплекс кубов функции трех переменных (a) и его символическое представление ($б$).

на которых функция равна единице. Очевидно, в записи s-куба всегда имеется s свободных переменных. Если все n переменных свободны, что соответствует n-кубу, то это означает тождественность единице рассматриваемой функции. Таким образом, для функций, не равных тождественно единице, $K^n(y) = \varnothing$.

Множество всех s-кубов $K(y)$ записывается как совокупность слов, соответствующих каждому s-кубу. Для удобства будем располагать слова s-кубов в столбцы, а их совокупность заключать в фигурные скобки. Например, комплекс кубов, соответствующий представлению функции на трехмерном кубе (рис. 219, a), выражается как $K(y) = K^0 \bigcup K^1 \bigcup K^2$, где

$$K^0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}; \; K^1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & x & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{Bmatrix}; \; K^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ x \end{Bmatrix}.$$

Для сравнения на рис. 219, $б$ изображен комплекс кубов в принятых обозначениях.

Комплекс кубов образует *максимальное покрытие функции*. Исключая из него все те s-кубы, которые покрываются кубами высшей размерности, получаем покрытия, соответствующие тупиковым

формам. Так, для рассматриваемого примера (рис. 219) имеем тупиковое покрытие

$$C = \begin{Bmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x \end{Bmatrix},$$

которое соответствует функции $y = \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1$. В данном случае это покрытие является и минимальным.

Для двух булевых функций операция дизъюнкции соответствует объединению их комплексов кубов $K(y_1 \vee y_2) = K(y_1) \cup K(y_2)$, а операция конъюнкции — пересечению комплексов кубов $K(y_1 y_2) = K(y_1) \cap K(y_2)$. Отрицанию функции соответствует дополнение комплекса кубов, т. е. $K(\bar{y}) = \overline{K(y)}$, причем $\overline{K(y)}$ определяется всеми вершинами, на которых функция принимает значение 0. Таким образом, имеет место взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм) между алгеброй булевых функций и алгеброй множеств, представляющих комплексы кубов.

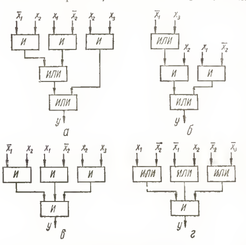


Рис. 220. Реализация функции $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3$: *а* — схемой *И—ИЛИ*; *б* — упрощенной схемой; *в* — двухуровневой схемой *И—ИЛИ*; *г* — двухуровневой схемой *ИЛИ—И*.

Представление функций в виде комплексов кубов менее наглядно, однако его важнейшие достоинства состоят в том, что снимаются ограничения по числу переменных и облегчается кодирование информации при использовании вычислительных машин.

9. Реализация в различных формах. Реализация функции в дизъюнктивной нормальной форме представляет собой логическую схему *И—ИЛИ*. Например, функция $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3$ реализуется логической схемой (рис. 220, *а*). Более экономичная реализация получается, если общий множитель вынести за скобки: $y = x_2(\bar{x}_1 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2$ (рис. 220, *б*). При использовании элементов со многими входами получаем двухуровневую логическую схему *И—ИЛИ* (рис. 220, *в*).

В соответствии с принципом двойственности (2.1), заменяя в дизъюнктивной нормальной форме операции конъюнкции на дизъюнкции, операции дизъюнкции на конъюнкции и беря отри-

цание каждой переменной, получаем конъюнктивную нормальную форму, которая выражает функцию $\bar{y}$, обратную к y. Ее реализация с помощью многовходовых элементов представляет собой двухуровневую логическую схему *ИЛИ—И*. Для рассматриваемой функции $\bar{y} = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ соответствующая реализация показана на рис. 220, *г*. Если требуется получить схему для данной функции y, то используется инвертор или элемент, реализующий операцию *НЕ—И*.

Конъюнктивную нормальную форму можно получить и другим путем. Для этого используются рассуждения и методы, дуальные рассмотренным по отношению к дизъюнктивным нормальным фор-

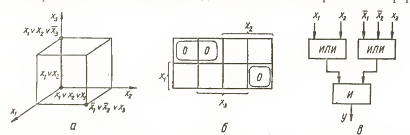


Рис. 221. Считывание конъюнктивной нормальной формы булевой функции с куба (*а*), с карты Карно (*б*) и ее реализация логической схемой (*в*).

мам. На многомерном кубе ищется покрытие множества вершин для нулевых значений функции, а на карте Карно — покрытие нулевых клеток. Рассматриваемый пример иллюстрируется на рис. 221, *а* и *б*. Соответствующая конъюнктивная нормальная форма $y = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ реализуется схемой (рис. 221, *в*). Комплекс кубов этой функции и его дополнение имеют вид:

$$K(y) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & x & x & 1 & 1 \end{matrix}\right\}; \ \overline{K(y)} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & x \end{matrix}\right\},$$

а их покрытия

$$C = \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ x & x & 1 \end{matrix}\right\}; \quad \bar{C} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & x \end{matrix}\right\}.$$

Покрытию $\bar{C}$ соответствует дизъюнктивная нормальная форма для отрицания функции $\bar{y} = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, откуда можно получить приведенное выше выражение функции в конъюнктивной нормальной форме.

10. Многовыходные схемы. Схемы, реализующие несколько функций, можно представить как простое объединение схем, реали-

зующих каждую функцию отдельно. Но такой путь, как правило, является неэкономичным. Часто бывает целесообразно преобразовать совокупность данных функций к такому виду, чтобы реализующие их схемы содержали общие части, а схема с многими выходами представляла собой единое целое.

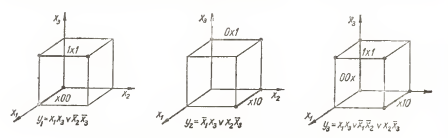


Рис. 222. Покрытия для трех выходных функций.

Задача сводится к выбору для каждой функции такого покрытия, которое включало бы возможно большее число s-кубов, содержащихся в покрытиях других функций. Этому требованию удовлетворяют, например, покрытия для трех функций (рис. 222). Соответствующая трехвыходная схема показана на рис. 223. Если бы для функции y_3 было выбрано другое покрытие, то схема получилась бы менее экономичной.

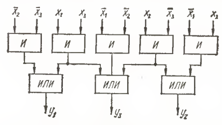


Рис. 223. Логическая схема с тремя выходами.

В этом параграфе описаны различные методы представления булевых функций применительно к задаче минимизации. При небольшом числе переменных эта задача обозрима, и ее можно решить простым перебором различных вариантов. Для функции многих переменных разработаны формальные методы минимизации, которые рассматриваются в следующем параграфе.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Представьте равнозначность и неравнозначность контактными схемами, соответствующими конъюнктивным нормальным формам функций $x_1 \sim x_2$ и $x_1 + x_2$.

2. Постройте логические схемы в базисе $\{НЕ, И, ИЛИ\}$ для логических элементов, представленных в табл. 7.

3. Постройте логические схемы в базисе $\{НЕ, И, ИЛИ\}$ для приведенных ниже функций, предварительно упростить их с помощью тождественных преобразований:

а) $p\bar{q} \vee \bar{p}qr \vee pr$;
б) $(p \to q) \to (pq \to p)$;
в) $p \sim (q \vee r)$;
г) $pq + r$.

4. Постройте логические схемы, реализующие функцию $y = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$, в следующих функционально полных системах логических элементов:

а) совпадение и инвертор;
б) разделение и инвертор;
в) разделение с двумя запретами;
г) совпадение с двумя запретами.

5. Представьте функцию $y = (x_1 \to \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ на трехмерном кубе и на карте Карно. Запишите различные покрытия этой функции в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах.

6. Дана булева функция четырех переменных:

$$y = x_1 (x_2 \vee x_3) \to \bar{x}_2 x_3 x_4.$$

а) Представьте данную функцию на четырехмерном кубе и на карте Карно

б) Запишите для этой функции комплекс кубов, а также все тупиковые покрытия в символической форме.

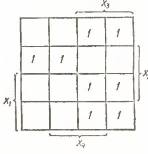


Рис. 224. Карта Карно к задаче 9.

в) Найдите минимальное покрытие и соответствующую ему дизъюнктивную форму.

г) Постройте логическую схему, реализующую данную функцию в булевом базисе $\{НЕ, И, ИЛИ\}$.

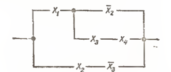


Рис. 225. Контактная схема к задаче 10.

7. Запишите дизъюнктивную нормальную форму функции в соответствии с заданным покрытием:

$$C = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & x & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{Bmatrix}$$

Является ли это покрытие тупиковым? Если нет, то какие s-кубы необходимо исключить из C, чтобы получить тупиковое покрытие? Рассмотрите всевозможные варианты решения этой задачи.

8. Нанесите на карту Карно покрытие из задачи 7. Запишите совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную формы соответствующей этому покрытию функции. Укажите на карте найденные в задаче 7 тупиковые покрытия.

9. Запишите всевозможные формы функции на основе заданной карты Карно (рис. 224) и найдите минимальную форму. Запишите минимальное покрытие как подмножество комплекса кубов.

10. Представьте булеву функцию, соответствующую контактной схеме (рис. 225):

а) таблицей соответствия;
б) на многомерном кубе;
в) на карте Карно;
г) комплексом кубов.

Постройте логическую схему, реализующую эту функцию в базисе {*НЕ*, *И*, *ИЛИ*}.

5. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Постановка задачи. Минимизация схемы в булевом базисе сводится к поиску минимальной дизъюнктивной формы, которой соответствует минимальное покрытие. Общее число букв, входящих в нормальную форму, выражается *ценой покрытия* $c = \sum_s q_s(n - s)$, где q_s — число s-кубов, образующих покрытие данной функции от n переменных. Используются и другие определения цены покрытия, например $c' = c + q$, где q — общее число всех кубов покрытия. Во всех случаях минимальное покрытие характеризуется наименьшим значением его цены.

Обычно задача минимизации решается в два шага. Сначала ищут сокращенное покрытие, которое включает все s-кубы максимальной размерности, но не содержит ни одного куба, покрывающегося каким-либо кубом этого покрытия. Соответствующую дизъюнктивную нормальную форму называют *сокращенной*, а ее минитермы — *простыми импликантами*. Для данной функции сокращенное покрытие является единственным, но оно может быть избыточным вследствие того, что некоторые из кубов покрываются совокупностями других кубов.

На втором шаге осуществляется переход от сокращенной к тупиковым дизъюнктивным нормальным формам, из которых выбираются минимальные формы. Тупиковые формы образуются путем исключения из сокращенного покрытия всех избыточных кубов, без которых оставшаяся совокупность кубов еще образует покрытие данной функции, но при дальнейшем исключении любого из кубов она уже не покрывает множества всех вершин, соответствующих единичным значениям функции, т. е. перестает быть покрытием.

Куб сокращенного покрытия, который покрывает вершины данной функции, не покрываемые никакими другими кубами, не может оказаться избыточным и всегда войдет в минимальное покрытие. Такой куб, как и соответствующая ему импликанта, называют *экстремалью (существенной импликантой)*, а покрываемые им вершины — *отмеченными вершинами*. Множество экстремалей об-

разует *ядро покрытия*. Ясно, что при переходе от сокращенного покрытия к минимальному прежде всего следует выделить все экстремали. Если множество экстремалей не образует покрытия, то оно дополняется до покрытия кубами из сокращенного покрытия.

Приведенные определения иллюстрируются на рис. 214, где сокращенное покрытие Z (см. рис. 214, *а*) и минимальные покрытия $C'_{\min}$ (рис. 214, *б*) и $C''_{\min}$ (см. рис. 214, *в*) выражаются следующим образом:

$$Z = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{Bmatrix}; \quad C'_{\min} = \begin{Bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & x \end{Bmatrix}; \quad C''_{\min} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{Bmatrix}.$$

Сокращенная форма представляет собой дизъюнкцию четырех простых импликант, т. е. $y = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2$. Экстремалями являются простые импликанты $x_1\bar{x}_2$ и $\bar{x}_1x_2$, которым соответствуют 1-кубы $(10x)$ и $(01x)$, а отмеченные вершины — $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ или соответственно (100) и (010).

2. **Метод Квайна — Мак-Класки.** Этот метод используется в случаях, когда функция задана в дизъюнктивной совершенной нормальной форме (или таблицей соответствия). Приведение к сокращенной форме осуществляется последовательным применением операции склеивания $ax_i \vee a\bar{x}_i = a$, где a — конъюнкции переменных, отличных от x_i. Множеству конституент единицы, представленных в исходной форме, соответствует совокупность 0-кубов K^0, а операции склеивания — объединение двух 0-кубов, которые отличаются только одной координатой. Результатом такого объединения является 1-куб, в котором различные координаты исходных 0-кубов замещены символом x. Сравнивая попарно все 0-кубы, получаем множество 1-кубов K^1. Применяя к K^1 операцию склеивания, находим множество 2-кубов K^2 и т. д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока получаемое из K^s очередное K^{s+1} не окажется пустым множеством. В результате множество K^0 преобразуется в комплекс кубов $K = \{K^0, K^1, K^2, \ldots, K^s\}$, причем $s \leqslant n$.

Для выделения из K множества простых импликант $Z \subset K$ при каждой операции склеивания необходимо отмечать каким-либо знаком (например, меткой $\vee$) те кубы, которые объединяются в кубы высшей размерности. Очевидно, неотмеченные кубы и образуют множество простых импликант Z. Чтобы уменьшить число сравниваемых пар при операции объединения целесообразно разбить множество K^s на классы, в каждом из которых содержатся s-кубы с одинаковым числом единиц (или нулей), и упорядочить эти классы по возрастающему числу единиц. Так как объединяться могут только такие два s-куба, число единиц в которых точно на

одну больше или меньше, то достаточно ограничиться попарным сравнением s-кубов одного класса с s-кубами соседнего класса.

На втором шаге при извлечении экстремалей и образовании минимального покрытия используется таблица покрытий. Ее строки соответствуют простым импликантам, а столбцы — конституентам единицы дизъюнктивной совершенной нормальной формы данной функции, которые представляются 0-кубами (вершинами) комплекса кубов. В клетку таблицы записывается метка, если простая импликанта в данной строке покрывает вершину в данном столбце. Экстремалям соответствуют те строки таблицы, которые содержат единственную метку в каком-либо столбце. Удаляя строки экстремалей и все столбцы, в которых эти строки имеют метки, получаем более простую таблицу. На основе этой таблицы выбираем простые импликанты, которые дополняют выделенное множество экстремалей до минимального покрытия функции.

3. Пример минимизации функции. Рассмотрим в качестве примера функцию четырех переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданную таблицей соответствия

$$\begin{array}{c|cccc} x_1 & 0000 & 0000 & 1111 & 1111 \\ x_2 & 0000 & 1111 & 0000 & 1111 \\ x_3 & 0011 & 0011 & 0011 & 0011 \\ x_4 & 0101 & 0101 & 0101 & 0101 \\ \hline y & 0001 & 1101 & 0101 & 1100 \end{array} .$$

Ей соответствует дизъюнктивная совершенная нормальная форма $y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee$ $\vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4$. Множество 0-кубов после разбиения и упорядочения записывается следующим образом:

$$K^0 = \left\{\begin{array}{c|cccc|ccc} \check{0} & \check{0} & \check{0} & \check{1} & \check{1} & \check{0} & \check{1} & \check{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} .$$

Объединяя кубы и отмечая те из них, которые покрываются кубами большей размерности, имеем:

$$K^1 = \left\{\begin{array}{cc|ccccccc} \check{0} & \check{x} & 0 & 0 & x & 1 & \check{x} & 1 & \check{1} \\ 1 & 1 & x & 1 & 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right\}; \quad K^2 = \left\{\begin{array}{c} x \\ 1 \\ 0 \\ x \end{array}\right\} .$$

Простым импликантам соответствуют неотмеченные кубы. Составляем таблицу покрытия Z, которому соответствует сокращенная форма $y = \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3$:

Z \ K^0	0100	0011	0101	1001	1100	0111	1011	1101	Обозначения импликант
0 x 1 1		V				V			A
0 1 x 1			V			V			B
x 0 1 1		V					V		C
1 0 x 1				V			V		D
1 x 0 1				V				V	E
x 1 0 x	V		V		V			V	F

Извлекаем единственную экстремаль ($x10x$), которой соответствует минитерм $x_2\overline{x}_3$, и упрощаем таблицу к виду:

Z_1 \ K_1^0	0011	1001	0111	1011
0 x 1 1	V		V	
0 1 x 1			V	
x 0 1 1	V			V
1 0 x 1		V		V
1 x 0 1		V		

В качестве дополнительных целесообразно выбрать кубы ($0x11$) и ($10x1$), так как они совместно с экстремалью ($x10x$) образуют покрытие функции, минимальная форма которой имеет вид: $y = \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3$. Соответствующее этой функции мини-

мальное покрытие иллюстрируется на четырехмерном кубе и на карте Карно (рис. 226).

4. Алгебраический метод. Выбор минимального покрытия на заключительном этапе формализуется с помощью *алгебраического метода*, предложенного С. Петриком. Простые импликанты обозначаются какими-либо символами (обычно для этой цели используются прописные буквы латинского алфавита), и по столбцам таблицы покрытий записываются дизъюнкции тех импликант, которые отмечены в данном столбце. Смысл этой записи вытекает из того, что

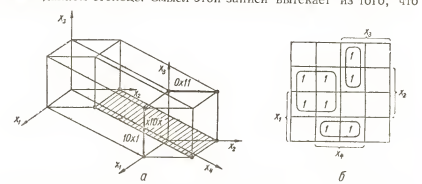


Рис. 226. Минимальное покрытие функции на четырехмерном кубе (*a*) и карте Карно (*б*).

любая из отмеченных импликант покрывает данную вершину. Покрытию функции соответствует конъюнкция всех записанных дизъюнкций.

Раскрывая скобки и упрощая выражения на основе тождеств булевой алгебры (упрощать можно и до раскрытия скобок), переходим к дизъюнктивной форме, каждый член которой представляет собой конъюнкцию простых импликант и соответствует некоторому тупиковому покрытию рассматриваемой функции. Сравнивая все тупиковые покрытия и отбирая те из них, которые характеризуются минимальной ценой, приходим к одному или нескольким минимальным покрытиям.

Так, для примера из (3) имеем: $F(A\vee C)(B\vee F)(D\vee E)F(A\vee B)\wedge$ $\wedge(C\vee D)(E\vee F)=F(A\vee C)(A\vee B)(D\vee E)(C\vee D)=F(A\vee AB\vee$ $\vee AC\vee BC)(CD\vee CE\vee D\vee DE)=F(A\vee BC)(D\vee CE)=ADF\vee$ $\vee ACEF\vee BCDF\vee BCEF$. Итак, получаем четыре тупиковых покрытия

$$C_1=\begin{Bmatrix}0&1&x\\x&0&1\\1&x&0\\1&1&x\end{Bmatrix};\quad C_2=\begin{Bmatrix}0&x&1&x\\x&0&x&1\\1&1&0&0\\1&1&1&x\end{Bmatrix};$$

$$C_3 = \begin{Bmatrix} 0 & x & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{Bmatrix}; \quad C_4 = \begin{Bmatrix} 0 & x & 1 & x \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{Bmatrix},$$

цены которых $c_1 = 2(4-1) + 1(4-2) = 8$ и $c_2 = c_3 = c_4 = 3(4-1) + 1(4-2) = 11$, т. е. $C_{\min} = C_1$.

Алгебраические преобразования упрощаются, если исходить из таблицы покрытий, получаемой после извлечения экстремалей. Тогда результатом таких преобразований являются множества простых импликант, дополняющих совокупность экстремалей до тупиковых покрытий. Сравнивая эти множества по их цене, выбираем минимальные дополнения, которые совместно с множеством экстремалей образуют минимальные покрытия.

5. Метод Блейка—Порецкого. При минимизации функции методом Квайна—Мак-Класки требуется предварительно представить ее в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, что часто связано с дополнительными преобразованиями.

Если исходить из произвольной дизъюнктивной нормальной формы, то для получения промежуточной сокращенной формы можно воспользоваться прямым *методом Блейка—Порецкого*. Он основан на тождестве

$$ac \vee b\bar{c} = ac \vee b\bar{c} \vee ab,$$

называемом *операцией обобщенного склеивания*. Действительно, $ac \vee b\bar{c} = ac \vee abc \vee b\bar{c} \vee ab\bar{c} = ac \vee b\bar{c} \vee ab(c \vee \bar{c}) = ac \vee b\bar{c} \vee ab$. Разумеется, входящие в это тождество буквы могут представлять любые булевы формулы и, в частности, конъюнкции переменных.

Можно показать, что произвольная дизъюнктивная нормальная форма приводится к сокращенной применением всех возможных обобщенных склеиваний с последующим устранением минитермов на основе операции поглощения $a \vee ab = a$. При этом возможны следующие случаи.

1) Конъюнкция a содержит переменную x_j, а конъюнкция b — отрицание той же переменной $\bar{x}_j$ (или наоборот). Тогда $ab = 0$ и в результате операции обобщенного склеивания не получаются новые минитермы. Таким образом, следует подвергать этой операции только те пары минитермов, в которых единственная переменная представлена как x_j и $\bar{x}_j$.

2) Конъюнкция a содержит только те переменные, которые входят в конъюнкцию b (или наоборот), т. е. $b = ac$. Тогда $ax_i \vee b\bar{x}_i = ax_i \vee ac\bar{x}_i = ax_i \vee ac\bar{x}_i \vee ac = ax_i \vee ac = ax_i \vee b$, т. е. минитерм исходной дизъюнктивной нормальной формы поглощается минитермом, образованным в результате обобщенного склеивания.

Пусть, например, функция из (3) задана некоторым покрытием, которое соответствует дизъюнктивной нормальной форме: $y = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$. Применяя операцию обобщенного склеивания к парам $(x_2\bar{x}_3\bar{x}_4,\ \bar{x}_1x_2x_4)$; $(x_1x_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2x_4)$; $(x_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1x_2x_4)$; $(x_1\bar{x}_2x_4,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4)$; $(\bar{x}_1x_2x_4,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4)$ и учитывая, что в двух последних парах происходит поглощение минитермов, получаем: $y = (x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3) \vee (x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4) \vee (x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4) \vee (x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4) \vee (\bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4)$. Удаляя одинаковые члены $(a \vee a = a)$ и группируя старые и новые минитермы, имеем: $y = (x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4) \vee (\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee$

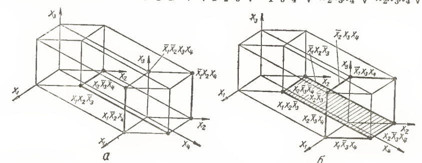


Рис. 227. Покрытие функции $y = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$; *а* — исходное; *б* — промежуточное.

$\vee \bar{x}_1x_3x_4)$. Очевидно, при дальнейшем обобщенном склеивании имеет смысл рассматривать только пары, образованные новыми минитермами со всеми минитермами полученной дизъюнктивной нормальной формы. Такими парами являются: $(x_2\bar{x}_3\bar{x}_4,\ x_1\bar{x}_3x_4)$; $(x_2\bar{x}_3\bar{x}_4,\ x_2\bar{x}_3x_4)$; $(\bar{x}_1x_2x_4,\ x_1\bar{x}_3x_4)$; $(\bar{x}_1x_2x_4,\ \bar{x}_2x_3x_4)$; $(x_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3)$; $(x_1\bar{x}_2x_4,\ x_2\bar{x}_3x_4)$; $(x_1\bar{x}_2x_4,\ \bar{x}_1x_3x_4)$; $(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_3x_4)$; $(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1x_3x_4)$; $(x_1\bar{x}_3x_4,\ \bar{x}_2x_3x_4)$; $(x_2\bar{x}_3x_4,\ \bar{x}_1x_3x_4)$. Применяя к каждой паре операции обобщенного склеивания и поглощения в соответствии с приведенными выше правилами, находим: $y = \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3$. Единственный новый минитерм $x_2\bar{x}_3$ в паре с любым из остальных минитермов не приводит к появлению новых минитермов. Поэтому полученная форма является сокращенной. Она, как и должно быть, совпадает с найденной в (3).

6. Склеивание и поглощение кубов. Геометрически операции обобщенного склеивания и поглощения соответствуют некоторым операциям над кубами, имеющими противоположные грани. В результате получается новый куб, который либо располагается между исходными кубами, либо поглощает один из кубов или оба куба.

Преобразования, выполненные в (5) иллюстрируются на рис. 227. Исходной дизъюнктивной нормальной форме соответствует некоторое покрытие (рис. 227, *а*), которое преобразуется к промежуточному покрытию (рис. 227, *б*). Сокращенной нормальной форме соответствует покрытие, получаемое из рис. 227, *б* поглощением кубов $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$, $x_2\bar{x}_3x_4$ и $x_1x_2\bar{x}_3$ кубом $x_2\bar{x}_3$.

Операции над кубами удобно выполнять в символической форме. Сравнивая в исходном покрытии C_0 попарно кубы, имеющие противоположные значения 0 и 1 только для одной координаты, образуем множество новых кубов C_0^*. Координаты этих кубов можно определить с помощью *операции покоординатного произведения*(*), задаваемой таблицей:

*	0	1	x
0	0	x	0
1	x	1	1
x	0	1	x

Так, для рассматриваемого примера имеем:

$$C_0 = \begin{Bmatrix} x & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}; \quad C_0^* = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & x & x & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix},$$

где кубы множества C_0^* получены в результате операции покоординатного произведения над следующими парами кубов из C_0:

$$\begin{Bmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & x \\ x & 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & x \\ x & 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ x & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Объединяя множества C_0 и C_0^*, выполняем операции поглощения в соответствии с тождествами $a \vee a = a$ и $a \vee ab = a$. Это соответствует удалению из множества $C_0 \cup C_0^*$ повторяющихся кубов, а также тех кубов, которые покрываются другими кубами (куб покрывает все кубы низшей размерности, если отличные от x координаты покрывающего куба совпадают с соответствующими координатами покрываемых кубов). В нашем примере повторяющихся кубов нет, а куб (0011) поглощается кубом (x011) или (0x11). В результате получаем промежуточное покрытие

$$C_1 = \left\{\begin{array}{cccc|ccccc} x & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x & x & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & x & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\},$$

где исходные и новые кубы разделены пунктирной линией. Дальше операция обобщенного склеивания выполняется над покрытием C_1 покоординатным произведением кубов, расположенных справа от разделяющей линии, с каждым кубом из C_1, который подлежит склеиванию. Получаем множество новых кубов

$$C_1^* = \left\{\begin{matrix} 1 & x & x & 0 & x & 1 & x & x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & x & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & x & x \\ x & x & 1 & 1 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

После операции поглощения в множестве $C_1 \cup C_1^*$ имеем следующее преобразованное покрытие:

$$C_2 = \left\{\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & x & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 & x & 1 \\ x & x & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right\}.$$

Продолжая склеивание кубов последней группы (она содержит единственный 2-куб) со всеми кубами из C_2, получаем множество

$$C_2^* = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ x & 1 \\ 0 & x \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\},$$

объединяя которое с C_2 операциями поглощения, приходим снова к C_2, так как C_2^* не содержит новых кубов. Отсюда следует, что покрытие C_2 соответствует сокращенной дизъюнктивной нормальной форме данной функции.

Ниже приведена более рациональная запись преобразования произвольной дизъюнктивной нормальной формы к сокращенной форме:

$$\left\{\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccccccccc|cc} \overset{\vee}{x} & \overset{\vee}{1} & 1 & 0 & \overset{\vee}{0} & \overset{\vee}{0} & 1 & \overset{\vee}{x} & x & 0 & \overset{\vee}{1} & x & \overset{\vee}{x} & \overset{\vee}{0} & \overset{\vee}{x} & \overset{\vee}{1} & \overset{\vee}{x} & \overset{\vee}{x} & \overset{\vee}{0} & \overset{\vee}{1} & \overset{\vee}{0} & \overset{\vee}{1} & \overset{\vee}{0} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & x & 1 & 0 & x & 1 & 1 & 1 & x & 1 & x & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & x & x & 0 & x \\ 0 & x & 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 1 & 1 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\}.$$

$$\underbrace{}_{C_0} \qquad \underbrace{}_{C_0^*} \qquad \underbrace{}_{C_1^*} \qquad \underbrace{}_{C_2^*}$$

На каждом этапе над поглощаемыми кубами ставятся метки $\vee$ (или соответствующие столбцы вычеркиваются). По окончании преобразования сокращенное покрытие определяется совокупностью неотмеченных кубов.

7. Частично определенные функции. В практике нередко приходится иметь дело с такими функциями, которые определены не на всех наборах значений переменных. Подобные случаи встречаются, когда по условиям функционирования некоторые из наборов не используются и поэтому безразлично, какие значения принимает функция на этих наборах. Это обстоятельство можно использовать при минимизации функции, доопределив ее на *безразличных наборах* так, чтобы обеспечить наиболее экономичную реализацию.

Пусть дана частично определенная функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $y^1 = f^1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцию, которая доопределена на всех безразличных наборах единицами, а через $y^0 = f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — нулями. Задача оптимального доопределения данной функции сводится к выбору из сокращенного покрытия для функции y^1 минимального количества кубов максимальной размерности, совокупность которых покрывала бы все вершины функции y^0. Такая совокупность кубов и образует минимальное покрытие частично определенной функции y. При этом оно может покрывать и некоторые вершины, соответствующие безразличным наборам, что означает доопределение функции на этих наборах единичными значениями.

8. Преобразователь кодов. Примером частично определенных функций может служить таблица соответствия преобразования кода прямого замещения в двоично-десятичный код 2421:

Десятичное число		0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	Избыточные наборы
Код прямого замещения	x_1	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1	1 1 1 1 1 1
	x_2	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0	0 0 1 1 1 1
	x_3	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0	1 1 0 0 1 1
	x_4	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 1
Двоично-десятичный код 2421	y_1	0 0 0 0 0 1 1 1 1 1	Функции не определены
	y_2	0 0 0 0 1 0 1 1 1 1	
	y_3	0 0 1 1 0 1 0 0 1 1	
	y_4	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	

Код прямого замещения представляет собой обычное представление одноразрядного десятичного числа в двоичной системе счисления, т. е. $x_1 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2^1 + x_4 \cdot 2^0 = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$. Код 2421 соответствует представлению числа в виде $y_1 \cdot 2^1 + y_2 \cdot 2^2 + y_3 \cdot 2^1 + y_4 \cdot 2^0 = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4$. Таким образом, преобразователь кодов представляет собой схему с четырьмя входами и четырьмя выходами.

$y_1 = x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4$ $\qquad$ $y_2 = x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_4$

$y_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4$ $\qquad$ $y_4 = x_4$

Рис. 228. Минимальные покрытия выходных функций преобразователя кодов.

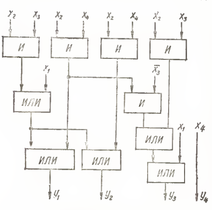


Рис. 229. Логическая схема преобразователя кодов.

Проиллюстрируем минимизацию схемы на картах Карно (рис. 228) с учетом положений о многовыходных схемах, изложенных в (4.10). Используя избыточные наборы, которые отмечены на карте звездочками, образуем минимальные покрытия для каждой из четырех функций которые включали бы возможно больше однотипных кубов. Соответствующая логическая схема показана на рис. 229.

9. Сумматор. Другим примером логической схемы, который дает повод использовать частично определенные функции, является одноразрядный сумматор, выполняющий арифметическое сложение двоичных чисел x_k и y_k k-го разряда и переноса из млад-

шего разряда p_{k-1}. В результате должна получаться сумма s_k и перенос в старший разряд p_k. Таблица соответствия такого сумматора имеет вид:

x_k	0	0	0	0	1	1	1	1
y_k	0	0	1	1	0	0	1	1
p_{k-1}	0	1	0	1	0	1	0	1
s_k	0	1	1	0	1	0	0	1
p_k	0	0	0	1	0	1	1	1

Отображение функций s_k и p_k на трехмерных кубах показана на рис. 230. Их дизъюнктивные нормальные формы имеют вид: $s_k = \bar{x}_k\bar{y}_k p_{k-1} \vee \bar{x}_k y_k \bar{p}_{k-1} \vee x_k\bar{y}_k\bar{p}_{k-1} \vee x_k y_k p_{k-1}$ и $p_k = x_k p_{k-1} \vee \vee x_k y_k \vee y_k p_{k-1}$, соответствующие минимальным покрытиям. Как

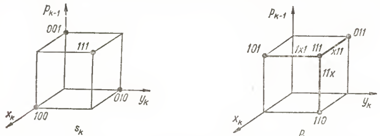


Рис. 230. Отображение выходных функций сумматора на трехмерных кубах.

видно, выражение для s_k не поддается минимизации изложенными ранее методами. Единственная возможность — это использовать вынесение за скобки: $s_k = (x_k\bar{y}_k \vee \bar{x}_k y_k)\bar{p}_{k-1} \vee (x_k y_k \vee \bar{x}_k\bar{y}_k)\, p_{k-1}$.

В подобных случаях для минимизации применяется прием, основанный на использовании более простой реализации функции $p_k = f(x_k,\ y_k,\ p_{k-1})$ в качестве составной части другой функции s_k. При этом p_k рассматривается как переменная, т. е. $s_k = \varphi(x_k, y_k,\ p_{k-1},\ p_k)$. Но таблица соответствия для s_k теперь содержит избыточные наборы переменных, которые отмечены звездочками:

x_k	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y_k	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
p_{k-1}	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
p_k	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
s_k	0	*	1	*	1	*	*	0	1	*	*	0	*	0	*	1

Используем для минимизации полученной частично определенной функции s_k карту Карно (рис. 231). Минимальному покрытию соответствует выражение $s_k = x_k\bar{p}_k \vee y_k\bar{p}_k \vee p_{k-1}\bar{p}_k \vee x_k y_k p_{k-1}$. После

вынесения за скобки получаем подготовленные к реализации выражения: $s_k = (x_k \vee y_k \vee p_{k-1})\,\bar{p}_k \vee x_k y_k p_{k-1}$; $p_k = x_k y_k \vee (x_k \vee y_k)\,p_{k-1}$. Соответствующая схема показана на рис. 232.

10. Минимизация в других системах. В реальных условиях проектирование логических схем основывается на использовании некоторого конкретного набора элементов. Обычно стремятся стандартизировать такие элементы с тем, чтобы при одинаковой конструкции они позволяли в зависимости от способа включения реализовать различные логические функции.

Например, комплект интегральных схем может включать много-

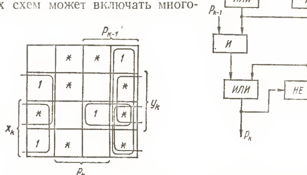


Рис. 231. Минимизация функции s_k сумматора на карте Карно.

Рис. 232. Логическая схема сумматора.

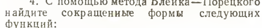
входовые транзисторные вентили *НЕ—ИЛИ* и *НЕ—И*, а также полусумматоры, реализующие сумму по модулю 2 (неравнозначность). С помощью схем на ферритах обычно реализуются отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, штрих Шеффера и стрелка Пирса. Один из пневмисторных модулей, наряду с этими функциями, позволяет реализовать также импликацию и отрицание импликации.

В связи с этим перед разработчиком возникает задача представления и минимизации функции в различных функционально полных системах элементов. Известны методы получения канонических форм для логических функций в любом базисе на основе табличного задания или преобразования другого базиса. Что же касается проблемы минимизации в общем виде, то она остается пока открытой. Обычно применяются частные методы минимизации, аналогичные разработанным для булевого базиса. Часто минимальное представление в булевом базисе используется как исходное и при реализации в других базисах, соответствующее выражение функции в которых получается на основе тождественных преобразований.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите цены c и c' покрытий булевой функции, показанных на рис. 214.

2. Используя метод Квайна—Мак-Класки, найдите минимальную дизъюнктивную форму булевой функции $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной таблицей соответствия



x_1	0000	0000	1111	1111
x_2	0000	1111	0000	1111
x_3	0011	0011	0011	0011
x_4	0101	0101	0101	0101
y	0101	0101	0101	0001

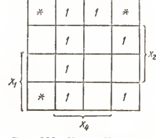


Рис. 233. Карта Карно для функции к задаче 7.

3. Найдите все тупиковые покрытия и запишите соответствующие им тупиковые формы для булевой функции из задачи 2 с помощью алгебраического метода Петрика.

4. С помощью метода Блейка—Порецкого найдите сокращенные формы следующих функций:

а) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2$;

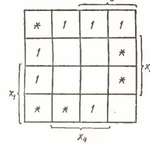
б) $x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$;

в) $\bar{x}_1x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1x_3$;

г) $x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4$.

5. Представьте процесс получения сокращенных форм функций из задачи 4 в символической записи операций склеивания и поглощения s-кубов.

6. На основе сокращенных форм, полученных в задаче 4, найдите для каждой функции все тупиковые покрытия и минимальную форму. Постройте логические схемы, реализующие заданные функции в минимальных формах.



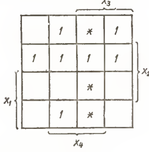


Рис. 234. Карты Карно для функций к задаче 8.

7. Найдите минимальную дизъюнктивную форму функции, представленной на карте Карно (рис. 233) и постройте соответствующую ей логическую схему.

8. Постройте логическую схему с двумя входами, реализующую выходные функции, которые заданы картами Карно (рис. 234). Найдите минимальные покрытия с помощью метода Квайна—Мак-Класки и по картам Карно.

9. Постройте логическую схему, реализующую на выходах булевы функции:

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3; \quad y_2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.$$

Решите задачу с помощью операций склеивания и поглощения кубов и на картах Карно.

10. Постройте логическую схему с тремя выходами, реализующую функции: $y_1 = x_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$; $y_2 = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_4$; $y_3 = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4$.

11. Найдите наиболее экономичную реализацию частично определенной функции $y = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, для которой значения конъюнкций $x_1x_2x_3\bar{x}_4$, $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и $x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ безразличны.

12. Постройте логическую схему преобразователя кода прямого замещения в циклический код, таблица соответствия для четырех выходов которого имеет вид:

Код прямого замещения	x_1	0000	0000	1111	1111
	x_2	0000	1111	0000	1111
	x_3	0011	0011	0011	0011
	x_4	0101	0101	0101	0101
Циклический код	y_1	0000	0000	1111	1111
	y_2	0000	1111	1111	0000
	y_3	0011	1100	1111	1100
	y_4	0110	0110	0110	0110

6. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

1. Основные определения. В контактных и логических схемах значения выходных переменных определяются только комбинацией значений переменных на входах в данный момент времени. Поэтому их называют *комбинационными схемами*. В более общем случае выходные переменные могут зависеть от значений входных переменных не только в данный момент, но и от их предыдущих значений. Иначе говоря, значения выходных переменных определяются последовательностью значений входных переменных, в связи с чем схемы с такими свойствами называют *последовательностными*. Если входные и выходные переменные принимают значения из конечных алфавитов, то оба типа схем объединяются под названием *конечные автоматы*.

Пусть X_i — алфавит входной переменной x_i, а Y_i — алфавит выходной переменной y_i. Конечный автомат с n входами и m выходами характеризуется *входным алфавитом* $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и *выходным алфавитом* $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$, причем символами входного алфавита служат слова $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ длины n, а символами выходного алфавита — слова $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ длины m, где $x_i \in X_i$ и $y_i \in Y_i$. Особого внимания заслуживают конечные автоматы с *двузначным структурным алфавитом*, зависимости между входными и выходными переменными которых выражаются булевыми функциями. Их значение обусловлено тем, что любая информация может быть представлена в двоичных кодах (двоично-десятичные коды чисел, телетайпный код в тех-

нике связи и т. п.). В то же время при технической реализации автоматов используются преимущественно двоичные элементы и двузначная логика.

В реальных условиях сигналы представляются непрерывными функциями времени, поэтому для надежного различения сигналов требуется, чтобы новые значения на входах появлялись после окончания переходных процессов, связанных с предыдущими значениями. При рассмотрении логической структуры автоматов обычно отвлекаются от существа этих процессов и считают, что переменные изменяются не непрерывно, а мгновенно в некоторые моменты времени, называемые *тактами*. Интервалы между тактами могут быть различными, но без потери общности их можно считать равными Δt. Предполагается, что *тактовые моменты* $t_{\nu+1} = t_\nu + \Delta t$ определяются *синхронизирующими сигналами*. Таким образом, вводится понятие *дискретного автоматного времени* $t_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, причем переменные зависят не от физического времени, а от номера такта ν, т. е. вместо непрерывных функций $x(t)$ рассматриваются дискретные значения $x(\nu)$.

2. Состояния. Кроме входных и выходных переменных, можно выделить некоторую совокупность *промежуточных переменных*, которые связаны с внутренней структурой автомата. В комбинационных схемах промежуточные переменные непосредственно не участвуют в соотношениях вход — выход. Напротив, выходные функции последовательностных схем в качестве своих аргументов, кроме входных переменных, обязательно содержат некоторую совокупность промежуточных переменных $s_1, s_2, \ldots, s_k$, характеризующих *состояние схемы*. Набор всех возможных состояний, которые присущи данной схеме, называется *множеством состояний*. Если $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — конечные алфавиты переменных состояния $s_1, s_2, \ldots, s_k$, то множество состояний $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ также является конечным множеством.

Строгое определение понятия состояния связывается с той ролью, которое оно играет при описании конечных автоматов. Во-первых, значения совокупности выходных переменных на ν-м такте $y(\nu) = (y_1(\nu), y_2(\nu), \ldots, y_m(\nu))$ однозначно определяется значениями входных переменных $x(\nu) = (x_1(\nu), x_2(\nu), \ldots, x_n(\nu))$ и состоянием $s(\nu) = (s_1(\nu), s_2(\nu), \ldots, s_k(\nu))$ на том же такте, т. е. $y(\nu) = \lambda(x(\nu), s(\nu))$. Во-вторых, состояние $s(\nu + 1)$ в следующем $(\nu + 1)$-м такте однозначно определяется входными переменными $x(\nu)$ и состоянием $s(\nu)$ в предыдущем такте, т. е. $s(\nu + 1) = \delta(x(\nu), s(\nu))$.

Таким образом, состояние конечного автомата в любой тактовый момент характеризуется значениями такой совокупности переменных, которая вместе с заданными значениями входных переменных позволяет определить выходные переменные в данный тактовый момент и состояние в следующий тактовый момент.

Ясно, что последовательностные схемы должны обладать способностью сохранять предыдущее состояние до следующего такта, в связи с чем их называют также *автоматами с памятью* или *последовательностными машинами*. В качестве памяти могут использоваться элементы задержки, на выходах которых повторяются входные воздействия со сдвигом во времени на интервал между тактами Δt. Широко применяются также различные запоминающие элементы, например, триггеры, способные сохранять состояния на выходах до тех пор, пока оно не изменяется в результате воздействия на их входы.

3. Типы конечных автоматов. В технике с понятием автомата обычно связывается некоторое устройство, способное выполнять определенные функции без вмешательства человека или с его ограниченным участием. Однако такое понимание является слишком узким. В широком смысле конечный автомат — это математическая модель, отображающая физические или абстрактные явления самой разнообразной природы. Такая модель успешно используется как в технике (проектирование электронных вычислительных машин, систем управления и связи), так и в других областях—психологии и физиологии (исследование деятельности нервной системы человека и простейших видов поведения животных), лингвистике (анализ синтаксиса русского, английского или других языков, расшифровка древних рукописей), теории и практике административного управления и т. п. Универсальность теории автоматов позволяет рассматривать с единой точки зрения различные объекты, устанавливать связи и аналогии между ними, переносить результаты из одной области в другую.

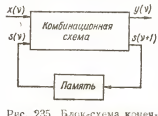


Рис. 235. Блок-схема конечного автомата.

Конечный автомат M определяется как система с конечным входным алфавитом $X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$, конечным выходным алфавитом $Y = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$, конечным множеством состояний $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ и двумя *характеристическими функциями*:

$$s(\nu+1) = \delta(x(\nu),\ s(\nu));$$
$$y(\nu) = \lambda(x(\nu),\ s(\nu)),$$

называемыми соответственно *функцией переходов* и *функцией выходов*. Общая блок-схема конечного автомата (рис. 235) может быть представлена в виде комбинационной схемы, реализующей характеристические функции δ и λ, и памяти, сохраняющей на один такт предыдущее состояние автомата.

В определении автомата участвует три конечных множества X, Y, S и две функции δ и λ, задающие некоторые отношения между

элементами этих множеств. Следовательно, конечный автомат можно обозначить *упорядоченной пятеркой* $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$. Мощности множеств X, Y, S равны соответственно:

$$p = \prod_{i=1}^{n} p_i; \quad q = \prod_{i=1}^{m} q_i; \quad r = \prod_{i=1}^{k} r_i,$$

где p_i, q_i и r_i — количество символов в алфавитах входной переменной x_i, выходной переменной y_i и переменной состояния s_i. При двоичном структурном алфавите $p = 2^n$, $q = 2^m$ и $r = 2^k$. Если желают подчеркнуть мощности множеств X, Y и S, на которых определен конечный автомат, то его называют (p, q, r)-автоматом.

Характеристические функции δ и λ можно рассматривать как некоторые отображения множества $X \times S$ или его подмножества $D \subset X \times S$ соответственно на множества S и Y. Если $\delta : X \times \times S \to S$ и $\lambda : X \times S \to Y$, автомат называется *полным*; если только $\delta : X \times S \to S$, автомат называют *полным по переходам*. В случае, когда функции δ и λ определены не для всех наборов из множества $X \times S$, автомат называют *неполным* или *частично определенным*.

Приведенное в начале этого параграфа определение связывают обычно с *автоматом первого рода*, называемым также *автоматом Мили*. Если выходные переменные являются функцией только состояния, то имеем *автомат второго рода* или *автомат Мура*.

Между автоматами этих двух типов имеется взаимная связь и один из них может быть преобразован в другой. Положив в характеристических функциях автомата Мили $s'(\nu) = (x(\nu), s(\nu))$, получим $y(\nu) = \lambda'(s'(\nu))$ и $s'(\nu + 1) = (x(\nu + 1), \quad s(\nu + 1)) = (x(\nu + 1);$ $\delta(x(\nu), \ s(\nu))) = \delta'(x(\nu + 1), \ s'(\nu))$, т. е. приходим к автомату Мура. Обратный переход осуществляется подстановкой $s(\nu) = = s'(\nu - 1)$, в результате чего получаем $y(\nu) = \lambda'(s'(\nu)) = = \lambda'(\delta' \ (x(\nu), s'(\nu - 1))) = \lambda(x(\nu), \ s(\nu))$, а также $s(\nu + 1) = s'(\nu) = = \delta'(x(\nu), \ s'(\nu - 1)) = \delta(x(\nu), \ s(\nu))$.

Для комбинационных схем функция перехода не имеет смысла, а функция выходов вырождается к виду $y(\nu) = \lambda(x(\nu))$. Их называют *автоматами без памяти* или *тривиальными автоматами*.

4. Представления конечных автоматов. Автомат может быть задан различными способами, например, путем словесного описания его функционирования или перечислением элементов множеств X, Y, S, с указанием отношений между ними. При анализе и синтезе конечных автоматов используются стандартные формы представления: таблицы, графы и матрицы. Элементы множеств X, Y, S удобно пронумеровать порядковыми числами, начиная с нуля, например: $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$ и $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда характеристические функции δ и λ можно представить двумя таб-

лицами, строки которых соответствуют состояниям, а столбцы — входам. Первая таблица, называемая *таблицей переходов*, соответствует функции $s(\nu+1) = \delta(x(\nu), s(\nu))$, и ее клетки заполняются номерами состояний $s(\nu+1)$, в которые переходит автомат при воздействии $x(\nu)$, и состоянии $s(\nu)$ в данный тактовый момент. Вторая таблица, называемая *таблицей выходов*, соответствует функции $y(\nu) = \lambda(x(\nu), s(\nu))$, и ее клетки заполняются номерами выходов $y(\nu)$ в данный тактовый момент, которые соответствуют воздействию $x(\nu)$ и состоянию $s(\nu)$ в тот же момент. Например, для заданных множеств X, Y, S такие таблицы могут иметь вид:

$s(\nu+1) = \delta(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2	3
0	3	2	1	3
1	3	2	1	3
2	3	2	2	3
3	3	0	0	1

$y(\nu) = \lambda(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	1	0	1	1
3	0	0	1	1

.

Обе таблицы можно объединить в *общую таблицу переходов*, если условиться записывать в клетках пары чисел (номер следующего состояния в числителе и номер выхода в знаменателе), т. е.

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2	3
0	3/0	2/0	1/0	3/0
1	3/1	2/0	1/0	3/1
2	3/1	2/0	2/1	3/1
3	3/0	0/0	0/1	1/1

.

Граф автомата строится таким образом, что его вершины соответствуют состояниям, а направленные дуги обозначаются как дизъюнкции входов, под воздействием которых совершается переход из одного состояния в другое по направлению дуги. В знаменателях записываются номера выходов, соответствующие этим переходам.

На рис. 236 показан граф, построенный в соответствии с приведенной выше общей таблицей переходов. Так как из состояния 0 автомат переходит в состояния 1, 2 и 3, то из вершины *0* графа исходят дуги в вершины *1*, *2* и *3*. При этом переход в состояние 1 совершается под воздействием 2 и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины *0* в *1* помечается как *2/0*. Переход в состояние 2 совершается под воздействием 1 и ему соответствует выход 0,

поэтому дуга из вершины *0* в *2* помечается как *1/0*. Переходы в состояние 3 совершаются под воздействиями 0 и 3 и им обоим соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины *0* в *3* помечается как дизъюнкция *0/0* $\vee$ *3/0*. Аналогично определяются и другие дуги графа. Петли соответствуют переходам, при которых состояния не изменяются. Так, рассматриваемый автомат переходит из состояния 2 в 2 под воздействиями 1 и 2, которым соответствуют выходы 0 и 1. Следовательно, петля при вершине *2* помечается как дизъюнкция *1/0* $\vee$ *2/1*.

Матрица соединения автомата M (или *матрица переходов*) представляет собой квадратную таблицу в которой номера строк и столбцов соответствуют номерам состояний. Клетка матрицы на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца заполняется дизъюнкцией пар «вход — выход», которая приписана дуге графа исходящей из *i*-й в *j*-ю вершину. При отсутствии такой ветви клетка заполняется нулем или остается свободной. Так для рассматриваемого примера имеем:

Рис. 236. Граф конечного автомата.

$M=$

	0	1	2	3	
		2/0	1/0	0/0$\vee$3/0	0
		2/0	1/0	0/1$\vee$3/1	1
			1/0$\vee$2/1	0/1$\vee$3/1	2
	1/0$\vee$2/1	3/1		0/0	3

5. Анализ конечных автоматов. Полное описание поведения автомата заключается в определении последовательности выходных сигналов при возбуждении его в тактовые моменты времени некоторой последовательностью входных сигналов. Входная и выходная последовательности представляются наборами символов (или их номеров) из алфавитов X и Y одинаковой длины l. Для такого описания, кроме характеристических функций, необходимо определить или задать начальное состояние автомата.

Наиболее удобно определять реакцию автомата на входную последовательность по его графу. Для этого достаточно проследить

путь в графе, начиная от вершины начального состояния, по направлению дуг, которые отмечены очередными номерами из входной последовательности. Выходная последовательность определяется номерами, которыми отмечены дуги в порядке их следования по пройденному пути, а последовательность состояний автомата — номерами вершин, через которые проходит этот путь.

Так, из графа на рис. 236 для входной последовательности (2, 0, 1, 1, 2, 3) и начального состояния 0 имеем выходную последовательность (0, 1, 0, 0, 1, 1) и смену состояний автомата (1, 3, 0, 2, 2, 3). При начальном состоянии 2 и той же входной последовательности получаем соответственно (1, 1, 0, 0, 1, 1) и (2, 3, 0, 2, 2, 3).

С помощью графа автомата легко выделить следующие характерные типы его состояний:

1) *преходящее состояние*, из которого можно перейти, по крайней мере, в одно другое состояние, но после этого уже нельзя возвратиться в него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет заходящих дуг, но имеет хотя бы одну исходящую дугу);

2) *тупиковое состояние*, в которое можно перейти, по крайней мере, из одного другого состояния, но после этого уже нельзя выйти из него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет исходящих дуг в другие вершины, но имеет хотя бы одну входящую дугу из другой вершины);

3) *изолированное состояние*, из которого нельзя перейти ни в какое другое состояние и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния (соответствующая вершина содержит только петлю).

Аналогичные определения можно дать для некоторых совокупностей состояний, рассматриваемых как *подавтоматы*. Если начальное состояние автомата M принадлежит непустому множеству S_i состояний, которое составляет *тупиковый* или *изолированный подавтомат*, то M можно упростить исключением всех состояний, которые не принадлежат множеству S_i, и всех дуг, начинающихся в этих состояниях.

Пусть M_1, M_2 и M_3 — соответственно преходящий, тупиковый и изолированные подавтоматы автомата M, которые характеризуются множествами состояний S_1, S_2 и S_3. Очевидно, выделение таких подавтоматов соответствует разбиению множества S состояний автомата M на непересекающиеся подмножества S_1, S_2 и S_3, представляющие собой классы эквивалентности ($S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$ и $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$). Как следует из обобщенного графа (рис. 237), матрица соединения автомата может быть представлена в виде:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix},$$

где μ_{11}, μ_{22}, μ_{33} — матрицы подавтоматов M_1, M_2 и M_3; μ_{12} — матрица, характеризующая переходы от состояний преходящего автомата M_1 к состояниям тупикового автомата M_2. Отсюда следует, что разбиение автомата M на подавтоматы M_1, M_2 и M_3 можно осуществить преобразованием его матрицы соединений к стандартному виду путем перестановки соответствующих строк и столбцов. Например, для автомата, граф которого изображен на рис. 238, имеем:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 & 5 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & 2/0 & 0/1 & 0 & 1/1 & 0 & 0 \\ 1/0 & 0 & 0 & 1/0 & 2/1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/1 \vee 2/0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0 \vee 2/1 & 0/0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/1 \vee 2/0 & 1/0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/1 & 1/0 \vee 2/1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/1 \vee 1/0 \vee 2/0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \end{array}.$$

Отсюда следует, что $S_1 = \{3, 6\}$ составляет преходящий подавтомат, $S_2 = \{2, 4, 7\}$ — тупиковый подавтомат и $S_3 = \{1, 5\}$ — изолированный подавтомат. Если начальное состояние принадлежит множеству S_2, то можно упростить автомат, исключив состояния $S_1 \cup S_3 = \{3, 6, 1, 5\}$, а в случае принадлежности начального состояния множеству S_3 автомат упрощается исключением состояний $S_1 \cup S_2 = \{3, 6, 2, 4, 7\}$.

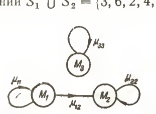


Рис. 237. Обобщенный граф конечного автомата.

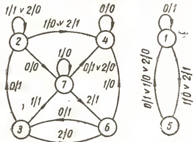


Рис. 238. Граф конечного автомата к примеру разбиения на подавтоматы.

6. Синтез конечных автоматов. Реализация конечных автоматов сводится к синтезу соответствующей комбинационной схемы, преобразующей входные переменные $x(\nu)$ и $s(\nu)$ в выходные переменные $y(\nu)$ и $s(\nu+1)$ в соответствии с заданными характеристическими функциями $s(\nu+1) = \delta(x(\nu), s(\nu))$ и $y(\nu) = \lambda(x(\nu), s(\nu))$. Для сохранения состояний $s(\nu+1)$ до следующего такта в цепь обратной связи вводится необходимое количество элементов памяти.

При реализации автоматов в двоичном структурном алфавите можно использовать рассмотренные ранее методы синтеза комбина-

ционных схем. Но для этого необходимо закодировать состояния схемы и представить характеристические функции в виде булевых функций двоичных переменных. Такое кодирование можно осуществить преобразованием общей таблицы перехода автомата к таблице соответствия в двоичном структурном алфавите. Если элементы множеств X, Y и S пронумерованы порядковыми числами, начиная с нуля, то им соответствуют коды, представляющие собой двоичные эквиваленты этих чисел. Например, для автомата, заданного в (4), таблицу переходов можно преобразовать к виду:

$x(\nu)$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$s(\nu)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$s(\nu+1)$	3	3	3	3	2	2	2	0	1	1	2	0	3	3	3	1
$y(\nu)$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1

Заменяя десятичные числа их двоичными эквивалентами, читаемыми сверху вниз, получаем таблицу соответствия, в которой значения функций $s(\nu+1)$ и $y(\nu)$ представлены двоичными кодами:

$x(\nu)$	$x_1(\nu)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	$x_2(\nu)$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$s(\nu)$	$s_1(\nu)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	$s_2(\nu)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$s(\nu+1)$	$s_1(\nu+1)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
	$s_2(\nu+1)$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
$y(\nu)$	$y_1(\nu)$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1

Отсюда видно, что комбинационная схема должна иметь четыре входа, соответствующие входным переменным $x_1(\nu)$, $x_2(\nu)$ и переменным состояния $s_1(\nu)$, $s_2(\nu)$, а также три выхода, соответствующие переменным состояния $s_1(\nu+1)$, $s_2(\nu+1)$ и выходной переменной $y_1(\nu)$. Синтезировав комбинационную схему, соответствующую полученной таблице и введя два элемента задержки $З_1$ и $З_2$, получим структурную схему автомата (рис. 239).

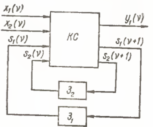


Рис. 239. Структурная схема конечного автомата

7. Минимизация автоматов. С утилитарной точки зрения интерес представляет только зависимость между входами и выходами автомата, а роль его состояний сводится исключительно к участию в формировании этих зависимостей в качестве промежуточных переменных. Следовательно, любая совокупность состояний, обеспечивающая требуемые зависимости между входом и выходом, может быть выбрана в качестве множества состояний автомата. В то же

время этот выбор естественно подчинить определенным целям, например, минимизации числа состояний или оптимизации автомата в каком-либо смысле. Следует иметь в виду, что с уменьшением числа состояний уменьшается и количество требуемых элементов памяти, но это может привести к усложнению комбинационной схемы автомата. Поэтому синтез наиболее экономичного автомата часто требует поиска удачного компромисса между сложностью его комбинационной и запоминающих частей.

Минимизация числа состояний полных автоматов связана с отношением эквивалентности. Пусть автоматы M_1 и M_2, находящиеся соответственно в начальных состояниях σ_i и σ_j (обозначения

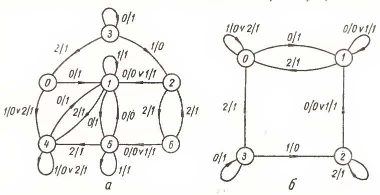


Рис. 240 Граф конечного автомата (*а*) и его сокращенная форма (*б*).

M_1 и M_2 могут относиться к одному и тому же автомату), под воздействием любой входной последовательности выдают одинаковые выходные последовательности, т. е. автоматы M_1 и M_2 в данных состояниях σ_i и σ_j неразличимы по внешним выходам. Такое отношение между состояниями одного и того же или двух различных автоматов обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, следовательно, оно является отношением эквивалентности состояний. Если состояния не эквивалентны, то их называют *различимыми*. Легко доказать справедливость следующих положений:

1) состояния σ_i и σ_j автомата *явно различимы*, если различаются соответствующие им строки в таблице выходов;

2) состояния σ_i и σ_j автомата *явно эквивалентны*, если соответствующие им строки в таблице переходов и таблице выходов одинаковы или становятся одинаковыми при замене каждого номера σ_i на номер σ_j (или наоборот).

Например, для автомата, граф которого изображен на рис. 240, *а*, общая таблица переходов имеет вид:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	1/1	4/0	4/1
1	5/1	1/1	4/1
2	1/0	1/1	6/1
3	3/1	2/0	0/1
4	1/1	4/0	4/1
5	1/0	5/1	4/1
6	5/0	5/1	2/1

Из этой таблицы следует, что состояния из множества {0, 3, 4} являются явно различимыми с любым состоянием из множества {1, 2, 5, 6}. Поэтому следует искать эквивалентные состояния только среди элементов, принадлежащих одному из этих множеств. Так как строки 0 и 4 одинаковы, а строки 1 и 5 становятся одинаковыми при замене цифры в числителе 1 на 5 (или 5 на 1), то явно эквивалентными являются пары состояний {0, 4} и {1, 5}.

Объединяя эквивалентные состояния в автомате M_1, получаем эквивалентный автомат M_2 с меньшим числом состояний, который в любом состоянии нельзя отличить от исходного, наблюдая сигналы на выходах. Очевидно, автоматы M_1 и M_2 являются эквивалентными, если каждому состоянию σ_i автомата M_1 соответствует, по крайней мере, одно эквивалентное ему состояние автомата M_2, и если каждому состоянию σ_j автомата M_2 соответствует хотя бы одно эквивалентное ему состояние автомата M_1.

Эквивалентные состояния, например, σ_i и σ_j удобно объединять по общей таблице переходов, вычеркивая строку σ_j и заменяя везде в числителе числа σ_j на σ_i. После объединения пар явно эквивалентных состояний может оказаться возможным снова обнаружить такие состояния, которые также объединяются с помощью аналогичной процедуры. В результате последовательного объединения приходим к сокращенной таблице переходов, которой соответствует сокращенный автомат, эквивалентный исходному, но имеющий меньшее число состояний. Так, для рассматриваемого примера получаем последовательно:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0(4)	1/1	0/0	0/1
1(5)	1/0	1/1	0/1
2	1/0	1/1	6/1
3	3/1	2/0	0/1
6	1/0	1/1	2/1

;

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0(4)	1/1	0/0	0/1
1(5)	1/0	1/1	0/1
2(6)	1/0	1/1	2/1
3	3/1	2/0	0/1

.

Первая таблица соответствует объединению пар эквивалентных состояний $\{0,4\}$ и $\{1, 5\}$, а вторая — объединению пары $\{2, 6\}$. Сокращенный автомат содержит только четыре состояния (рис. 240, *б*).

8. Эквивалентное разбиение. Если известны все пары эквивалентных состояний конечного автомата, то тем самым на множестве S его состояний определено отношение эквивалентности, которому соответствует некоторое разбиение на классы эквивалентности $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_v\}$. При этом состояние, не имеющее эквивалентного ему состояния, составляет класс эквивалентности, единственным элементом которого является это состояние. Обозначим через $\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_v'$ представители классов эквивалентности и через M' — автомат, множеством состояний которого является семейство представителей $S' = \{\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_v'\}$. Можно утверждать, что автоматы M и M' эквивалентны ($M \sim M'$), причем M' имеет минимальное число состояний, т. е. является *минимальной формой* автомата.

Объединение эквивалентных состояний в классы эквивалентности осуществляется весьма просто. Если $\sigma_i \sim \sigma_j$ и $\sigma_j \sim \sigma_k$, то на основе свойства транзитивности следует, что $\sigma_i \sim \sigma_k$, и, значит, пары $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ и $\{\sigma_j, \sigma_k\}$ входят в общий для них класс эквивалентности. Но для выявления всех пар эквивалентных состояний требуется более громоздкая процедура, так как множество таких пар не исчерпывается явно эквивалентными состояниями и не всегда может быть полностью обнаружено и объединено способом, изложенным в (7).

Для эквивалентного разбиения множества S состояний автомата предложен ряд способов. Один из них основан на последовательном рассмотрении всевозможных пар состояний и исключении тех из них, которые не являются эквивалентными. При этом пары одинаковых состояний $\{\sigma_i, \sigma_i\}$, являющиеся в силу свойства рефлективности заведомо эквивалентными ($\sigma_i \sim \sigma_i$), не рассматриваются. Процедура эквивалентного разбиения осуществляется по *таблице пар состояний*, которая получается на основе общей таблицы переходов автомата. Так как явно различимые пары состояний (для таких состояний строки в таблице выходов различные) не могут быть эквивалентными, то они в таблицу пар не включаются. Для каждой пары отводится строка, для каждого входа — столбец, а в клетках на основании таблицы переходов указывается пара состояний, в которые переходит автомат из данной пары состояний при данном входном воздействии (порядок записи состояний в каждой паре безразличен). Исключаемые пары отмечаются каким-либо способом (набираются жирным шрифтом, подчеркиваются или снабжаются меткой). Ниже приведены общая таблица переходов и полученная из нее таблица пар состояний некоторого автомата:

$s(v)$ \ $x(v)$	0	1	2
0	1/1	1/0	4/0
1	0/0	3/1	3/1
2	1/1	1/0	4/0
3	2/0	1/1	1/1
4	5/1	3/0	2/0
5	7/0	8/1	5/1
6	5/1	1/0	7/0
7	3/1	3/0	6/0
8	6/0	8/1	6/1

Пары \ $x(v)$	0	1	2
0,2	1,1	1,1	4,4
$\vee$0,4	1,5	1,3	2,4
$\vee$0,6	1,5	1,1	4,7
0,7	1,3	1,3	4,6
1,3	0,2	1,3	1,3
$\vee$1,5	0,7	3,8	3,5
$\vee$1,8	0,6	3,8	3,6
$\vee$2,4	1,5	1,3	2,4
$\vee$2,6	1,5	1,1	4,7
2,7	1,3	1,3	4,6
$\vee$3,5	2,7	1,8	1,5
$\vee$3,8	2,6	1,8	1,6
4,6	5,5	1,8	2,7
$\vee$4,7	3,5	3,3	2,6
$\vee$5,8	6,7	8,8	5,6
$\vee$6,7	3,5	1,3	6,7

Так как одинаковые строки таблицы выходов соответствуют множествам состояний {0, 2, 4, 6, 7} и {1, 3, 5, 8}, то в первом столбце таблицы пар указаны только попарные комбинации таких состояний, которые входят в одно и то же множество, т. е. не являются явно различимыми.

Исключение пар основано на следующем положении: если состояния σ_i и σ_j эквивалентны, то эквивалентными являются и состояния, в которые автомат переходит под любым входным воздействием. Это значит, что на первом шаге необходимо отметить те пары, которые переходят в пары, состоящие из различных состояний и отсутствующие в первой графе таблицы. Так как обозначенные пары не могут быть эквивалентными, то на следующем шаге отмечаются все те пары, которые переходят в пары, отмеченные на предыдущем шаге и т. д. Процесс заканчивается тогда, когда среди неотмеченных пар уже нет таких, которые можно отметить в соответствии с изложенным правилом. После этого неотмеченные пары и представляют собой попарно эквивалентные состояния.

В приведенном примере на первом шаге отмечаются пары {1, 8}, {3, 8} и {5, 8}, на втором — {1, 5} и {3, 5}, на третьем — {0, 4}, {0, 6}, {2, 4}, {2, 6}, {4, 7} и {6, 7}. Эквивалентными являются неотмеченные пары {0, 2}, {0, 7}, {1, 3}, {2, 7} и {4, 6}, образующие классы эквивалентности $S_0 = \{0, 2, 7\}$, $S_1 = \{1, 3\}$ и $S_2 = \{4, 6\}$. Кроме того, не вошедшие в эти множества состояния 5 и 8 образуют классы эквивалентности $S_3 = \{5\}$ и $S_4 = \{8\}$. Обозначив представителей полученных пяти классов соответственно числами от 0 до

4, получим для рассматриваемого автомата минимальную форму с пятью состояниями и общей таблицей переходов:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	1/1	1/0	2/0
1	0/0	1/1	1/1
2	3/1	1/0	0/0
3	0/0	4/1	3/1
4	2/0	4/1	2/1

Следует отметить, что автомат, все состояния которого эквивалентны, сводится к автомату с одним состоянием, т. е. представляет собой по существу комбинационную схему. Автомат, среди состояний

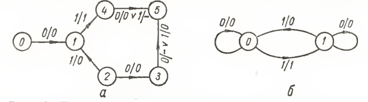


Рис. 241. Граф неполного автомата (*а*) и его минимальная форма (*б*).

которого нет эквивалентных, является *несократимым*. Если M' — минимальная форма автомата M, то она единственна и несократима.

9. Неполные автоматы. В практике встречаются случаи, когда не каждый символ из входного алфавита может быть подан на автомат, находящийся в определенном состоянии (*ограничения на входе*), или его выходы при некоторых входных воздействиях не представляют интереса (*неопределенность выходов*). Тогда приходится иметь дело с *неполными автоматами*, общая таблица переходов которых содержит прочерки вместо состояний и выходов для запрещенных входов, а также вместо неопределенных выходов. Например, таблица для неполного автомата, граф которой изображен на рис. 241, *а*, имеет вид:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1/0	—
1	—	4/1
2	3/0	1/0
3	5/—	5/0
4	5/0	5/—
5	—	—

Здесь вход 0 в состояниях 1 и 5, а также вход 1 в состояниях 0 и 5 являются запрещенными. Кроме того, в состоянии 3 при воздействии 0 и в состоянии 4 при воздействии 1 выходы не определены.

Входная последовательность называется *допустимой* для автомата в состоянии σ_i, если она не нарушает ограничений на входе ни в каком состоянии автомата M и порождаемый ею выход определен на заключительном такте. На других тактах входной последовательности выходы могут быть и не определены, но последовательность состояний обязательно должна существовать. Например, для приведенного выше автомата в состоянии 0 допустимая входная последовательность $\{0, 1, 0\}$ порождает последовательность состояний $\{1, 4, 5\}$ и заключительный выход 0. В то же время последовательность $\{0, 1, 1\}$ не допустима, так как заключительный выход не определен.

Число состояний неполного автомата иногда можно сократить изложенными в (7) и (8) методами, произвольно интерпретируя прочерки в его таблице и рассматривая его как полный автомат. Однако такой путь не гарантирует получения минимальной формы.

Сокращенная форма неполного автомата M — это такой автомат M', который по отношению к допустимым для M входным последовательностям ведет себя на выходах так же, как и исходный автомат M, но имеет меньшее число состояний. Говорят, что автомат M' *квазиэквивалентный* автомату M. Отношение квазиэквивалентности рефлексивно и транзитивно, но не симметрично, т. е обладает всеми свойствами отношения включения. Поэтому говорят также, что M' *включает* M и записывают $M \subset M'$. При этом из $M \subset M'$ вовсе не следует $M' \subset M$, что иногда выражают словами: M' делает столько же и, быть может, больше, чем M.

10. Минимизация неполных автоматов. Эта задача сводится к поиску квазиэквивалентного автомата, который имеет наименьшее число состояний, и решается следующим образом.

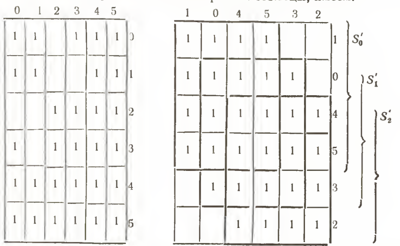
Сначала на множестве состояний $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ исходного автомата определяется отношение совместимости. Состояния σ_i и σ_j называют *совместимыми*, если любая допустимая для этих состояний входная последовательность не порождает различных заключительных выходов при начальных состояниях σ_i и σ_j автомата. Отношение совместимости рефлексивно и симметрично, однако оно не обязательно транзитивно. Отсюда следует, что совместимость является отношением толерантности. Все совместимые между собой состояния объединяются в классы толерантности $S'_0, S'_1, \ldots, S'_w$, которые образуют некоторое покрытие множества состояний $(\bigcup_i S'_i = S)$.

Для определения совместимых состояний можно воспользоваться методом, аналогичным изложенному в (8). Исходная таблица содержит пары таких состояний, при которых для любого допусти-

мого входного символа отсутствуют различные выходы. Клетки, соответствующие запрещенным входам для данной пары состояний, заполняются прочерком и при исключении пар, как это описано в (8), не учитываются. Так, для автомата, заданного приведенной выше таблицей переходов, имеем:

$x(\nu)$ / Пары	0	1
0,1	—	—
0,2	1,3	—
0,3	1,5	—
0,4	1,5	—
0,5	—	—
1,4	—	4,5
1,5	—	—
2,3	3,5	1,5
2,4	3,5	1,5
2,5	—	—
3,4	5,5	5,5
3,5	—	—
4,5	—	—

Отмеченная на первом шаге пара $\{0, 2\}$ является единственной несовместимой парой в таблице, так как она не содержится ни в каких других строках. Следовательно, все неотмеченные пары являются несовместимыми. Построив матрицу толерантности для совместимых пар и переставив в ней строки и столбцы, имеем:



	0	1	2	3	4	5
0	1	1		1	1	1
1	1	1			1	1
2			1	1	1	1
3	1		1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1

	1	0	4	5	3	2
1	1	1	1	1		
0	1	1	1	1	1	
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1	1
2			1	1	1	1

Отсюда выделяем классы толерантности $S'_0 = \{0, 1, 4, 5\}$, $S'_1 = \{0, 3, 4, 5\}$, $S'_2 = \{2, 3, 4, 5\}$, объединяющие совместимые между

собой состояния. Здесь, в частности, можно убедиться в том, что совместимость не обладает свойством транзитивности. Например, пары состояний {0, 1} и {0, 3} совместимы, но состояния 1 и 3 не входят в один и тот же класс толерантности и, следовательно, они несовместимы.

Из определения совместимости и способа получения классов толерантности следует, что при воздействии любого незапрещенного входного символа автомат из совместимых состояний переходит в одно и то же или в совместимые состояния, а выходы (если они определены) при этом будут одинаковы. Так, в нашем примере при воздействии 0 классы S'_0 и S'_1 переходят в {1, 5}, а S'_2 — в {3, 5}; при воздействии 1 класс S'_0 переходит в {4, 5}, S'_1 — в {5} и S'_2—в {1, 5}. Следовательно, исходный автомат можно представить квазиэквивалентным ему автоматом, в котором классам толерантности S'_0, S'_1, ..., S'_w соответствуют состояния σ'_0, σ'_1, ..., σ_w. Однако такой автомат не всегда будет минимальным. Для получения минимальной формы автомата необходимо отобрать наименьшее число таких классов толерантности, которые образуют покрытие множества состояний S и в то же время включают множества состояний, следующих за состояниями каждого класса при всех незапрещенных воздействиях. Для рассматриваемого примера этим требованиям удовлетворяют классы S'_0 и S'_2, так как $S'_0 \cup S'_2 = S$, и все множества последующих состояний {1, 5}, {3, 5}, {4, 5} и {5} являются подмножествами S'_0 и S'_2. Соответствующая минимальная форма показана на рис. 241, *б*, где состояния 0 и 1 соответствуют классам S'_0 и S'_2.

Дальнейшие упрощения относятся не к числу состояний, а к структуре множеств, образующих минимальное покрытие S. Если из отобранных классов толерантности можно исключить некоторые состояния так, что полученные подмножества удовлетворяют приведенным выше требованиям, то эти подмножества также определяют другой вариант минимальной формы автомата. Так, из S'_0 или из S'_2 можно исключить состояние 4, поскольку оно входит только в множество последующих состояний {4, 5}. Тогда получим еще два варианта минимальных покрытий: {0, 1, 5}, {2, 3, 4, 5} и {0, 1, 4, 5}, {2, 3, 5}. Но состояние 5 нельзя исключить ни из одного класса, хотя оно и содержится в каждом из них, так как множества последующих состояний {1, 5} и {3, 5} показывают, что состояние 5 должно содержаться как в S'_0, так и в S'_2.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Накопительный счетчик, на вход которого подаются двоичные цифры 0 и 1, подсчитывает по модулю 3 общее число поступивших на вход единиц.

а) Перечислите входной и выходной алфавиты, а также определите множество состояний.

б) Запишите таблицу переходов соответствующего конечного автомата.

в) Постройте граф автомата и запишите матрицу соединения.

г) Определите тип автомата.

2. Русский текст, составленный из 32 букв алфавита и пропусков между словами, анализируется с целью подсчета слов, начинающихся с буквы *а* и оканчивающихся на *ия* (таких, например, как *ария*, *анатомия* и т. п.). Все буквы, кроме *а*, *и*, *я*, обозначим через α, а пропуск — через β. Входной алфавит X, выходной алфавит Y и множество состояний S определяются следующим образом: $X = \{a, u, я, \alpha, \beta\}$; $Y = \{$считать, не считать$\}$; $S = \{$новое слово, появление *а*..., появление *а...и*, появление *а...ия*, ожидание нового слова$\}$.

а) Охарактеризуйте эту систему как конечный автомат, запишите таблицу переходов и матрицу соединения, постройте граф автомата.

б) Определите выходную последовательность и последовательность состояний автомата, если на вход при начальном состоянии «новое слово» подаются слова: *армия*, *арик*, *анатомия*.

в) Решите задачу при условии, что анализ текста осуществляется с целью подсчета слов, которые оканчиваются на *тор*.

3. На основании графа (рис. 236) определите выходную последовательность и смену состояний автомата при начальном состоянии 3 и входной последовательности:

а) (0 1 2 3 3 0 1 2);
б) (2 0 1 3 2 0 0 2);
в) (3 1 0 0 2 3 0 2 1 1).

Рис. 242. Графы автоматов к задаче 4.

4. Постройте таблицы переходов и матрицы соединений для автоматов, представленных графами на рис. 242.

5. Автомат A задан матрицей соединений

$A =$	1	2	3	4	5	6	7	8	
	$0/1 \vee 1/0$								1
		0/0		1/1					2
			$0/1 \vee 1/1$						3
			0/1		1/0				4
			0/1					1/1	5
						$0/1 \vee 1/0$			6
					1/0			0/1	7
						$0/0 \vee 1/1$			8

а) Определите множество состояний и перечислите входной и выходной алфавиты.

б) Определите преходящий, изолированный и тупиковый подавтоматы автомата A.

6. Постройте комбинационную схему для конечного автомата по таблице соответствия, приведенной в (6).

7. Какие из автоматов, представленные графами на рис. 243, являются эквивалентными?

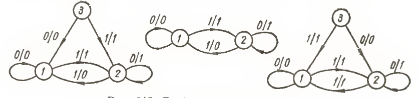


Рис. 243. Графы автоматов к задаче 7.

8. На входы одноразрядного последовательного двоичного сумматора подаются разряды двух слагаемых в двоичном коде (0 или 1), а выходом является соответствующий разряд суммы по модулю 2. Сумматор имеет два состояния, определяемые значениями переноса (0 и 1).

а) Покажите, что такой сумматор можно представить как автомат, граф которого показан на рис. 244.

Рис. 244. Преобразование автомата Мура (*а*) в автомат Мили (*б*).

б) Определите выходную последовательность и смену состояний автомата при суммировании чисел 35 и 17.

9. Покажите, что автомат Мура (рис. 244, *а*) можно преобразовать в соответствующий ему автомат Мили (рис. 244, *б*).

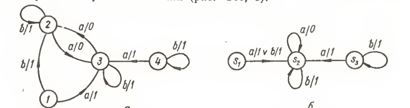


Рис. 245. Граф автомата (*а*) и его минимальная форма (*б*) к задаче 12.

10. Постройте конечный автомат, описывающий действие грузового лифта в трехэтажном магазине. Три состояния лифта соответствуют его пребыванию на этажах. Входами являются кнопки на этажах, а также сигнал о том, что ни одна из кнопок не нажата. Выходами являются сигналы, определяющие движение вверх, вниз и остановку. Предполагается, что одновре-

менно может быть нажата только одна кнопка и для достижения лифтом нужного этажа вход не меняется. При отсутствии команд лифт должен возвращаться на первый этаж.

11. Постройте конечный автомат для лифта, описанного в предыдущей задаче при условии, что все возможные команды (нажатия кнопок) должны запоминаться и последовательно выполняться.

12. Покажите, что конечный автомат (рис. 245, *а*) преобразуется в минимальную форму (рис. 245, *б*).

13. Найдите минимальную форму автомата, представленного графом на рис. 246.

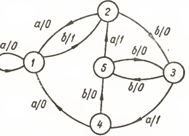


Рис. 246. Граф автомата к задаче 13.

14. Найдите минимальную форму неполного автомата, заданного таблицей:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	1	2	3	4
1	0/2	0/3	—	1/4
2	0/3	0/5	—	—
3	1/4	0/6	1/3	—
4	1/5	0/3	—	1/1
5	—	0/6	—	—
6	—	—	1/4	0/2

7. МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

1. Функции многозначной логики. Естественным обобщением двузначной логики является *k-значная логика* при $k > 2$. Она рассматривает однородные логические функции, определяемые на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, состоящем из k элементов. В силу однородности сама функция k-значной логики от n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значения из того же конечного множества.

Подобно функциям двузначной логики, k-значные логические функции можно задать в виде конечной таблицы. Как уже указывалось в (1. 3), количество столбцов в такой таблице равно k^n, а количество всевозможных функций выражается числом $k^{(k)^n}$. Это число сильно возрастает с ростом k даже для небольших значений n. Так, при $k = 10$ будем иметь 10^{10} функций одной переменной и 10^{100} функций двух переменных. Поэтому нечего и думать о том, чтобы изучить свойства таких функций путем их перебора, как это делается в двузначной логике.

Обобщение двузначной логики на k-значный случай находится еще в стадии становления. Обычно ограничиваются рассмотрением наиболее важных многозначных функций одной и двух пере-

менных. По аналогии с двузначными функциями вводятся понятия равенства и суперпозиции функций k-значной логики. Проблема полноты для многозначной логики также еще далека от полного решения. Полученные результаты в основном сводятся либо к общим условиям существования полных систем функций, либо к рассмотрению конкретных базисов и полных систем, которые по тем или иным соображениям считаются удобными для представления функций многозначной логики и практического применения для синтеза логических схем.

2. Константы и функции одной переменной. В k-значной логике имеется k *констант* $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ \ldots,\ f_{k-1} = k - 1$. Среди функций одной переменной $f(x)$ наиболее употребительны следующие:

1) *характеристические функции* i-го порядка, число которых равно k $(i = 0, 1, \ldots, k - 1)$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} k - 1 & \text{при } x = i, \\ 0 & \text{при } x \neq i; \end{cases}$$

2) *функция инверсии* $\bar{x} = k - 1 - x$;

3) *функция циклического отрицания* (*цикл*) $\hat{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\, k)$.

Ниже приведена таблица этих функций при $k = 5$:

$f(x)$ \ x	0	1	2	3	4
$\varphi_0(x)$	4	0	0	0	0
$\varphi_1(x)$	0	4	0	0	0
$\varphi_2(x)$	0	0	4	0	0
$\varphi_3(x)$	0	0	0	4	0
$\varphi_4(x)$	0	0	0	0	4
$\bar{x}$	4	3	2	1	0
$\hat{x}$	1	2	3	4	0

Очевидно, инверсия характеристических функций выражается соотношением:

$$\overline{\varphi_i(x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = i; \\ k - 1 & \text{при } x \neq i. \end{cases}$$

В многозначной логике используются также функции одной переменной более общего вида:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} j & \text{при } x = i; \\ 0 & \text{при } x \neq i, \end{cases}$$

частным случаем которых при $j = k - 1$ являются характеристические функции, т. е. $\varphi_i(x) = e_{i,\, k-1}(x)$. При $j = 1$ получаем другой тип характеристических функций

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = i; \\ 0 & \text{при } x \neq i. \end{cases}$$

В двузначном случае $\varphi_0(x)$, $\bar{x}$ и $\hat{x}$ совпадают с отрицанием, а $\varphi_1(x) = x$.

3. **Функции двух переменных.** Наиболее важное значение имеют следующие функции двух переменных:

1) *k-значная дизъюнкция* $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$;
2) *k-значная конъюнкция* $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$;
3) *k-значная функция Шеффера—Вебба* $x_1/x_2 = x_1 \vee x_2 + 1 \pmod k$;
4) *функция сложения по модулю k* $x_1 + x_2 \pmod k$;
5) *функция умножения по модулю k* $x_1 x_2 \pmod k$.

Значения этих функций при $k = 4$ приведены ниже

x_1	0 0 0 0	1 1 1 1	2 2 2 2	3 3 3 3
x_2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
$x_1 \vee x_2$	0 1 2 3	1 1 2 3	2 2 2 3	3 3 3 3
$x_1 \wedge x_2$	0 0 0 0	0 1 1 1	0 1 2 2	0 1 2 3
x_1/x_2	1 2 3 0	2 2 3 0	3 3 3 0	0 0 0 0
$x_1 + x_2 \pmod k$	0 1 2 3	1 2 3 0	2 3 0 1	3 0 1 2
$x_1 x_2 \pmod k$	0 0 0 0	0 1 2 3	0 2 0 2	0 3 2 1

При $k = 2$ функции $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \wedge x_2$ совпадают с соответствующими функциями двузначной логики и между ними имеют место аналогичные зависимости: $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$; $x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4}$.

Как и в двузначной логике, k-значные дизъюнкция и конъюнкция подчиняются ассоциативному, коммутативному и обоим дистрибутивным законам. Поэтому вместе с инверсией эти операции превращают множество $\{0, 1, \ldots, k - 1\}$ в булеву алгебру (2. 10).

4. **Нормальные формы.** Воспользовавшись понятием характеристических функций для двузначного случая ($k = 2$), можно представить совершенные (дизъюнктивную и конъюнктивную) нормальные формы булевой функции выражениями

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge \varphi_{\alpha_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{\alpha_n}(x_n) =$$
$$= \wedge f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee \overline{\varphi_{\alpha_1}(x_1)} \vee \cdots \vee \overline{\varphi_{\alpha_n}(x_n)}.$$

Здесь дизъюнкция в первом выражении и конъюнкция во втором берутся по всем двоичным наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Ясно, что оба выражения равны единице только на тех наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на которых функция принимает единичные значения, так как при этом $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, а также по определе-

нию характеристических функций (2) $\varphi_{\alpha_i}(x_i) = 1$ и $\overline{\varphi_{\alpha_i}(x_i)} = 0$. На тех наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на которых функция принимает нулевые значения, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ и, следовательно, оба выражения обращаются в нуль.

Таким образом, первое выражение представляет собой совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Ее члены $\varphi_{\alpha_1}(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_{\alpha_n}(x)$, называемые *характеристическими конъюнкциями*, играют роль конституент единицы (2. 5). При этом в дизъюнкцию входят только те из них, которые соответствуют $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Второе выражение представляет собой совершенную конъюнктивную нормальную форму. Его члены $\varphi_{\alpha_1}(x) \vee \ldots \vee \varphi_{\alpha_n}(x)$, называемые *характеристическими дизъюнкциями*, играют роль конституент нуля. При этом в конъюнкцию входят только те из них, которые соответствуют $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Приведенные выражения распространяются на случай $k > 2$ и рассматриваются как *k-значные совершенные нормальные формы*. Возможность такого обобщения следует из того, что по определению характеристические конъюнкции равны $k - 1$ и характеристические дизъюнкции равны нулю только при условии $x_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Из определений k-значных дизъюнкций и конъюнкций (3) ясно, что совершенная дизъюнктивная нормальная форма содержит только члены, соответствующие $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, а конъюнктивная — только члены, соответствующие $f(\alpha_1, \ldots,) \neq k - 1$. Кроме того, для упрощения можно не вписывать значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = k - 1$ в первом случае и значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ — во втором случае.

В качестве примера рассмотрим четырехзначную функцию переменных, заданную таблицей:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
x_2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$f(x_1, x_2)$	2	0	3	0	0	3	1	2	3	1	0	0	3	2	0	3

В соответствии с изложенными правилами имеем: $f(x_1, x_2) = (2 \wedge \varphi_0(x_1) \wedge \varphi_0(x_2)) \vee (\varphi_0(x_1) \wedge \varphi_2(x_2)) \vee (\varphi_1(x_1) \wedge \varphi_1(x_2)) \vee (1 \wedge \varphi_1(x_1) \wedge \varphi_2(x_2)) \vee (2 \wedge \varphi_1(x_1) \wedge \varphi_3(x_2)) \vee (\varphi_2(x_1) \wedge \varphi_0(x_2)) \vee (1 \wedge \varphi_2(x_1) \wedge \varphi_1(x_2)) \vee (\varphi_3(x_1) \wedge \varphi_0(x_2)) \vee (2 \wedge \varphi_3(x_1) \wedge \varphi_1(x_2)) \vee (\varphi_3(x_1) \wedge \varphi_3(x_2)) = (2 \vee \overline{\varphi_0(x_1)} \vee \overline{\varphi_0(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_0(x_1)} \vee \overline{\varphi_1(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_0(x_1)} \vee \overline{\varphi_3(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_1(x_1)} \vee \overline{\varphi_0(x_2)}) \wedge (1 \vee \overline{\varphi_1(x_1)} \vee \overline{\varphi_2(x_2)}) \wedge (2 \vee \overline{\varphi_1(x_1)} \vee \overline{\varphi_3(x_2)}) \wedge (1 \vee \overline{\varphi_2(x_1)} \vee \overline{\varphi_1(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_2(x_1)} \vee \overline{\varphi_2(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_2(x_1)} \vee \overline{\varphi_3(x_2)}) \wedge (2 \vee \overline{\varphi_3(x_1)} \vee \overline{\varphi_1(x_2)}) \wedge (\overline{\varphi_3(x_1)} \vee \overline{\varphi_2(x_2)})$.

5. Функционально полные системы. Возможность представления любой многозначной функции в совершенной дизъюнктивной нормальной форме служит доказательством полноты системы, включающей дизъюнкцию, конъюнкцию, характеристические функ-

ции и константы *(система Россера и Тьюкетта)*. Предложено также много других функционально полных систем в k-значной логике. Например, полную систему образуют дизъюнкция и циклическое отрицание *(система Поста)*. Система, состоящая из единственной функции x_1/x_2 *(система Вебба)*, также является полной.

Для доказательства полноты системы Поста достаточно выразить константы, характеристические функции и конъюнкцию через дизъюнкцию и циклическое отрицание. Так как $\bigvee_{i=0}^{k-1}(x+i)=k-1$ (здесь и далее сложение по модулю k), то все константы можно получить с помощью функции циклического отрицания и дизъюнкции. Можно также показать, что $\varphi_i(x)=\bigvee_s(x+s)+1$, где $0\leqslant s\leqslant k-1$ и $s\neq k-1-i$. Действительно, если $x=i$, то $i+s\neq k-1$ и $\max(x+s)=k-2$, т. е. $\varphi_i(x)=k-1$. При $x\neq i$ имеем $s=k-1-x$ и $\max(x+s)=k-1$, т. е. $\varphi_i(x)=0$. Конъюнкция выражается через дизъюнкцию и инверсию $x_1\wedge x_2=\overline{\overline{x_1}\vee\overline{x_2}}$. В свою очередь, $\overline{x}=\bigvee_{i=0}^{k-1}e_{i,\,k-1-i}(x)$ и $e_{ij}(x)=[\varphi_i(x)\vee(k-1-j)]+j+1$, в чем можно убедиться, полагая $x=i$ и $x\neq i$. Приведенная цепочка зависимостей и служит доказательством полноты системы Поста.

Циклическое отрицание и дизъюнкция выражаются через функцию Шеффера—Вебба следующим образом: $x+1=x\vee x+1=x/x$ и $x_1\vee x_2=(x_1\vee x_2+1)+(k-1)=x_1/x_2+(k-1)$. Поэтому из полноты системы Поста следует и полнота системы Вебба.

6. Полиномиальные представления. Подобно каноническим многочленам в алгебре Жегалкина (2. 6), рассматривается вопрос о полиномиальных представлениях и в k-значной логике. При решении этого вопроса будем исходить из возможности выражения любой функции в так называемой Σ—Π *(сигма-пи) форме*:

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum f(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)\,e_{\alpha_1 1}(x_1)\ldots e_{\alpha_n 1}(x_n),$$

где суммирование ведется по всем наборам значений переменных и используются операции сложения и умножения по модулю k. Действительно, поскольку $e_{\alpha_i 1}(x_i)=1$ при $x_i=\alpha_i$ и $e_{\alpha_i 1}(x_i)=0$ при $x_i\neq\alpha_i$, то произведение $e_{\alpha_1 1}(x)\cdots e_{\alpha_n 1}(x)$ отлично от нуля только на наборе $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ и равно 1. Поэтому на каждом наборе единственный ненулевой член суммы всегда равен $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, т. е. значению функции на данном наборе. Теперь необходимо найти полиноминальные представления функций $e_{\alpha_i 1}(x_i)$.

В соответствии с известной *теоремой Ферма* $x^k=x(\mathrm{mod}\,k)$. Если k — простое число, то множество классов вычетов по модулю

k образует поле (2.8.7) и при $x \neq 0$ обе части этого выражения можно разделить на x. Тогда $x^{k-1} = 1(\mathrm{mod}\,k)$, что после умножения на $k-1$ и прибавления 1 дает $1 + (k-1)x^{k-1} = 0(\mathrm{mod}\,k)$. Полученное выражение справедливо при $x \neq 0$, а при $x = 0$ его левая часть равна 1, т. е. для всех значений $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ совпадает с функцией $e_{01}(x)$. Обобщая этот результат, можно записать

$$e_{\alpha_i 1}(x_i) = 1 + (k-1)(x_i - \alpha_i)^{k-1},\ \alpha_i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Подставляя эти значения в $\Sigma - \Pi$ форму и произведя умножения по модулю k, получаем искомый многочлен, представляющий данную функцию. Все коэффициенты этого многочлена выражаются целыми числами, заключенными между 1 и $k-1$, а степени входящих в него переменных не превышают $k-1$. Рассмотрим, например, трехзначную функцию двух переменных:

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$f(x_1, x_2)$	2	0	0	1	2	0	0	1	0

Представляем функцию в $\Sigma - \Pi$ форме: $f(x_1, x_2) = 2(1 + 2x_1^2) \times (1 + 2x_2^2) + [1 + 2(x_1 - 1)^2](1 + 2x_2^2) + 2[1 + 2(x_1 - 1)^2][1 + 2(x_2 - 1)^2] + [1 + 2(x_1 - 2)^2][1 + 2(x_2 - 1)^2]$, откуда после выполнения арифметических операций по модулю 3 получаем $f(x_1, x_2) = 2 - x_1 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1x_2^2$.

Из изложенного ясно, что система функций k-значной логики, состоящая из операций суммы и произведения по модулю k и констант, является полной, если k — простое число. В случае составного k эта система не полна, что ограничивает область ее применения.

7. Минимизация многозначных функций. Процесс минимизации многозначных функций зависит от выбранной полной системы функций и значительно сложнее, чем в двузначной логике. Для этой цели можно использовать тождественные преобразования логических формул, стремясь получить выражение, содержащее по возможности наименьшее число входящих в него характеристических функций и аргументов. Развиты также общие методы приведения канонических форм представления функций к минимальным формам.

Рассмотрим, например, систему Россера—Тьюкетта. Тождественные преобразования в этой системе основаны на соотношениях (для упрощения знак конъюнкции заменим точкой): $x \vee x = x \cdot x = x$ (*идемпотентность*); $x \vee 0 = x$; $x \vee (k-1) = k-1$; $x \cdot 0 = 0$; $x(k-1) = x$ (*свойства констант*); $\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) = 0$ при $i \neq j$; $\varphi_0(x) \vee \varphi_1(x) \vee \cdots \vee \varphi_{k-1}(x) = k-1$; $1 \cdot \varphi_1(x) \vee 2 \cdot \varphi_2(x) \vee \cdots \vee (k-1)\varphi_{k-1}(x) = x$ (*свойства характеристических функций*).

С помощью этих тождеств можно упрощать выражения многозначных функций, а также приводить их к совершенной нормальной форме. Пусть, например, трехзначная функция двух переменных задана в виде: $f(x_1, x_2) = 1 \cdot \varphi_0(x_1) \vee 1 \cdot \varphi_1(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_2(x_2) \vee \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$. Беря конъюнкцию членов этого выражения с $\varphi_0(x) \vee \varphi_1(x) \vee \varphi_2(x)$ и замещая x той переменной, которая отсутствует в данном члене, получаем $f(x_1, x_2) = 1 \cdot \varphi_0(x_1) \cdot [\varphi_0(x_2) \vee \varphi_1(x_2) \vee \varphi_2(x_2)] \vee 1 \cdot \varphi_1(x_2) \wedge \wedge [\varphi_0(x_1) \vee \varphi_1(x_1) \vee \varphi_2(x_1)] \vee 1 \cdot \varphi_2(x_2) \cdot [\varphi_0(x_1) \vee \varphi_1(x_1) \vee \varphi_2(x_1)] \vee \varphi_2(x_1) \wedge \wedge \varphi_2(x_2)$, что после упрощения преобразуется к совершенной дизъюнктивной нормальной форме: $f(x_1, x_2) = 1 \cdot \varphi_0(x_1) \cdot \varphi_0(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_0(x_1) \wedge \wedge \varphi_1(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_0(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_1(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \vee 1 \wedge \wedge \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_1(x_2) \vee \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$.

Упростим полученное выражение. Воспользовавшись свойствами характеристических функций, имеем: $f(x_1, x_2) = 1 \cdot \varphi_0(x_1) \cdot [\varphi_0(x_2) \vee \vee \varphi_1(x_2) \vee \varphi_2(x_2)] \vee 1 \cdot \varphi_1(x_2) \cdot [\varphi_0(x_1) \vee \varphi_1(x_1) \vee \varphi_2(x_1)] \vee \varphi_2(x_2) \cdot [1 \wedge \wedge \varphi_1(x_1) \vee \varphi_2(x_1)] = 1 \cdot \varphi_0(x_1) \vee 1 \cdot \varphi_1(x_2) \vee x_1 \cdot \varphi_2(x_2)$. Это выражение проще исходного, но нет уверенности, что оно представляет минимальную форму (на самом деле оно не является минимальным).

Получение минимальной формы основано на выделении простых импликант, образующих сокращенную форму и минимизации последней с помощью методов, аналогичных развитым в двузначной логике. Однако сложность этих методов сильно возрастает с увеличением как величины k, так и числа аргументов функции.

8. Сведение к двузначным функциям. Сложность минимизации в многозначной логике заставляет искать такие представления k-значных функций, которые обслуживались бы хорошо разработанным аппаратом двузначной логики. Для этого элементы множества значений k-значной логики объединяются попарно в пересекающиеся подмножества. В соответствии с одним из способов общим элементом всех подмножеств принимается 0, а остальные элементы $1, 2, \ldots, k-1$ области значений k-значной логики входят по одному в каждое подмножество. В результате получаем $k-1$ двухэлементных множеств $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, ..., $\{0, k-1\}$.

Для представления k-значных функций можно использовать характеристические функции $e_{ij}(x)$ при фиксированных $j = 1, 2, \ldots, k-1$, т. е. $k-1$ функций вида:

$$e_{i1}(x) = \begin{cases} 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i; \end{cases} \quad e_{i2}(x) = \begin{cases} 2, & x = i; \\ 0, & x \neq i; \end{cases} \quad \cdots \quad e_{i,\,k-1} = \begin{cases} k-1, & x = i; \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

По существу эти функции являются неоднородными двузначными функциями, так как они принимают значения из двухэлементных множеств, а их областью определения служит множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Характеристическая конъюнкция, соответствующая некоторому набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на котором функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ прини-

мает значение j, имеет вид $e_{\alpha_1 j}(x_1) \cdot e_{\alpha_2 j}(x_2) \dots e_{\alpha_n j}(x_n)$ и играет роль конституенты j. Очевидно, любая k-значная функция может быть представлена в дизъюнктивной нормальной форме

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{k-1} F_j,$$

где F_j — дизъюнкция всех конституент j данной функции. Каждая дизъюнкция F_j представляет функцию на тех наборах, на которых она принимает значение j и отличается от совершенной дизъюнктивной нормальной формы двузначной логики только тем, что вместо аргументов и их отрицаний в элементарные конъюнкции входят характеристические функции.

Минимальная форма для k-значной функции совпадает с дизъюнкцией минимальных форм двузначных логических функций F_j, принимающих значения на двухэлементных множествах.

В качестве примера запишем в рассмотренной форме функцию, таблица которой приведена в (4): $f(x_1, x_2) = [e_{11}(x_1)\ e_{01}(x_2) \vee e_{21}(x_1) \cdot e_{12}(x_2)] \vee [e_{02}(x_1) \cdot e_{02}(x_2) \vee e_{12}(x_1) \cdot e_{32}(x_2) \vee e_{22}(x_1) \cdot e_{12}(x_2)] \vee [e_{03}(x_1) \cdot e_{23}(x_2) \vee e_{13}(x_1) \cdot e_{13}(x_2) \vee e_{23}(x_1) \cdot e_{03}(x_2) \vee e_{33}(x_1) \cdot e_{03}(x_2) \vee e_{33}(x_1) \cdot e_{33}(x_2)]$.

9. Многозначные элементы. Многозначные функции можно реализовать логическими схемами с двузначными элементами путем кодирования в двоичном структурном алфавите. Для непосредственной реализации многозначной функции требуются элементы с многими устойчивыми состояниями.

По аналогии с потенциальными двоичными элементами естественно представить многозначные элементы в виде некоторых схем, состояния которых различаются уровнями электрического напряжения или тока. Однако такие схемы были реализованы только для трех состояний, так как при увеличении числа уровней снижается их надежность. Более перспективными являются динамические многозначные элементы, признаками состояний которых служат параметры (амплитуда, частота, фаза) периодической последовательности импульсов *(импульсные элементы)* или гармонических колебаний *(гармонические элементы)*.

Наибольшее распространение получили *фазоимпульсные многозначные элементы* (ФИМЭ). Общая блок-схема таких элементов показана на рис. 247, *а*, а иллюстрирующие его работу временные диаграммы для $k = 5$ — на рис. 247, *б*. Синхронизирующие импульсы *(СИ)* с периодом τ поступают на вход формирователя *(Ф)* и дискретно изменяют уровень накопителя *(УН)*. Накопитель *(Н)* можно выполнить на электрических конденсаторах, магнитных элементах, криотронах и, вообще, любых элементах, способных накапливать энергию. При достижении уровня компарации *(УК)*

компаратор (*К*) по цепи сброса приводит накопитель в первоначальное состояние и одновременно выдает импульс. В результате на динамическом выходе (*ДВ*) появляется периодическая последовательность импульсов с периодом $T = k\tau$, где k — число устойчивых состояний.

Один из таких элементов вырабатывает опорную последовательность импульсов $И_0$, которая отождествляется с состоянием 0. На все другие элементы данной системы также подаются синхронизирующие импульсы. Перевод элемента в следующее состояние осуществляется подачей импульса на вход пересчетного управления (*ПУ*), причем формирователь обеспечивает сдвиг этого импульса так, чтобы он занимал промежуточное положение между соседними синхронизирующими импульсами. Тогда накопитель достигает уровня компарации быстрее на время τ, в результате чего выходная последовательность $И_1$ сдвигается относительно опорной $И_0$ на один такт *СИ*. Воздействие каждого из последующих импульсов, подаваемых на вход *ПУ*, аналогично. В результате на *ДВ* элемента появляются последовательности $И_2$, $И_3$, $И_4$. Пятый импульс переводит элемент в исходное состояние, и процесс периодически повторяется.

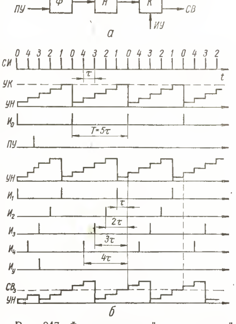


Рис. 247. Фазоимпульсный многозначный элемент:

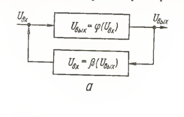
а — общая блок-схема; *б* — временные диаграммы (при $k = 5$).

Последовательность импульсов $И_i$, сдвинутая по фазе относительно опорной последовательности на время $i\tau$, является динамическим признаком i-го состояния ($i = 0, 1, \ldots, k - 1$). Статическими признаками состояний служат уровни на выходе *СВ* в моменты времени, определяемые опорной последовательностью $И_0$ (состоянию 0 соответствует высокий уровень, а состоянию $k - 1$ — наиболее низкий).

Для перевода элемента в любое состояние к информационному входу (*ИУ*) кратковременно прилагается последовательность

импульсов, соответствующих данному состоянию, или одиночный импульс этой последовательности. Управляющий импульс $И_у$ вызывает срабатывание цепи сброса и переводит накопитель в начальное состояние, благодаря чему происходит соответствующий сдвиг фазы выходной последовательности импульсов.

Фазоимпульсные многозначные элементы нашли практическое применение в цифровой измерительной технике и автоматике. На их основе разработан и серийно выпускается отечественной промышленностью ряд приборов (счетчики, частотомеры и т. п.). Разработаны также методы использования таких элементов в вычислительной технике.



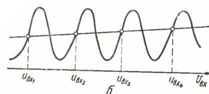


Рис. 248. Многозначный элемент на основе нелинейного звена с характеристикой гребенчатого типа:

а — общая блок-схема; *б* — амплитудная характеристика.

Другой перспективный способ реализации многозначных элементов основан на использовании нелинейного звена с характеристикой $U_{вых} = \varphi(U_{вх})$ гребенчатого типа, охваченного обратной связью $U_{вх} = \beta U_{вых}$ (рис. 248, *а*). Устойчивым состояниям соответствуют отмеченные на рис. 248, *б* пересечения характеристик, каждое из которых характеризуется соответствующим ему напряжением $U_{вх}$. Нелинейный четырехполюсник образуется цепочкой преобразований $U_{вых} = \varphi_1(X_1)$; $X_1 = \varphi_2(X_2)$; ...; $X_{n-1} = \varphi_n(U_{вх})$, где $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ — величины различной физической природы. Для получения гребенчатой характеристики $U_{вых} = \varphi(U_{вх})$ достаточно, чтобы хотя бы одно из преобразований обладало такой характеристикой. Например, при использовании преобразований $U_{вых} = \varphi_1(\omega)$ (гребенчатый фильтр) и $\omega = \varphi_2(U_{вх})$ (электрически управляемый генератор) получим требуемую гребенчатую характеристику. При этом состояния построенного на ее основе многозначного элемента характеризуются частотой ω гармонических колебаний (*частотно-гармонический элемент*). По аналогичному принципу разработаны также *широтно-импульсные элементы*, признаками состояний которых служат дискретные длительности периодической последовательности импульсов.

Важная особенность изложенных принципов реализации многозначных элементов состоит в том, что число их состояний слабо влияет на сложность схемы. Кроме того, наличие динамического и статического признаков состояний открывает дополнительные возможности при проектировании конкретных устройств.

10. Другие логики. Новые технические идеи реализации логических функций, моделирование нервной деятельности живых организмов, исследование реальных явлений и ситуаций привели к разработке специальных разделов математической логики.

Пороговая логика. С помощью различных технических средств (магнитные элементы, транзисторно-резистивные схемы, туннельные диоды, параметроны и т. д.) можно построить устройства с n двоичными входами $x_1, \ldots, x_n$ и одним выходом y, функционирование которых описывается соотношениями:

$$y = 1 \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \geqslant \eta; \quad y = 0 \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i < \eta,$$

Рис. 249. Пороговый элемент.

Рис. 250. Формальный нейрон.

где *вес i-го входа* ξ_i и *порог* η выражаются конечными вещественными числами. Такие устройства, условное обозначение которых показано на рис. 249, называют *пороговыми элементами*.

Произвольному набору весов ξ_i и порога η, как и любому пороговому элементу, всегда можно сопоставить некоторую логическую функцию, называемую *пороговой функцией*. Однако не всякая логическая функция может быть реализована одним пороговым элементом. Поэтому первой задачей пороговой логики является выделение множества пороговых функций и определение структуры порогового элемента, реализующего пороговую функцию *(синтез порогового элемента)*. Если такая реализация невозможна или нецелесообразна, то возникает вторая задача — *синтез схемы из пороговых элементов*.

Мажоритарная логика. В частном случае, когда пороговый элемент имеет нечетное число n входов с единичными весами ($\xi_i = 1$) и порогом $\eta = (n+1)/2$, он работает по принципу большинства и называется *мажоритарным элементом*. Действительно, $y = 1$, если взвешенная сумма больше $(n+1)/2$, т. е. когда больше половины общего числа входных переменных принимает значение 1, и $y = 0$ при условии, что большинство переменных принимает значение 0 (аналогичная ситуация имеет место при голосовании простым большинством). Показано, что любая логическая функция может быть реализована схемой, состоящей из мажоритарных

элементов. Синтез таких схем и является предметом мажоритарной логики.

Нейронная логика. В качестве модели, отражающей функционирование нервных клеток живых организмов, предложен *формальный нейрон* (рис. 250). Входы нейрона воздействуют на его *тело* посредством *волокон* двух типов: *возбуждающих* с весом 1 и *тормозящих* с весом —1. Место контакта волокна с телом нейрона называют *синапсом* (синапсы возбуждающих волокон обозначаются жирными точками). Выход располагается непосредственно на теле нейрона. Кроме того, допускаются *запрещающие волокна*, оканчивающиеся на запрещаемом волокне, по которому предотвращается поступление сигнала при возбужденном запрещающем входе (на рис. 250 запрет воздействует на волокно входа x_3 при $x_1 = 1$). Как и пороговый элемент, нейрон характеризуется порогом η, причем он возбуждается ($y = 1$), если весовая функция, соответствующая данному набору значений входных переменных, не меньше порога η. Так, изображенный на рис. 250 нейрон будет возбужден на наборах (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0) и (1, 1, 1).

В отличие от пороговых элементов, на одном формальном нейроне можно реализовать *любую логическую функцию.* Для синтеза нейронов и нейронных схем успешно используются диаграммы Венна (2. 1. 8) и различные их модификации. При этом стремятся получать схемы, в которых общее число волокон минимально (в этом смысле реализация нейронной схемой может оказаться предпочтительнее одного нейрона). В последние годы формальный нейрон приобретает черты универсальной модели в кибернетике и некоторых отраслях техники. В более полной модели абстрактного нейрона вводятся временные соотношения: прохождение сигналов через синапсы происходит с задержкой на временной такт, а значение порога является функцией дискретного времени.

Логика потенциально-импульсных схем. В потенциально-импульсных схемах двоичные переменные представляются сигналами двух типов: уровнями электрических напряжений (потенциалов) и импульсами. Например, для входных переменных положительный потенциал соответствует 1, а отрицательный — 0, а для выходных переменных наличие импульса соответствует 1, а его отсутствие — 0, причем выходные импульсы могут появляться только при изменении значений входных переменных (рис. 251).

Для представления потенциально-импульсных функций вводится оператор dx_i, при изменении значения x_i с 1 на 0 и $d\bar{x}_i$ при изменении значения x_i с 0 на 1. Роль конституент единицы в дизъюнктивной нормальной форме играют конъюнкции $\tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_{i-1}\tilde{x}_{i+1} \ldots \tilde{x}_n d\tilde{x}_i$, где x_i — входная переменная, при изменении которой выходная переменная принимает значение 1.Так, для приведенной на рис. 251 выходной функции $y = x_1\bar{x}_3 d\bar{x}_2 \vee x_1 x_3 dx_2 \vee x_1\bar{x}_2 dx_3 \vee$

$\vee\ x_2\bar{x}_3dx_1$. Такое представление положено в основу методов анализа и синтеза потенциально-импульсных схем.

Фазоимпульсная логика. При фазоимпульсном кодировании двоичных переменных их значения различаются сдвинутыми по времени импульсами. Синхронизация осуществляется двумя последовательностями импульсов t_0 и t_1, играющими роль констант 0 и 1 (рис. 252, *а*). Фазоимпульсное представление логической функции можно получить на основании таблицы соответствия как дизъюнкцию двух выражений. Первое из них является дизъюнкцией всех конституент нуля, умноженной на t_0, а второе — дизъюнкцией всех конституент единицы, умноженной на t_1. Минимизируя

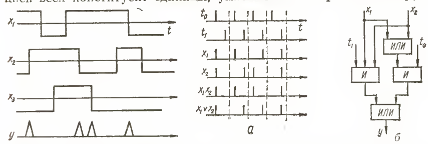


Рис. 251. Временные диаграммы входов x_1, x_2, x_3 и выхода y потенциально-импульсной схемы.

Рис. 252. Фазоимпульсное кодирование: *а* — временные диаграммы; *б* — логическая схема для конъюнкции x_1x_2.

каждое из этих выражений и используя обычные методы синтеза логических схем, получаем схему, реализующую данную функцию. Например, для конъюнкции двух переменных имеем: $x_1x_2 = (x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2)t_0 \vee x_1x_2t_1 = (x_1 \vee x_2)t_0 \vee x_1x_2t_1$. Соответствующая схема показана на рис. 252, *б*. Аналогичная методика может быть использована и для многозначных функций. Усложнение схем при фазоимпульсном кодировании компенсируется их большей надежностью и помехозащищенностью. Разумеется, схемы можно существенно упростить при использовании специальных элементов, приспособленных для фазоимпульсной логики (например, многозначных фазоимпульсных элементов).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите совершенные нормальные формы (дизъюнктивную и конъюнктивную) трехзначной функции трех переменных, заданную следующей таблицей соответствия:

x_1	000	000	000	111	111	111	222	222	222
x_2	000	111	222	000	111	222	000	111	222
x_3	012	012	012	012	012	012	012	012	012
y	100	012	200	000	123	001	002	300	210

2. Определите значения пятизначной функции трех переменных

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3 \wedge \varphi_2(x_1) \wedge \varphi_4(x_2) \wedge \varphi_0(x_3)) \vee (1 \wedge \varphi_3(x_1) \wedge \varphi_1(x_2) \wedge \varphi_2(x_3)) \vee$$
$$\vee (\varphi_0(x_1) \wedge \varphi_0(x_2) \wedge \varphi_3(x_3)) \vee (1 \wedge \varphi_4(x_1) \wedge \varphi_2(x_2) \wedge \varphi_4(x_3)) \vee$$
$$\vee (2 \wedge \varphi_1(x_1) \wedge \varphi_2(x_2) \wedge \varphi_0(x_3))$$

на наборах: (2, 0, 4), (3, 1, 2), (0, 0, 3), (4, 4, 2). Сколько членов будет содержать конъюнктивная нормальная форма данной функции? Запишите первые десять членов ее.

3. Покажите, что система Поста является базисом в многозначной логике.

4. Докажите, что система, состоящая из одной многозначной функции $x_1/x_2 = x_1 \vee x_2 + 1$ (система Вебба), является полной.

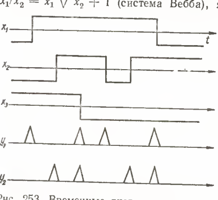


Рис. 253. Временные диаграммы потенциально-импульсной схемы к задаче 10.

5. С какой полной системой функций многозначной логики связано представление функций в совершенных нормальных формах? В чем существенное отличие от двузначного случая?

6. Представьте полиномом (в $\Sigma - \Pi$ форме) трехзначную функцию из задачи 1. Существует ли такое представление для всех функций k-значной логики при $k = 4, 5, 6, 7$ (если нет, то почему?).

7. С какой полной системой k-значной логики (k—простое число) связано полиноминальное представление?

8. Путем тождественных преобразований упростите приведенные ниже трехзначные функции, а также преобразуйте их к совершенным нормальным формам:

а) $\varphi_1(x_1) \vee 1 \cdot \varphi_0(x_2) \vee 1 \quad \varphi_0(x_1)\, \varphi_2(x_2) \vee \varphi_0(x_2)$;

б) $1 \quad \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \vee \varphi_0(x_1)\, \varphi_1(x_2) \vee 1 \cdot \varphi_0(x_1)$.

9. Представьте функцию из предыдущей задачи через двузначные функции и найдите их минимальные формы.

10. Запишите выходные функции в стандартной форме для потенциально-импульсной схемы, входы и выходы которой представлены временными диаграммами на рис. 253.

11. Дайте фазоимпульсное представление для дизъюнкции двух переменных и постройте соответствующую логическую схему.

8. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Закон исключения третьего. Рассматривая высказывания как двоичные переменные (1. 5. 8), обычно считают, что они удовлетворяют *закону исключения третьего*: каждое высказывание может быть истинным или ложным (третьего не дано). При этом высказывание не может быть одновременно и истинным и ложным *(за-*

кон противоречия). Значения «истина» и «ложь», соответствующие 1 и 0 в двузначной логике, в логике высказываний обозначаются через «И» и «Л».

Истинность данного высказывания в повседневной жизни устанавливается на основе анализа его смысла. Например, высказывание «Киев — столица УССР» — истинно, а «100 < 10» — ложно. Однако даже в таких категоричных случаях их истинность относительна. Первое предложение перестает быть истинным, если речь идет о периоде, когда столицей УССР был Харьков. Второе предложение становится истинным, если считать, что число 100 записано в двоичной системе счисления, а 10 — в десятичной («8 < 10»).

Таким образом, высказывание может быть либо истинным, либо ложным в зависимости от обстоятельств, которыми руководствуются при его истолковании. Обычно эти обстоятельства не фигурируют явно в простом высказывании. Например, истинность таких высказываний, как «Хорошая погода», «Сегодня — 16 января», «Результат измерений диаметра цилиндра равен 52 мм» зависит соответственно от вкусов или критерия оценки погоды, сегодняшней даты, требуемой точности измерения. Логика высказываний отвлекается от конкретного смысла предложений, и ответственность за их истолкование возлагает на лиц, компетентных в соответствующей области. Она дает лишь общие методы анализа сложных высказываний и принципы логических рассуждений и доказательств.

Принятие закона исключения третьего позволяет полностью использовать в логике высказываний аппарат двузначной логики. Дальнейшее развитие логики высказываний основано на допущении нескольких значений истинности (например, кроме значений «истина» и «ложь» допускается третье значение — «неопределенность»). В подобных случаях используется аппарат многозначной логики. Если истинность предложений определяется с некоторой вероятностью, то логика высказываний превращается в вероятностную логику. В этой главе рассматривается только двузначная логика высказываний, причем для обозначения значения «истина» будем применять 1, а значения «ложь» — 0.

2. Сентенциональные связки. Так называют слова «не», «и», «или», «если..., то» и «если и только если», с помощью которых в обычном языке из простых предложений образуются сложные предложения. Как указывалось в (1. 5. 8) каждой из этих связок соответствует своя логическая операция: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция. Обычно высказывания обозначают прописными буквами, а для операций используются те же символы, что и в алгебре логики. Таблицы соответствия в логике высказываний называют *истинностными таблицами*. Для указанных пяти связок они имеют вид:

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
PQ	0	0	0	1
$P \vee Q$	0	1	1	1
$P \to Q$	1	1	0	1
$P \sim Q$	1	0	0	1

Сентенциональные связки в разговорном языке допускают различные варианты. Поэтому при записи сложного предложения в виде формулы алгебры логики важно выяснить характер логической связи между предложениями, не вдаваясь в смысл самих предложений.

Истолкование *отрицания* $\overline{P}$, *конъюнкции* PQ и *дизъюнкции* $P \vee Q$ обычно не вызывает трудностей. *Импликации* $P \to Q$ в обычной речи соответствует условное предложение «если P, то Q», причем P называется *посылкой (антецедентом)*, а Q — *следствием (консеквентом)*. Могут встретиться и другие выражения, имеющие тот же тип логической связи, например: «P влечет Q», «P только тогда, когда Q», «P есть достаточное условие для Q», «Q при условии, что P», «Q есть необходимое условие для P» и т. п. *Эквиваленция* $P \sim Q$ определяет логическую связь в так называемых *биусловных предложениях* типа «P, если и только если Q» или в других грамматических формах: «P тогда и только тогда, когда Q», «если P, то Q и обратно, если Q, то P», «Q есть необходимое и достаточное условие для P».

3. Формулы и подстановки. Всякое сложное предложение, которое состоит из простых предложений, связанных сентенциональными связками, можно представить в символической форме. В результате получаем *высказывательную формулу*. На каждом наборе значений истинности букв (переменных) формула принимает некоторое значение. Следовательно, всякую формулу логики высказываний можно рассматривать как *истинностную функцию*.

Рассмотрим, например, сложное высказывание: «*Если* применить стальные конструкции (P), *то* масса снижается (Q) *и* стоимость увеличивается (R). Стальные конструкции *не* применяются ($\overline{P}$), *а* масса снижается (Q)». Соответствующая формула $(P \to QR)\overline{P}Q$ представляется следующей таблицей истинности:

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
QR	0	0	0	1	0	0	0	1
$P \to QR$	1	1	1	1	0	0	0	1
$\overline{P}Q$	0	0	1	1	0	0	0	0
$(P \to QR)\overline{P}Q$	0	0	1	1	0	0	0	0

Отсюда видно, что сложное предложение истинно на двух наборах значений аргументов P, Q, R, а именно: (0, 1, 0) и (0, 1, 1), а на остальных наборах оно ложно.

В логике высказываний дается следующее определение формулы: 1) переменные высказывания суть формулы; 2) если A и B — формулы, то (AB), $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ и $\bar{A}$ также формулы. Это определение имеет *рекурсивный характер* в том смысле, что первая его часть определяет элементарные формулы, а вторая позволяет из любых формул образовать новые формулы. При записи формул используются обычные упрощения, указанные в (1.5.6). Пусть, например, требуется получить формулу $(A \rightarrow \overline{AB}) \rightarrow ((C \vee D) \rightarrow AB)$. Выбираем необходимое множество элементарных формул A, B, C, D. Затем последовательно получаем формулы $\overline{AB}$, $A \rightarrow \overline{AB}$, $(C \vee D) \rightarrow AB$, $(A \rightarrow \overline{AB})((C \vee D) \rightarrow AB)$. Как видно, процесс образования формулы происходит путем расширения их множества до тех пор, пока это множество не будет содержать требуемую формулу. Все формулы, построенные в указанном процессе, называются *частями результирующей формулы.*

Если имеется некоторая высказывательная формула, то можно построить соответствующее сложное предложение, заменяя буквы простыми предложениями (одинаковые вхождения букв замещаются одним и тем же предложением). Полученное таким путем предложение называется *подстановкой в данную формулу*. Так, полагая P — «идет снег», Q — «$2 \times 2 = 4$» и R — «слоны зеленые», по формуле $P \rightarrow QR$ получаем подстановку: «Если идет снег, то $2 \times 2 = 4$ и слоны зеленые». Истинность этого высказывания определяется только приведенной выше таблицей и никоим образом не связана с конкретным содержанием как простых предложений, так и полученного в результате их объединения сложного предложения. Как видно из таблицы, истинностная функция истинна на всех наборах значений аргументов, кроме наборов {1, 0, 0}, {1, 0, 1} и {1, 1, 0}. Например, при $P = 0$, $Q = 0$ и $R = 1$, получим истинное высказывание: «Если не идет снег, то $2 \times 2 \neq 4$ и слоны зеленые».

4. Сложные высказывания и «здравый смысл». При первом знакомстве с логикой высказываний трудно без чувства юмора принять подобные предложения. Наш опыт подсказывает, что подвергать сомнению истину «$2 \times 2 = 4$» так же нелепо, как и утверждать, что «слоны зеленые». Кроме того, между посылкой «идет снег» и ее следствием нет причинной связи. Поэтому с точки зрения «здравого смысла» такие высказывания кажутся несуразными и возможность их появления в логике высказываний следовало бы исключить.

Однако необходимо преодолеть психологический барьер и понять, что ограничения, основанные на «здравом смысле» и причинной

связи в логике высказываний не только невозможны, но и нежелательны. В (1) уже указывалось на относительность истинности или ложности того или иного высказывания. Если бы множество допустимых высказываний было подвергнуто испытанию «здравым смыслом», то возникли бы непреодолимые трудности из-за отсутствия строгого определения, что следует под этим понимать. Человеку, который никогда не видел снега и не слышал о нем, фраза «идет снег» покажется бессмысленной, а высказывание «слоны зеленые» может иметь вполне определенный смысл, если речь идет, например, о выборе цвета для игрушечных слонов. Аналогичные соображения можно привести и в пользу допущения логической связи между любыми предложениями без учета причинной зависимости между ними.

Поэтому логика высказываний, отвлекаясь от конкретного содержания высказываний, по существу занимается лишь анализом и синтезом высказывательных формул и изучением отношений между высказываниями. Что же касается «здравого смысла», то он должен проявляться при использовании законов логики высказываний в ее конкретных приложениях.

5. Тавтологии. Тождественно истинная фомула, т. е. такая формула, которая принимает значения 1 при любых значениях ее компонентов, называется *тавтологией*. Тождественно ложная формула на всех наборах ее компонентов принимает значение 0 и называется *противоречием*. Если в технических приложениях логические функции, выражаемые тавтологиями или противоречиями, практически не представляют интереса, то в логике высказываний они играют первостепенную роль.

Примером тавтологии может служить высказывание: «Если внедрить новую технологию (P), то качество продукции улучшится (Q). При улучшении качества продукции (Q), ее сбыт увеличивается (R). Новая технология внедрена (P). Следовательно, сбыт продукции увеличился (R)». Оно выражается формулой $(P \to Q)(Q \to R)P \to R$.

Чтобы выяснить, является ли данная формула тавтологией, можно составить для нее истинностную таблицу. Так, для приведенной выше формулы имеем:

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \to Q$	1	1	1	1	0	0	1	1
$Q \to R$	1	1	0	1	1	1	0	1
$(P \to Q)(Q \to R)P$	0	0	0	0	0	0	0	1
$(P \to Q)(Q \to R)P \to R$	1	1	1	1	1	1	1	1

Можно также воспользоваться зависимостями (1.7) $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$; $x_1 \sim x_2 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$ и преобразовать высказывательную формулу к нормальной форме. Если хотя бы один член дизъюнктивной нормальной формы окажется равным 1, то соответствующая ей формула является тавтологией. Если хотя бы один член конъюнктивной нормальной формы окажется равным 0, то соответствующая ей формула является противоречием. Так, для нашего примера имеем: $(P \to Q)(Q \to R)P \to R = (\bar{P} \vee Q)(\bar{Q} \vee R)P \to R = (\bar{P}\bar{Q} \vee \bar{P}R \vee QR)P \to R = PQR \to R = \overline{PQR} \vee R = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee \bar{R} \vee R = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee (\bar{R} \vee R) = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee 1 = 1$.

Очевидно, формула не является тавтологией, если она принимает значение 0 хотя бы на одном наборе значений переменных. Этим обстоятельством можно воспользоваться для распознавания тавтологий сокращенным методом «обратного рассуждения», заключающемся в поиске таких переменных, при которых формула оказывается ложной. Так, приведенная выше формула может принять значение 0, если и только если R ложно, а $(P \to Q)(Q \to R)P$ истинно. При этом должны быть истинны $P \to Q$, $Q \to R$ и P. При истинном P формула $P \to Q$ истинна только при истинном Q. В свою очередь, при истинном Q формула $Q \to R$ истинна только при истинном R. Таким образом, анализируемая формула может быть ложной, если и только если R одновременно и истинно и ложно, что невозможно в силу закона противоречия. Следовательно, она является тавтологией.

Для указания на то, что данная формула является тавтологией, используется знак $\models$, который помещается перед формулой, например: $\models (P \to Q)(Q \to R)P \to R$.

6. Законы логики высказываний. Различные подстановки в тавтологию, независимо от их конкретного содержания, всегда являются истинными предложениями в силу одной только своей логической структуры. Иначе говоря, тавтологии можно рассматривать как некоторые *логически истинные схемы* рассуждений или утверждений. Поэтому они играют роль *законов (теорем) логики высказываний*, претендующих на установление методов построения правильных умозаключений.

Существует бесконечное множество тавтологий, а значит, и законов логики высказываний. Наиболее часто используемые из них следующие: $P \to P$ (*закон тождества*), $P \vee \bar{P}$ (*закон исключения третьего*), $\overline{P\bar{P}}$ (*закон противоречия*), $\bar{\bar{P}} \sim P$ (*закон двойного отрицания*), $P \to (Q \to P)$ (*добавление антецедента* или *verum ex quodlibet* — истина из чего угодно), $\bar{P} \to (P \to Q)$ (*ex falso quodlibet* — из ложного что угодно), $(P \to Q)P \to Q$ (*закон отделения* или *modus*

ponens), $(P \to Q)\,\overline{Q} \to \overline{P}$ (*modus tollens*), $(P \to Q)(Q \to R) \to (P \to R)$ (*закон силлогизма*), $(P \to Q) \to (\overline{Q} \to \overline{P})$ (*закон контрапозиции*).

Каждый из законов логики высказываний отображает в символической форме некоторую схему доказательства. Например, в соответствии с законом отделения, если истинно, что некоторое высказывание P имплицирует высказывание Q и, кроме того, P истинно, то истинно и Q. Modus tollens применяется при доказательстве от противного: желая доказать утверждение P, предполагается, что $\overline{P}$ ложно, и показывается, что $\overline{P}$ имплицирует некоторое высказывание Q, о котором известно, что оно ложно ($\overline{Q}$ истинно). Отсюда заключается, что P истинно.

7. Равносильность. Две формулы называются *равносильными*, если на всех наборах значений входящих в них переменных эти формулы принимают одинаковые значения. Для обозначения этого отношения часто употребляют символ $\leftrightarrow$, так что равносильность формул A и B символически записывается как $A \leftrightarrow B$. Легко видеть, что равносильность — это отношение эквивалентности: оно рефлексивно ($A \leftrightarrow A$), симметрично (если $A \leftrightarrow B$, то $B \leftrightarrow A$) и транзитивно (из $A \leftrightarrow B$ и $B \leftrightarrow C$ следует, что $A \leftrightarrow C$). Поэтому равносильность называют также *логической эквивалентностью*.

Равносильность формул логики высказываний вытекает из тождественности соответствующих формул алгебры логики. Так, в соответствии с (I.5.4) и (I.5.5) получаем следующие равносильности: $\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$; $A \vee A \leftrightarrow A$; $AA \leftrightarrow A$; $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$; $AB \leftrightarrow BA$; $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$; $A(BC) \leftrightarrow (AB)C$; $A(B \vee C) \leftrightarrow AB \vee AC$; $A \vee BC \leftrightarrow (A \vee B)(A \vee C)$; $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$; $A \vee AB \leftrightarrow A$; $A(A \vee B) \leftrightarrow A$; $A \vee \overline{A}B \leftrightarrow A \vee B$ и т. д. Кроме того, с помощью отношения равносильности выражаются различные связки между формулами: $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$; $A \sim B \leftrightarrow AB \vee \overline{A}\,\overline{B} \leftrightarrow (A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B)$; $A \vee B \leftrightarrow \overline{A} \to B$; $AB \leftrightarrow \overline{A \to \overline{B}}$; $A \sim B \leftrightarrow (A \to B)(B \to A)$.

Эти и подобные им равносильные соотношения можно использовать для преобразования и упрощения структуры сложного высказывания. Так, для примера из (3) имеем: $(P \to QR)\,\overline{P}Q \leftrightarrow (\overline{P} \vee QR)\,\overline{P}Q \leftrightarrow \overline{P}Q \vee \overline{P}QR \leftrightarrow \overline{P}Q$.

Между отношением равносильности и эквиваленцией формул существует следующая связь: если A и B — равносильны, то $A \sim B$ — тавтология, и обратно, если $A \sim B$ — тавтология, то A и B — равносильны. Это сокращенно записывается так: $\models A \sim B$, если и только если $A \leftrightarrow B$. Справедливость этого утверждения следует непосредственно из определения равносильности и таблицы истинности для эквиваленции. Действительно, если $A \leftrightarrow B$, то A может принимать только то значение, что и B и, следовательно, их эквиваленция $A \sim B$ всегда истинна и является тавтологией. Если

$A \sim B$ —тавтология, то A и B могут иметь только одинаковые значения (0 или 1) и, следовательно, $A \leftrightarrow B$.

Из изложенного ясно, что тавтологии можно получить из равносильности заменой знака $\leftrightarrow$ на $\sim$. Так, из равносильности $A \vee AB \leftrightarrow A$ получаем тавтологию $\models (A \vee AB) \sim A$. Доказательство тавтологий, например $\models (A \to B)(A \to C) \sim (A \to BC)$ можно выполнить с помощью преобразований: $(A \to B)(A \to C) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B)(\overline{A} \vee C) \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{A}B \vee \vee \overline{A}C \vee BC \leftrightarrow \overline{A} \vee BC \leftrightarrow A \to BC$.

8. Логическое следствие. Говорят, что формула B является *логическим следствием* формулы A и пишут $A \Rightarrow B$, если B истинно на всех наборах значений переменных, для которых A истинно. Легко убедиться, что $A \Rightarrow B$, если и только если $\models A \to B$. Действительно, в соответствии с определением импликации $A \to B$ ложно только при истинном A и ложном B и, следовательно, если $A \to B$ — тавтология, то из истинности A всегда следует истинность B, т. е. $A \Rightarrow B$. Обратно, если $A \Rightarrow B$, то исключается случай, когда A истинно и B ложно, а значит $A \to B$ истинно на всех наборах значений переменных, т. е. $\models A \to B$.

Логическое следствие $A \Rightarrow B$ означает, что из истинности A следует истинность B, но если A ложно, то относительно B ничего утверждать нельзя. Это отношение обобщается на совокупность высказываний: B есть логическое следствие высказываний A_1, A_2, ..., A_m, если из истинности всех A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) следует истинность B. Из определения конъюнкции можно заключить, что это сводится к соотношению $A_1 A_2 \ldots A_m \Rightarrow B$, необходимым и достаточным условием которого является тавтология $\models A_1 \times \times A_2 \ldots A_m \to B$.

Пусть, например, даны высказывания $(A \to B)(C \to D)$, $BD \to \to E$, $\overline{E}$ и необходимо установить, является ли высказывание $\overline{A} \vee \overline{C}$ логическим следствием. Это сводится к доказательству тавтологии $\models ((A \to B)(C \to D))(BD \to E)\overline{E} \to (\overline{A} \vee \overline{C})$. Воспользовавшись методом «обратного рассуждения», положим, что следствие $\overline{A} \vee \overline{C}$ ложно (A и C истинны) при истинном значении всех посылок. Тогда, как следует из первой посылки, B и D должны быть истинны, а из истинности BD и второй посылки следует истинность E. Но это противоречит третьей посылке $\overline{E}$, что и доказывает данную тавтологию.

Между логическим следствием и логической эквивалентностью имеется связь, которая вытекает из соотношения $A \sim B \leftrightarrow (A \to B) \wedge \wedge (B \to A)$, приведенного в (7). Оно означает: $A \sim B$, если и только если $A \to B$ и $B \to A$. Пусть $A \sim B$ — тавтология, тогда $A \to B$ и $B \to A$ — также тавтологии, т. е. $\models A \sim B$, если и только если

$\models A \to B$ и $\models B \to A$. А это равносильно утверждению: $A \leftrightarrow B$, если и только если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

Логическое следствие есть отношение порядка; так, оно рефлексивно ($A \Rightarrow A$), транзитивно (если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$) и антисимметрично (из $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ следует $A \leftrightarrow B$).

9. Правила вывода. Формальная теория вывода ставит своей главной задачей образование из некоторой совокупности исходных тавтологий новых формул, которые также являются тавтологиями. Эта задача решается с помощью *правил вывода*:

1) если A — тавтология, то, заменяя в ней букву X всюду, где она входит, произвольной формулой B, получаем также тавтологию *(правило подстановки)*;

2) если A и $A \to B$ суть тавтологии, то B — также тавтология *(правило заключения)*.

Первое из этих правил почти очевидно, а второе непосредственно следует из закона *modus ponens* (6).

Формула называется *выводимой в исчислении высказываний*, если она может быть получена из конечной совокупности исходных формул путем конечного числа шагов применения правил вывода. Вообще говоря, не все тождественно истинные формулы могут быть выведены из произвольного множества тавтологий. В то же время строго доказано, что можно выбрать такую конечную совокупность исходных тавтологий *(аксиом исчисления высказываний)*, из которой выводимы все тождественно истинные формулы. Это важное положение решает проблему *полноты исчисления высказываний*.

Предложено много различных систем аксиом исчисления высказываний. Одна из них включает следующие тавтологии: 1) $A \to (B \to A)$; 2) $((A \to B) \to A) \to A$; 3) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$; 4) $AB \to A$; 5) $AB \to B$; 6) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to BC))$; 7) $A \to (A \vee B)$; 8) $B \to (A \vee B)$; 9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$; 10) $(A \sim B) \to (A \to B)$; 11) $(A \sim B) \to (B \to A)$; 12) $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \sim B))$; 13) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$; 14) $A \to \overline{\overline{A}}$; 15) $\overline{\overline{A}} \to A$.

Выведем, например, тавтологию $AB \to BA$. Подстановка в аксиому (6) вместо A формулы AB дает $\models (AB \to B) \to ((AB \to C) \to (AB \to BC))$, что после подстановки A вместо C приводится к $\models (AB \to B) \to ((AB \to A) \to (AB \to BA))$. Посылка в этой формуле есть аксиома (5), поэтому на основе правила заключения $\models (AB \to A) \to (AB \to BA)$. Так как посылка в полученной тавтологии является аксиомой (4), то, применяя еще раз правило заключения, получаем $\models AB \to BA$, что и требовалось доказать.

Формализация процесса вывода имеет большое теоретическое значение и позволяет построить схему доказательства, которая может быть реализована на вычислительных машинах. Однако сложность аксиоматического подхода к выводу тавтологий заставляет искать

и применять специальные правила, которые сокращают многократное применение основных правил вывода.

10. Дедуктивный метод. Более краткий и простой способ вывода основан на *теореме дедукции:* если формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, т. е. $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$, то $\models A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_m \to B) \ldots))$. При этом говорят, что формула B *выводима из формул* $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Дадим алгебраическое доказательство теоремы дедукции, рассматривая в соответствии с (8) логическое следствие $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$ как $A_1 A_2 \ldots A_m \Rightarrow B$. Преобразуем по формулам из (7) тавтологию $A_1 A_2 \ldots A_m \to B \leftrightarrow \overline{A_1 A_2 \ldots A_m} \vee B \leftrightarrow \overline{A}_1 \vee \overline{A}_2 \vee \cdots \vee \overline{A}_m \vee B \leftrightarrow \overline{A}_1 \vee \overline{A}_2 \vee \cdots (A_m \to B) \leftrightarrow (A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_m \to B) \ldots)))$. Так как исходная формула — тавтология, то полученная логически эквивалентная ей формула также является тавтологией, что и требовалось доказать.

Значение теоремы дедукции состоит в том, что логическое следствие B из совокупности посылок $A_1, A_2, \ldots, A_m$ представимо в виде тавтологий типа $\models A_1 A_2 \ldots A_p \to (A_{p+1} \to \ldots (A_m \to B) \ldots)$. Справедливо и обратное утверждение: если имеется тавтология, содержащая цепочку импликаций типа $(A_1 \to (A_2 \to \cdots (A_p \to (A_{p+1} \to \to \cdots (A_m \to B) \ldots))))$, то она может быть представлена эквивалентной формулой $\models A_1 A_2 \ldots A_p \to (A_{p+1} \to \cdots (A_m \to B) \ldots)$, которой соответствует соотношение $A_1 A_2 \ldots A_p \Rightarrow (A_{p+1} \to \ldots (A_m \to B) \ldots)$. Из теоремы дедукции и определения логического следствия вытекают следующие положения:

1) $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. любая из совокупности посылок является логическим следствием этой совокупности:

2) если $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n \Rightarrow B$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$.

С помощью этих правил можно представить доказательство того, что формула B есть логическое следствие формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в виде *цепочки формул*, последней из которых является B. Промежуточные формулы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ получаются на основании известных логических законов, аксиом и эквивалентностей. На основе теоремы дедукции используемые тавтологии и результирующее соотношение преобразуются к требуемой форме.

В качестве примера докажем, что $(A \vee B) \to C$, $C \to (D \vee E)$, $E \to F$, $\overline{D}\overline{F} \Rightarrow \overline{A}$. Из первой пары посылок на основе закона силлогизма получаем $(A \vee B) \to (D \vee E)$. Из последней посылки следует $\overline{D}$ и $\overline{F}$. Из посылки $E \to F$ и $\overline{F}$ выводим (modus tollens) $\overline{E}$. Из $\overline{D}$ и $\overline{E}$ получаем $\overline{D}\overline{E} \leftrightarrow \overline{D \vee E}$, что совместно с $(A \vee B) \to (D \vee E)$ в соответствии с modus tollens даст $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A}\overline{B}$, откуда выводим $\overline{A}$.

Наглядно этот процесс вывода изображается диаграммой, показанной на рис. 254.

Если в качестве логического следствия выводится конъюнкция некоторого высказывания и его отрицания $A \wedge \overline{A}$, то это свидетельствует о *противоречивости* посылок (из нее выводится произвольное высказывание, как истинное, так и ложное).

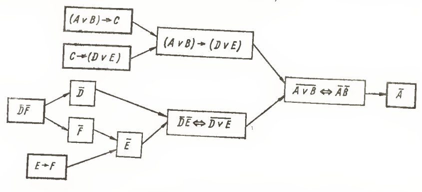


Рис. 254. Диаграмма вывода $\overline{A}$ из посылок $(A \vee B) \to C$, $C \to (D \vee E)$, $E \to F$, $\overline{D}\overline{F}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите законы логики высказываний (тавтологии), приведенные в (6).

2. Запишите формулами следующие высказывания:

а) если мощность двигателя увеличивается, то надежность повышается;

б) если мощность двигателя не увеличивается, то надежность не повышается или технические условия изменяются;

в) технические условия изменяются или мощность двигателя не увеличивается.

При решении задачи используйте следующие обозначения для элементарных высказываний: A — «мощность двигателя увеличивается», B — «надежность повышается», C — «технические условия изменяются».

3. Упростите систему высказываний из предыдущей задачи, для чего запишите конъюнкцию соответствующих им формул и преобразуйте полученную формулу к более простому виду. Покажите, что упрощенная система может быть представлена формулами $A \to B$ и $B \to C$. Сформулируйте соответствующие им высказывания.

4. Приняв высказывания $A \to B$ и $B \to C$ в качестве посылок, найдите логическое следствие и выразите его в словесной форме. Каким логическим законом можно воспользоваться для получения логического следствия в этом случае?

5. Докажите логическое следствие

$$(P \to Q)\,(R \to S)\,(SQ \to T)\,\overline{T} \Rightarrow \overline{P} \vee \overline{R}$$

а) через соответствующую тавтологию;

б) с помощью правил вывода;

в) дедуктивным способом.

6. Дано высказывание: «Для того чтобы матрица имела обратную, необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля». Какие из приведенных ниже высказываний логически следуют из данного?

а) Для того, чтобы матрица имела обратную, достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

б) Для того, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, достаточно, чтобы эта матрица имела обратную.

в) Для того, чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо, чтобы эта матрица не имела обратной.

г) Матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда определитель ее не равен нулю.

д) Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда эта матрица не имеет обратной.

При решении задачи представьте все высказывания формулами и воспользуйтесь каким-либо способом доказательства логического следования.

7. Докажите равносильность высказываний $X \to (X\overline{\bar{Y} \vee Z})$ и $\bar{X} \vee \bar{Y}\bar{Z}$. Представьте эту равносильность в виде логических следствий.

8. Упростите следующую систему высказываний: $\bar{A} \to (B \vee C)$; $B \to \overline{AC}$; $C \to (A \vee \bar{B})$; $A \to (B \vee C)$; $AC \to B$; $\bar{A}\bar{B} \to C$. Приняв для A, B, C некоторые высказывания, сформулируйте сложные высказывания исходной и упрощенной систем.

9. Покажите, что система высказываний $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$:

а) непротиворечива, если конъюнкция $X_1X_2 \ldots X_n$ истинна (принимает значение 1) хотя бы для одной комбинации значений, приписываемых простым высказываниям;

б) противоречива, если конъюнкция $X_1X_2 \ldots X_n$ ложна (имеет значения 0) для всех комбинаций значений, приписываемых простым высказываниям.

10. Покажите, что система высказываний $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ противоречива, если из нее можно вывести в качестве логического следствия противоречие, т. е. тождественно ложную формулу, которая всегда принимает значение 0 (например, $A \wedge \bar{A}$).

11. Исследуйте каждую из приведенных ниже систем высказываний на противоречивость:

а) $A \to \overline{BC}$; $(D \vee E) \to F$; $F \to \overline{G \vee H}$; $\bar{C}EF$;

б) $(A \vee B) \to CD$; $D \vee E \to F$; $A \vee \bar{F}$;

в) $(A \to B)(C \to D)$; $(B \to D)(\bar{C} \to A)$; $(E \to F)(F \to \bar{D})$; $\bar{E} \to E$;

г) $(A \to BC)(D \to BE)$; $(F \to \bar{A})G \to H$; $(G \to H) \to FD$; $\overline{\bar{C} \to E}$.

Задачу решите двумя способами: путем приписывания значений простым высказываниям (буквам) и с помощью логического вывода.

12. Запишите в символической форме и установите логичность следующих рассуждений:

а) Если заменить лампу (A), телевизор будет работать (B) при условии, что напряжение подключено (C). Лампа заменена, а напряжение не подключено. Следовательно, телевизор не будет работать.

б) Если поднять давление (A) или увеличить температуру (B), то реакция произойдет быстрее (C), но опасность повысится (D). Если опасность повысится, то необходимо принять меры защиты (E). Меры защиты не приняты. Следовательно, давление поднимать нельзя.

в) Если упростить схему (A), стоимость снизится (B), а если применить новые элементы (C), надежность увеличится (D). Можно или упростить схему, или применить новые элементы. Однако если упростить схему, то надежность не увеличивается, а если применить новые элементы, то стоимость не снизится. Итак, надежность увеличится тогда и только тогда, когда стоимость не снижается.

1. Высказывания и предикаты. В то время как логика высказываний проявляет интерес только к логической связи между предложениями, логика предикатов проникает и в структуру самих предложений в смысле связи того, о ком или о чем идет речь (*субъект*) с тем, что говорится о данном предмете (*предикат*). Поэтому язык логики предикатов лучше приспособлен для выражения логических связей между различными понятиями и утверждениями.

Как указывалось в (1.10), *n-местный предикат* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является неоднородной двузначной логической функцией. Аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляют собой объекты из множеств их определения $X_1, X_2, \dots, X_n$, т. е. $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ и называются *предметными переменными*. Конкретные значения аргументов называют *предметными постоянными*. Предметные переменные и предметные постоянные образуют класс логических понятий, называемых *термами*.

При замещении аргумента x_k (предметной переменной) некоторым его значением a (предметной постоянной) n-местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ превращается в $(n-1)$-местный предикат $P(x_1, \dots, x_{k-1}, a, x_{k+1}, \dots, x_n)$ и от переменной x_k он уже не зависит. Приписав значения всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ из соответствующих областей определения, мы получим высказывание, которое можно рассматривать как *0-местный предикат*.

Например, трехместный предикат $P(x_1, x_2, x_3)$ = «x_1 есть сумма x_2 и x_3» при подстановке $x_1 = 5$ переходит в двуместный предикат $P(5, x_2, x_3)$ = «5 есть сумма x_2 и x_3», а при дальнейшей подстановке $x_2 = 2$ — в одноместный предикат $P(5, 2, x_3)$ = «5 есть сумма 2 и x_3». Очевидно, при $x_3 = 3$ он становится истинным высказыванием, а при всех $x_3 \neq 3$ ложным высказыванием.

2. Кванторы. В логике предикатов большое значение имеют две операции, называемые *кванторами*, с помощью которых выражают отношения общности и существования. Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве M. Утверждение, что все $x \in M$ обладают свойством $P(x)$, записывают с помощью *квантора общности* $\forall x$ в виде $\forall x P(x)$, что читается «для всех x, P от x». Утверждение, что существует хотя бы один объект x из M, обладающий свойством $P(x)$, записывают с помощью *квантора существования* $\exists x$ в виде $\exists x P(x)$, что читается «существует такое x, что P от x».

Хотя в выражениях $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ и встречается буква x, но они не зависят от значений этой переменной. Кванторы $\forall x$ и $\exists x$ *связывают переменную* x, превращая одноместный предикат в высказывание. Очевидно, $\forall x P(x)$ истинно только при условии, что $P(x)$ тождественно истинный предикат, а во всех остальных случаях

это высказывание ложно. Высказывание $\exists xP(x)$ всегда истинно, кроме единственного случая, когда $P(x)$ — тождественно ложный предикат.

Рассмотрим, например, предикат $P(x)$ = «x — простое число», определенный на множестве натуральных чисел. Подставляя вместо x числа натурального ряда, получаем счетное множество высказываний. Некоторые из них, например $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ и т. д., являются истинными. Высказывание $\forall xP(x)$ — «все натуральные числа простые» — ложно, а $\exists xP(x)$ — «некоторые из натуральных чисел — простые» — истинно.

Между кванторами $\forall x$ и $\exists x$ имеют место соотношения, обобщающие законы де Моргана: $\overline{\forall xP(x)} = \exists x\overline{P(x)}$; $\overline{\exists xP(x)} = \forall x\overline{P(x)}$.

3. Связанные и свободные переменные. Применение квантора к n-местному предикату превращает его в $(n-1)$-местный предикат. Кванторы можно также применять к нескольким различным переменным (по одному квантору какого-либо типа к каждой переменной). Если к n-местному предикату применяется k кванторов, то он превращается в $(n-k)$-местный предикат, а при $n = k$ — в высказывание. Переменные, к которым применяются кванторы, называются *связанными*, а остальные переменные — *свободными*. Например, из двухместного предиката $P(x, y)$ с помощью кванторов получаем одноместные предикаты $\forall xP(x, y)$; $\exists xP(x, y)$; $\forall yP(x, y)$ и $\exists yP(x, y)$, а также высказывания $\forall x\forall yP(x, y)$; $\forall x\exists yP(x, y)$; $\exists x\exists yP(x, y)$ и т. п.

Порядок следования одноименных кванторов не имеет значения, но разноименные кванторы переставлять нельзя. Так, $\forall x\forall yP(x, y)$ эквивалентно $\forall y\forall xP(x, y)$, но высказывания $\forall x\exists yP(x, y)$ и $\exists y\forall xP(x, y)$, вообще говоря, различны. В этом можно убедиться на примере предиката $P(x, y)$ = «x делит y», который в первом случае превращается в высказывание «для всякого x существует такое y, что x делит y» (истинно), а во втором — «существует такое y, что любое x делит y» (ложно).

Квантор связывает переменную в области своего действия. Эта область обычно заключается в скобки, если она содержит не один предикат, а совокупность предикатов, связанных символами логических операций. Выражения, которые можно образовать применением к предикатам сентенциональных связок и кванторов, представляют собой *формулы логики предикатов*. Переменная *свободна в формуле*, если хотя бы на одно ее вхождение не распространяется действие квантора. Переменная *связана в формуле*, если она связана по меньшей мере одним квантором. Например, в формуле $\exists y\forall x(P(x, y) \to$ $\to \forall zQ(z))$ вхождение каждой из переменных связано, а в формуле $\forall x(P(x, y) \vee \exists yQ(y)) \vee R(x)$ переменная x одновременно и свободная и связанная.

4. Категорические высказывания. Перевод предложений с русского или какого-либо другого языка на символический язык логики предикатов вызывает определенные трудности из-за отсутствия механических правил. Он основан не столько на форме обычных предложений, сколько на выявлении их смысловой связи.

В традиционной логике большое внимание уделяется четырем типам *категорических высказываний*, которые обычно обозначаются заглавными латинскими буквами A, E, I, O:

A — *общеутвердительное высказывание* «Всякое S суть P»: $\forall x(S(x) \to P(x))$, что означает: «Для всех x, если x обладает свойством S, то x обладает и свойством P»;

E — *общеотрицательное высказывание* «Никакое S не есть P»: $\forall x(S(x) \to \overline{P(x)})$, что означает «Для всех x, если x обладает свойством S, то он не обладает свойством P»;

I — *частноутвердительное высказывание* «Некоторые S суть P»: $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, что означает «Существует такой объект x, обладающий свойством S, который также обладает свойством P»;

O — *частноотрицательное высказывание* «Некоторые S не суть P»: $\exists x(S(x) \wedge \overline{P(x)})$, что означает «Существует такой объект x, который обладает свойством S и не обладает свойством P».

Пусть, например, $S(x)$ = «x — селедка» (свойство «быть селедкой») и $P(x)$ = «x — рыба» (свойство «быть рыбой»). Тогда четырем типам категорических высказываний соответствуют следующие утверждения: A = «Всякая селедка — рыба»; E = «Никакая селедка не является рыбой»; I = «Некоторые селедки — рыбы»; O = = «Некоторые селедки не являются рыбами».

На основе правил преобразования высказываний (8.7) и зависимостей между кванторами (2) можно записать: $\forall x\,(S\,(x) \to P\,(x)) \leftrightarrow \overline{\exists} x\,\overline{(\overline{S\,(x)} \vee P\,(x))} \leftrightarrow \overline{\exists} x\,(S\,(x) \wedge \overline{P\,(x)})$. Аналогично преобразуются и другие типы высказываний, в результате чего получаем зависимости:

$$\forall x\,(S\,(x) \to P\,(x)) \leftrightarrow \overline{\exists} x\,(S\,(x) \wedge \overline{P\,(x)});$$
$$\forall x\,(S\,(x) \to \overline{P\,(x)}) \leftrightarrow \overline{\exists} x\,(S\,(x) \wedge P\,(x));$$
$$\overline{\forall} x\,(S\,(x) \to \overline{P\,(x)}) \leftrightarrow \exists x\,(S\,(x) \wedge P\,(x));$$
$$\overline{\forall} x\,(S\,(x) \to P\,(x)) \leftrightarrow \exists x\,(S\,(x) \wedge \overline{P\,(x)}).$$

Как видно из приведенных равносильностей, высказывания A и O, а также E и I являются отрицаниями друг от друга (если одно из них истинно, то другое ложно и обратно) и называются *противоположными*. Из коммутативности операции конъюнкции

следует, что суждения E и I допускают перестановку предикатов $S(x)$ и $P(x)$, т. е.

$$\overline{\exists} x\,(S(x)\wedge P(x)) \leftrightarrow \overline{\exists} x\,(P(x)\wedge S(x));$$
$$\exists x\,(S(x)\wedge P(x)) \leftrightarrow \exists x\,(P(x)\wedge S(x)).$$

5. Непосредственные заключения. Приняв одно из категорических высказываний в качестве посылки, а другое — в качестве следствия, можно построить так называемые *непосредственные заключения*. Истинность или ложность заключения зависит только от его формы или, как говорят, от его *модуса*.

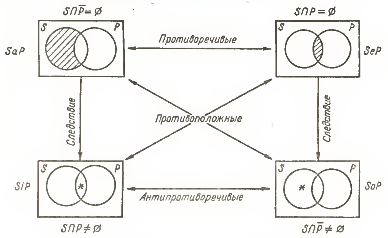


Рис. 255. Логический квадрат.

Обычно категорические высказывания сокращенно обозначают совокупностью трех букв SaP, SeP, SiP, SoP, где a, e, i, o указывают на тип высказывания (A, E, I, O); S и P — *термины*, означающие свойства (в таком порядке, в каком они входят в высказывание). Например, непосредственное заключение $\forall x\,(S(x)\rightarrow P(x))\rightarrow \exists x\,(P(x)\wedge S(x))$ в принятых обозначениях запишется как $SaP\rightarrow SiP$.

Простой анализ показывает, что SiP является логическим следствием SaP, а SoP — логическим следствием SeP. Высказывания SaP и SeP могут одновременно быть ложными, но не истинными и поэтому называются *противоречивыми*. Высказывания SiP и SoP могут быть одновременно истинными, но не ложными и поэтому называются *антипротиворечивыми*.

Традиционная схема отношений между категорическими высказываниями, называемая *логическим квадратом*, показана на рис. 255.

Там же приведены диаграммы Венна для каждого из четырех типов высказываний. Они непосредственно вытекают из правых частей выражений в (4) и теоретико-множественной интерпретации логических операций над предикатами (1. 10), причем заштрихованные области соответствуют пустым множествам, а отмеченные звездочкой (*) — непустым множествам. Так как $S \cap \overline{P} = \varnothing$, если и только если $S \subset P$, то высказывание SaP соответствует отношению включения множеств $S \subset P$. В случае высказывания SeP множества S и P являются непересекающимися, а в случае высказывания SiP множества S и P должны иметь непустую общую часть. Наконец, высказывание SoP в силу тождества $S \cap \overline{P} = S \setminus P$ соответствует дополнению S до P.

Поскольку каждый из четырех типов высказываний может быть как посылкой, так и следствием, то всего можно образовать $4 \cdot 4 = 16$ модусов непосредственных заключений с одинаковым положением терминов S и P в посылках и следствиях. Изменив порядок следования терминов в следствиях (SP на PS), получим еще 16 модусов. Итак, имеется всего 32 существенно различных модусов непосредственных заключений. Анализ (например, с помощью диаграмм Венна) показывает, что только 10 из них являются тавтологиями, т. е. *правильными модусами*. Кроме четырех модусов, в которых посылки и следствия являются одинаковыми высказываниями, и двух модусов, допускающих перестановку терминов ($SeP \Rightarrow PeS$, $SiP \Rightarrow PiS$), правильными являются модусы: $SaP \Rightarrow SiP$; $SeP \Rightarrow SoP$; $SaP \Rightarrow PiS$; $SeP \Rightarrow PoS$.

К таким выводам приходим, если, следуя традиционной формальной логике, считать, что термины S и P всегда соответствуют непустым множествам, т. е. предикаты $S(x)$ и $P(x)$ не могут быть тождественно ложными. Если же, например, $S(x)$ — тождественно ложно ($S = \varnothing$), то высказывания SaP и SeP всегда истинны, а SiP и SoP — ложные (это хорошо видно из рис. 255). Тем самым нарушается правильность ряда модусов традиционной логики.

Пусть, например, $S(x)$ = «x — летающие черепахи», а $P(x)$ означает «жить в зоопарке». Тогда категорические высказывания четырех типов суть следующие: SaP = «Все летающие черепахи живут в зоопарке», SeP = «Никакие летающие черепахи не живут в зоопарке», SiP = «Некоторые летающие черепахи живут в зоопарке», SoP = «Некоторые летающие черепахи не живут в зоопарке». Первые два высказывания истинны, что ясно из их эквивалентного представления: SaP = «Не существует такого объекта x, который был бы летающей черепахой и не жил в зоопарке» и SeP = «Не существует такого объекта x, который был бы летающей черепахой и жил в зоопарке». Истинность этих высказываний следует уже из того, что действительно «не существует такого объекта, который был бы летающей черепахой», т. е. в силу тождественной

ложности предиката $S(x)$. По этой же причине ложными являются два других высказывания SiP и SoP.

Ясно, что при тождественно ложном $S(x)$ высказывание I не является следствием A и высказывание O не является следствием E, т. е. модусы $SaP \Rightarrow SiP$; $SeP \Rightarrow SoP$; $SaP \Rightarrow PiS$; $SeP \Rightarrow PoS$ перестают быть правильными. Теряют смысл и некоторые отношения между высказываниями, изображенные на логическом квадрате. Традиционная логика находит выход из этого положения, не допуская тождественно ложных предикатов, а значит, и пустых множеств. Но современная логика предикатов не может встать на такую точку зрения, которая сильно сузила бы область ее применения. О целесообразности допущения пустых множеств уже говорилось в (1. 2. 2). Рассматривая пустое множество как подмножество любого множества, мы не нарушаем теоретико-множественных соотношений для различных типов категорических высказываний (рис. 255).

6. Категорические силлогизмы. Так называют суждения типа $XY \to Z$, где X, Y и Z — категорические высказывания. Из истинности конъюнкции XY (она истинна только при истинных X и Y) на основании modus ponens можно выводить истинность высказывания Z. Если $\models XY \to Z$, то $XY \Rightarrow Z$ — *правильный силлогизм*.

Во всяком силлогизме X — *большая посылка*, содержащая термины M и P; Y — *малая посылка*, содержащая термины M и S, и Z — *заключение*, в котором S играет роль *подлежащего* и P — *сказуемого*. Таким образом, в силлогизме участвуют три термина, называемые: S — *малый термин*, M — *средний термин* и P — *большой термин*, причем некоторое суждение от S и P выводится из двух высказываний — посылок, в которых участвует средний термин M, отсутствующий в заключении. Например, $MaP \cdot SaM \to SaP$ означает: «Если все M суть P и все S суть M, то все S суть P», что принято записывать в виде:

$$\begin{array}{l} \text{Все } M \text{ суть } P \\ \underline{\text{Все } S \text{ суть } M} \\ \text{Все } S \text{ суть } P \end{array}$$

В зависимости от порядка следования терминов в посылках совокупность силлогизмов распадается на четыре группы, называемые *фигурами* силлогизмов:

$$\frac{\begin{array}{c}MP\\SM\end{array}}{SP};\quad \frac{\begin{array}{c}PM\\SM\end{array}}{SP};\quad \frac{\begin{array}{c}MP\\MS\end{array}}{SP};\quad \frac{\begin{array}{c}PM\\MS\end{array}}{SP}.$$

В данной фигуре каждое из высказываний может относиться к одному из четырех типов A, E, I, O, поэтому из нее можно

образовать $4^3 = 64$ модуса, а общее количество модусов для всех четырех фигур равно $64 \cdot 4 = 256$. Основная задача теории силлогизмов состоит в выделении множества правильных модусов, т. е. таких, которые при любых конкретных терминах позволяют из истинных посылок делать истинные заключения. Можно доказать, что из 256 модусов правильными являются только 15. Для наименования правильных модусов применяются слова, содержащие три из четырех букв *a*, *e*, *i*, *o*, которые указывают последовательно на типы высказываний посылок и заключения. Они выглядят (по фигурам) следующим образом:

	Barbara	Celarent	Darii	Ferio
1)	MaP	MeP	MaP	MeP
	SaM	SaM	SiM	SiM
	$\overline{SaP}$	$\overline{SeP}$	$\overline{SiP}$	$\overline{SoP}$
	Cezare	Camestres	Festino	Baroco
2)	PeM	PaM	PeM	PaM
	SaM	SeM	SiM	SoM
	$\overline{SeP}$	$\overline{SeP}$	$\overline{SoP}$	$\overline{SoP}$
	Datisi	Feriso	Disamis	Bocardo
3)	MaP	MeP	MiP	MoP
	MiS	MiS	MaS	MaS
	$\overline{SiP}$	$\overline{SoP}$	$\overline{SiP}$	$\overline{SoP}$
	Calemes	Fresison	Dimatis	
4)	PaM	PeM	PiM	
	MeS	MiS	MaS	
	$\overline{SeP}$	$\overline{SoP}$	$\overline{SiP}$	

Традиционная логика признавала правильными еще девять модусов, которые имеют место при условии, что терминам соответствуют непустые множества объектов. Правильность модусов доказывается на основе законов логики высказываний. Так, для модуса Celarent имеем: $\forall x\,(M(x) \to \overline{P(x)}) \quad \forall x\,(S(x) \to M(x)) \leftrightarrow \forall x\,((S(x) \to M(x)) \wedge \wedge\,(M(x) \to \overline{P(x)}))$. Согласно закону силлогизма $((A \to B)(B \to C)) \Rightarrow \Rightarrow (A \to C)$, если для всякого x выражение $(S(x) \to M(x))(M(x) \to \to \overline{P(x)})$ истинно, то истинно и выражение $S(x) \to \overline{P(x)}$. Таким образом, в сокращенной записи имеем $MeP \cdot SaM \Rightarrow SeP$, что и представляет собой силлогизм Celarent. Аналогично доказываются и другие правильные силлогизмы. Придавая терминам S, M, P конкретное содержание, из истинных посылок всегда будем получать истинные заключения. Например, в соответствии с модусом Festino имеем:

Никакие черепахи не летают
Некоторые животные летают
Некоторые животные — не черепахи

В то время как правильность модуса требует строгого доказательства, для установления неправильности какого-либо модуса достаточно привести опровергающий его контрпример. Так, модус $MaP \cdot MiS \to SaP$ опровергается ложным суждением:

Всякое четное число делится на 2
Некоторые четные числа — простые
Всякое простое число делится на 2

Правильный вывод из приведенных посылок «Некоторые простые числа делятся на 2» (множество таких простых чисел содержит единственный элемент 2) следует в соответствии с модусом Datisi.

7. Символизация языка. Современная логика предикатов располагает более общими и универсальными методами обоснования правильных выводов, чем традиционная формальная логика. Первым этапом построения какого-либо доказательства или теории является символизация исходных положений, подвергающихся логическому анализу или принимаемых в качестве аксиом данной теории. Этот процесс обычно сводится к переводу некоторых высказываний на символический язык логики предикатов. Приведем некоторые примеры.

Рассмотрим сложное высказывание, выраженное на обычном языке: «Некоторые студенты выполнили все задания. Ни один студент не выполнял графиков. Следовательно, ни одно задание не являлось графиком». В первом предложении участвуют одноместные предикаты — свойства $P(x)$ = «x — студент», $Q(y)$ = «y — задание» и двуместный предикат $R(x, y)$ = «x — выполнил y». Так как в нем говорится о «некоторых студентах», то соответствующая форма будет $\exists x(P(x) \wedge A(x))$, где $A(x)$ — сложное высказывание, характеризующее предикат $P(x)$, а именно: «выполнили все задания». Поскольку речь идет о «всех заданиях», то переменная y связывается квантором общности и высказывание $A(x)$ представляется формулой $\forall y(Q(y) \to R(x, y))$, которая дословно переводится «для всякого y, если y — задание, то x выполнили y», смысл которого соответствует фразе «выполнили все задания». Итак, символическая запись первого предложения имеет вид: $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to R(x, y)))$. Аналогично записывается и второе предложение $\forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \to \overline{R(x, y)}))$, где $S(y)$ = «y — график». Заключение «Ни одно задание не являлось графиком» представляет собой категорическое высказывание типа QeS. Таким образом, получаем окончательно: $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to R(x, y))) \wedge \forall x(P(x) \to \forall y(S(y) \to \overline{R(x, y)})) \to \forall x(Q(x) \to \overline{S(x)})$.

Рассмотрим примеры символической записи свойств и определений. Пусть $P(x, y)$ — бинарное отношение, определенное на некотором множестве M. Рассматривая его как двуместный предикат, записываем основные свойства отношений (2.2.9): $\forall x P(x, x)$ — рефлексивность, $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$ — симметричность, $\forall x \forall y \forall z \times \times (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$ — транзитивность, $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge \wedge P(y, x) \rightarrow (x = y))$ — антисимметричность и т. д. С помощью этих и подобных им выражений определяются любые типы бинарных отношений, обладающих некоторой совокупностью свойств. Так, отношение эквивалентности определяется как двуместный предикат, удовлетворяющий формуле: $\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \rightarrow P(y, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$.

Символический язык логики предикатов широко используется в современной научно-технической литературе. Поэтому необходимо научиться уверенно расшифровывать формулы, записанные на этом языке. Пусть, например, $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y)))$, где $P(x)$ = «x — простое число», $Q(x)$ = «x — четное число», $R(x, y)$ = «y делится на x». Это общеутвердительное высказывание, в котором $P(x)$ играет роль подлежащего, а $\exists y (Q(y) \wedge R(x, y))$ — сказуемого. В свою очередь, сказуемое является частноутвердительным высказыванием относительно переменной y (x — свободная переменная) и означает: «Существует такое четное число y, которое делится на x». Тогда исходная формула расшифровывается следующим образом: «Для всех x, если x — простое число, существует такое четное число y, которое делится на x» или проще: «Для всякого простого числа можно подыскать такое четное число, которое делится на это простое число».

8. Оценочная процедура. Истинное значение формулы в логике предикатов можно установить с помощью *оценочной процедуры*. Она сводится к определению значений входящих в данную формулу предикатов при замещении свободных переменных элементами из множества их определения. При этом последовательно используются общие свойства сентенциональных связок и кванторов. Исходными данными являются неоднородные функции, представляющие предикаты, и конкретные значения высказываний и свободных переменных, для которых требуется найти значение формулы.

Проиллюстрируем рассматриваемую процедуру на примере формулы $\forall x (P(x, y, z) \rightarrow \exists y Q(x, y)) \vee Q(x, y)\bar{S}$, где предикаты заданы на двухэлементном множестве $\{a, b\}$ таблицами соответствия:

$P(x, y, z)$

	y	a	a	b	b
	z	a	b	a	b
x	a	0	1	1	0
	b	0	1	0	1

$Q(x, y)$

	y	a	b
x	a	0	0
	b	0	1

.

Пусть $S = 0$; $x = b$; $y = a$; $z = a$. Подставляя эти значения в формулу, получаем $\forall x(P(x, a, a) \to \exists yQ(x, y)) \vee Q(b, a) \cdot 1$. Так как $Q(b, a) = 0$, то формула упрощается к виду $\forall x(P(x, a, a) \to \exists yQ(x, y))$. Это выражение представляет собой высказывание, для установления значения которого необходимо выяснить, является ли одноместный предикат в скобках истинным для всех значений x. Соответствующая таблица имеет вид:

x	$P(x, a, a)$	$\to$	$\exists y Q(x, y)$
a	0	1	0
b	0	1	1

Здесь значения $P(x, a, a)$ взяты из первого столбца таблицы для $P(x, y, z)$. Значения $\exists yQ(x, y)$ получены на основе таблицы для $Q(x, y)$. Так как первая ее строка содержит только нули, то $\exists yQ(x, y)$ при $x = a$ получает значение 0. Во второй строке имеется единица, откуда заключаем, что $\exists yQ(x, y)$ при $x = b$ имеет значение 1. Истинностные значения выражения $P(x, a, a) \to \exists yQ(x, y)$ помещены в таблице под знаком импликации (так часто поступают для сокращения места).

Как видим, это выражение тождественно истинно относительно переменной x, следовательно, $\forall x(P(x, a, a) \to \exists yQ(x, y))$ также истинно, т. е. исследуемая формула имеет значение 1. Аналогично можно определить истинностные значения формулы и при других значениях переменных x, y, z и высказывания S. Рассмотренная процедура трудоемка даже для сравнительно простых формул, особенно, если требуется найти истинностные значения на всевозможных наборах (при этом необходимо выполнить эту процедуру для всех функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y)$).

9. Общезначимость. Особый интерес представляют общезначимые формулы, которые истинны (принимают значения 1) при каждом приписывании значений входящих в них свободных переменных и предикатов. Если A — общезначимая формула, то она, как и тавтологии, обозначается $\models A$.

Для доказательства общезначимости формул используется аппарат логики высказываний, дополненный теоремами для выражений, содержащих кванторы. Приведем некоторые из них.

1) Пусть $Q(x)$ — формула, свободная для y; тогда: а) $\models \forall xQ(x) \to Q(y)$; б) $\models Q(y) \to \exists xQ(x)$;

2) Пусть R — формула, не содержащая свободных вхождений переменной x, и $Q(x)$ — какая-либо формула; тогда: а) если $\models R \to Q(x)$, то $\models R \to \forall xQ(x)$; б) если $\models Q(x) \to R$, то $\exists xQ(x) \to R$.

3) $\models Q(x)$, если и только если $\models \forall xQ(x)$ (следствие из теорем 1 и 2).

На основе этих теорем строятся правила вывода, которые, наряду с правилами исчисления высказываний (правила подстановки

и заключения, теорема дедукции и др.), используются для доказательства логических следствий.

Правило универсальной конкретизации (УК): из $\forall xQ(x)$, которая свободна для y, выводится $Q(y)$ подстановкой в $Q(x)$ вместо x переменной y (теорема 1 а).

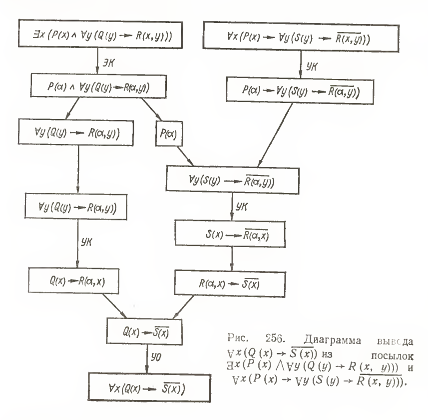


Рис. 256. Диаграмма вывода $\forall x (Q(x) \to \overline{S(x)})$ из посылок $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \to R(x, y)))$ и $\forall x (P(x) \to \forall y (S(y) \to \overline{R(x, y)}))$.

Правило универсального обобщения (УО): если $Q(x)$ — следствие посылок, ни одна из которых не имеет свободных вхождений x, то из нее выводится $\forall xQ(x)$ (теорема 2 а).

Кроме того, можно использовать еще два правила, представляющие собой аналоги приведенных выше правил для квантора существования.

Правило экзистенциальной конкретизации (ЭК) позволяет перейти от $\exists xP(x)$ к $P(\alpha)$, где α — неизвестный, но вполне определенный элемент такой, что, если $\exists xP(x)$ истинно, то $P(\alpha)$ также истинно.

Правило экзистенциального обобщения (ЭО) позволяет перейти от $P(\alpha)$ к $\exists xP(x)$, т. е., если существует такое α, что $P(\alpha)$ истинно, то истинно и $\exists xP(x)$.

В логику предикатов полностью переносятся все тавтологии, в частности соотношения: а) $\models A \sim B$, если и только если $A \leftrightarrow B$; б) $\models A \rightarrow B$, если и только если $A \Rightarrow B$.

10. Доказательство логического следствия. Исходя из понятия общезначимости, можно дать следующее определение *логического следствия в логике предикатов*: формула B есть логическое следствие формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, т. е. $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$, если для каждого множества определения и для каждого приписывания формулам A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ в этом множестве формула B истинна при условии, что все A_i истинны. При этом для всех свободных вхождений некоторой переменной x в какие-нибудь A_i выбирается одно и то же значение x из множества определения, т. е. такое x по существу рассматривают как постоянную.

Следуя общей схеме рассуждений, изложенной в (8. 10), а также дополнительным правилам вывода (9), рассмотрим пример из (7), где $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow R(x, y)))$ и $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(S(y) \rightarrow \overline{R(x, y)}))$ — посылки и $\forall x(Q(x) \rightarrow \overline{S(x)})$ — заключение. Процесс доказательства представляется диаграммой, показанной на рис. 256. Применение правил вывода, специфических для логики предикатов, указано здесь их сокращенными обозначениями. Остальные правила заимствованы из логики высказываний.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. На множестве натуральных чисел определены предикаты: $P(x) =$ «число x делится на 8» и $Q(x) =$ «x — четное число». Прочитайте следующие высказывания и выясните, какие из них истинны:

а) $\forall xP(x)$; д) $\forall x\overline{Q(x)}$;
б) $\exists xP(x)$; е) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$;
в) $\forall xQ(x)$; ж) $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$;
г) $\exists x\overline{Q(x)}$; з) $\exists x(Q(x) \rightarrow P(x))$.

2. Пусть x — множество прямых на плоскости. На этом множестве определены предикаты: $R(x, y) =$ «прямая x пересекается с прямой y», $S(x, y)$ — «прямая x параллельна прямой y», причем $x, y \in X$. Прочитайте следующие высказывания и определите их истинность:

а) $\forall x\exists yR(x, y)$;
б) $\exists x\exists y\overline{S(x, y)}$;
в) $\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow \overline{S(x, y)})$;
г) $\forall x\forall y(R(x, y) \vee S(x, y))$.

3. На множестве натуральных чисел определены предикаты: $P(x) =$ «x — простое число», $Q(x) =$ «x — четное число», $R(x, y) =$ «x не равно y». Переведите на русский язык формулу

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \overline{\exists} x(P(x) \wedge Q(x) \wedge \exists y(R(x, y) \wedge P(y) \wedge Q(y))).$$

4. Запишите формулы логики предикатов для приведенных ниже утверждений.

а) Каждый студент изучает или английский, или немецкий, или французский язык.

б) Некоторые устройства укомплектованы осциллографами.

в) Не все телевизоры работают хорошо.

г) Ни один прибор не оказался забракованным.

д) Все рабочие, которые выполнили задание, получили премии.

5. Граф $G = (V, E)$ определяется заданием непустого множества вершин V, множества ребер E и трехместного предиката $P(x, e, y)$ = «ребро e соединяет вершины x и y», который определен на всех упорядоченных тройках (x, e, y), причем $x, y \in V$ и $e \in E$ (для орграфа x считается начальной, а y — конечной вершинами дуги e). Запишите предикаты, задающие

а) подмножество дуг орграфа, исходящих из вершин a;

б) подмножество дуг орграфа, входящих в вершину b;

в) подмножество ребер графа, инцидентных вершине a;

г) подмножество ребер графа, соединяющих вершины a и b.

6. В соответствии с определением графа из задачи 5 расшифруйте следующие высказывания:

а) $\exists x, y\, (x \neq y \wedge P\,(x, e, y) \wedge \overline{P}\,(y, e, x))$;

б) $\exists x P\,(x, e, x)$;

в) $\exists x, y\, (x \neq y \wedge P\,(x, e, y) \wedge P\,(y, e, x))$.

Покажите, что для каждого $e \in E$ истинно одно и только одно из них и назовите подмножества множества E, которые соответствуют этим высказываниям.

7. Пусть определены одноместные предикаты: $S(x)$ = «x — прибор» и $P(x)$ = «x прошел испытание».

а) Сформулируйте категорические высказывания всех четырех типов;

б) Переведите все высказывания к такой форме, в которой используются только кванторы одного типа.

в) Переставьте предикаты в высказываниях и укажите случаи, когда такие перестановки допустимы.

8. Рассматривая одноместные предикаты $S(x)$ и $P(x)$ как определяющие свойства подмножеств S и P некоторого универсума, укажите все категорические высказывания, которые соответствуют каждому из следующих случаев:

а) S — подмножество P $(S \subset P)$;

б) S и P совпадают $(S = P)$;

в) P — подмножество S $(P \subset S)$;

г) S и P пересекаются $(S \cap P \neq \varnothing)$;

д) S и P не пересекаются $(S \cap P = \varnothing)$.

9. Запишите все 32 модуса непосредственных заключений и приведите примеры, опровергающие неправильные модусы.

10. Выпишите большую и малую посылки, заключение, малый, средний и большой термины в следующих категорических силлогизмах:

а) Если некоторые транзисторы негодные и все транзисторы проверяются, то среди проверенных транзисторов найдутся негодные.

б) Никто из спортсменов не изучает иностранных языков, если все инженеры изучают иностранный язык и некоторые из них — спортсмены.

Установите типы модусов приведенных силлогизмов и их правильность.

11. Пользуясь правилами логического вывода, докажите:

а) $\forall x\, (P\,(x) \to Q\,(x) \wedge R\,(x));\ \exists x\, (P\,(x) \wedge S\,(x)) \Rightarrow \exists x\, (R\,(x) \wedge S\,(x))$;

б) $\exists x\, (P\,(x) \wedge \forall y\, (Q\,(y) \to R\,(x, y)));\ \forall x\, (P\,(x) \to \forall y\, (S\,(y) \to \overline{R\,(x, y)})) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\, (Q\,(x) \to \overline{S\,(x)})$.

Придумайте словесное истолкование для этих соотношений.

10. АЛГОРИТМЫ

1. **Что такое алгоритм?** С давних времен в математике сложилось интуитивное представление об *алгоритме* как формальном предписании, которое определяет совокупность операций и порядок их выполнения для решения всех задач какого-либо типа.

Каждый встречается с алгоритмами со школьной скамьи. Правила, по которым выполняются арифметические действия являются простейшими примерами алгоритмов. Сам термин «алгоритм» происходит от имени средневекового узбекского математика Аль-Хорезми, который еще в IX в. сформулировал такие правила. В своем развитии математика накопила огромное количество различных алгоритмов. Получая соответствующую интерпретацию в конкретных приложениях, они составляют значительную и наиболее существенную часть математического аппарата, используемого в технике.

В наше время понятие алгоритма подверглось глубокому изучению и уточнению, главным образом, в связи с проблемой алгоритмической неразрешимости. Дело в том, что попытки решить ряд задач натолкнулись на трудности, которые не удалось преодолеть, несмотря на долгие и упорные усилия многих крупных математиков. Например, до сих пор не найдено алгоритма для решения диофантовых уравнений, осталась нерешенной проблема четырех красок в теории графов и т. д. В связи с этим возникло предположение, что далеко не для всякого класса задач возможно построение разрешающего алгоритма.

Если доказательством существования алгоритма служит само описание разрешающего процесса, то для доказательства его отсутствия уже недостаточно интуитивного понятия алгоритма. Нужно точно знать, что такое алгоритм и располагать методами строгого доказательства алгоритмической неразрешимости. Эти задачи стали одними из центральных проблем современной математики.

2. **Численные алгоритмы**. Алгоритмы, которые сводят решение поставленной задачи к арифметическим действиям над числами, называются *численными алгоритмами*. Традиционным примером является известный алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух заданных целых положительных чисел a и b.

Алгоритм Евклида состоит из следующей системы последовательных указаний: 1) обозревай a и b и переходи к следующему; 2) сравни обозреваемые числа ($a = b$, или $a < b$, или $a > b$) и переходи к следующему; 3) если обозреваемые числа равны, то каждое из них дает искомый результат, если нет — переходи к следующему; 4) если первое обозреваемое число меньше второго, переставь

их местами и переходи к следующему; 5) вычитай второе число из первого и обозревай два числа — вычитаемое и остаток; переходи к указанию 2.

Как видно, после пятого указания следует каждый раз возвращаться ко второму до тех пор, пока не будет выполнено третье указание. Хотя заранее и неизвестно, сколько потребуется таких циклических переходов, но ясно, что для любых двух чисел цель будет достигнута за конечное число шагов.

Численные алгоритмы получили широкое распространение благодаря тому, что к ним сводится решение многих задач (вычисление корней алгебраических уравнений, решение систем уравнений, численное дифференцирование и интегрирование и т. п.).

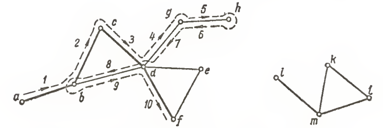


Рис. 257. Поиск пути в лабиринте от точки a к точке f.

3. Логические алгоритмы. Существует другой тип алгоритмов, которые содержат предписания, относящиеся не к цифрам, а к объектам любой природы. Типичным примером логических алгоритмов может служить алгоритм поиска пути в конечном лабиринте.

Лабиринт удобно изображать в виде графа, вершины которого соответствуют площадкам, а дуги — коридорам (рис. 257). Пусть требуется выяснить, достижима ли площадка f из площадки a, и если да, то найти путь из a в f, а если нет — вернуться в a. Конечно, предполагается, что заранее ничего не известно об устройстве данного лабиринта.

Лицо, ищущее путь в лабиринте, располагает нитью, конец которой закреплен на площадке a, и, двигаясь по лабиринту, может разматывать клубок (P) или наоборот наматывать на него нить (H). Можно делать отметки на проходимых коридорах и различать затем коридоры, еще ни разу не пройденные (зеленые — $З$), пройденные один раз (желтые — $Ж$) и пройденные дважды (красные — K). Метод поиска может быть задан следующей схемой: 1) площадка f — остановка (цель достигнута); 2) петля ($П$) — наматывание нити (от данной площадки расходятся, по крайней мере, два желтых коридора); 3) зеленая улица (ЗУ) — разматывание нити (от

данной площадки отходит хотя бы один зеленый коридор); 4) площадка a — остановка (исходный пункт); 5) отсутствие всех предыдущих признаков (ОП) — наматывание нити. Попав на какую-нибудь площадку, свериться со схемой признаков в указанном порядке и делать очередной ход в соответствии с первым же обнаруженным признаком, не проверяя остальных признаков. Такие ходы делаются до тех пор, пока не наступит остановка.

Один из возможных вариантов поиска содержит следующие ходы (в сокращенных обозначениях указаны номер хода, признак, ход, пройденный коридор, цвет коридора после его прохождения): 1) *ЗУ* — *Р* — ab — *Ж*; 2) *ЗУ* — *Р* — bc — *Ж*; 3) *ЗУ* — *Р* — cd — *Ж*; 4) *ЗУ* — *Р* — dg — *Ж*; 5) *ЗУ* — *Р* — gh — *Ж*; 6) *ОП* — *Н* — hg — *К*; 7) *ОП* — *Н* — gd — *К*; 8) *ЗУ* — *Р* — db — *Ж*; 9) *П* — *Н* — bd — *К*; 10) *ЗУ* — *Р* — df — *Ж*; 11) площадка f — остановка. В данном случае площадка f оказалась достижимой (недостижимыми являются площадки i, k, l, m). Выделив коридоры, которые остались желтыми (ab, bc, cd, df), получим путь от a к f ($abcdf$, указанный на рис. 257 жирными дугами).

4. Общие свойства алгоритмов. Богатый опыт разработки и применения алгоритмов подсказывает ряд общих свойств, которые детализируют приведенное выше описание.

Дискретность алгоритма. Любой алгоритм можно рассматривать как процесс последовательного построения величин, идущий в дискретном времени по определенному предписанию, называемому *программой*. В начальный момент задается конечная совокупность величин (исходные данные), а в каждый следующий момент совокупность величин получается по программе из совокупности, имевшейся в предыдущий момент.

Детерминированность алгоритма. Совокупность величин, получаемых в какой-то (не начальный) момент времени, однозначно определяется совокупностью величин, полученных в предшествующие моменты времени. Например, алгоритм поиска пути в лабиринте допускает произвол в выборе коридора при наличии нескольких зеленых коридоров, отходящих от данной площадки. Чтобы сделать его строго детерминированным, необходимо добавить предписание о выборе зеленого коридора (например, первый по часовой стрелке).

Направленность алгоритма. Если способ получения последующей величины из какой-нибудь заданной не приводит к результату, то должно быть указание, что́ надо считать результатом алгоритма. Иначе говоря, алгоритм через конечное число тактов времени (шагов) должен привести к остановке, которая свидетельствует о достижении требуемого результата. Так, при поиске пути в лабиринте остановка наступает либо на достижимой площадке, либо при возвращении на исходную площадку, если указанная цель недостижима.

Массовость алгоритма. Алгоритм служит для решения целого класса задач, причем начальная совокупность величин может выбираться из некоторого множества. Например, в алгоритме Евклида числа a и b выбираются из бесконечного (счетного) множества целых чисел, а в алгоритме поиска пути в лабиринте начальная и конечная площадки выбираются из конечного множества площадок лабиринта. В математике проблема считается решенной, если для нее найден общий алгоритм.

Элементарность шагов алгоритма. Предписание о получении последующей совокупности величин из предшествующей должно быть простым и локальным. Это означает, что соответствующая операция должна быть элементарной для исполнителя алгоритма (человека или машины). Например, встречающиеся в алгоритме Евклида операции сравнения, вычитания и перестановки чисел можно было бы расчленить на более простые операции, если бы они не считались достаточно стандартными и привычными. В то же время сам алгоритм Евклида может фигурировать в качестве элементарной операции более сложного алгоритма.

5. Ассоциативное исчисление. Дальнейшее обобщение понятия алгоритма связано с *ассоциативным исчислением*, которое строится на множестве всех слов в данном алфавите.

Напомним, что алфавит представляет собой любую конечную систему различных символов, называемых буквами. Любая конечная последовательность n букв некоторого алфавита является словом длины n в этом алфавите. Например, в алфавите из трех букв $\{a, b, c\}$ словами будут последовательности b, ac, bac, $abbca$, $cbcccacabca$ и т. д. Пустое слово, не содержащее ни одной буквы, обычно обозначается через Λ. Если слово L является частью слова M, то говорят о вхождении слова L в слово M. Например, в слове $abcbcbab$ имеются два вхождения слова bcb и одно вхождение слова ba.

В качестве операций ассоциативного исчисления определяется *система допустимых подстановок*, с помощью которых одни слова преобразуются в другие. Подстановка вида $L—M$, где L и M— слова в том же алфавите, означает замену вхождения левой части правой, равно как и замену правой части левой. Иначе говоря, если в некотором слове R имеется одно или несколько вхождений слова L, то каждое из этих вхождений может заменяться словом M, и наоборот, если имеется вхождение слова M, то его можно заменить словом L. Например, подстановка $ab—bcb$ применима четырьмя способами к слову $abcbcbab$. Замена каждого из двух вхождений bcb даст слова $aabcbab$ и $abcabab$, а замена каждого из двух вхождений ab дает слова $bcbcbcbab$, $abcbcbbcb$. В то же время к слову $bacb$ эта подстановка не применима. Подстановка вида $P—\Lambda$ означает, что из преобразуемого слова выбрасывается вхождение слова P,

а также что между двумя какими-либо буквами преобразуемого слова или впереди него, или за ним вставляется слово P.

Итак, *ассоциативное исчисление* — это множество всех слов в некотором алфавите вместе с какой-нибудь конечной системой допустимых подстановок. Очевидно, чтобы задать ассоциативное исчисление, достаточно определить алфавит и систему допустимых подстановок (например, алфавит $\{a, b, c, d, e\}$ и система подстановок $ac—ca$, $ad—da$, $bc—cb$, $bd—db$, $abac—abacc$, $eca—ae$, $edb—be$).

6. Эквивалентность слов. Два слова называются *эквивалентными*, если одно из них можно получить из другого последовательным применением допустимых подстановок. Так, в приведенном выше (5) исчислении эквивалентными являются, например, слова *abcde* и *cadedb*, что видно из следующих последовательных преобразований: ***abcde***, ***acbde***, *ca**bde***, *cad**be***, *cadedb*. Последовательность слов R_1, R_2, ..., R_n, когда каждое следующее слово является результатом однократного применения допустимой подстановки к предыдущему слову, образует *дедуктивную цепочку*, причем соседние слова в этой цепочке называют *смежными*. Очевидно, любые два слова в дедуктивной цепочке являются эквивалентными.

Эквивалентность слов L и M обозначается $L \sim M$ и обладает всеми свойствами отношения эквивалентности (рефлексивность, симметричность и транзитивность). Если $L \sim M$, то при наличии в каком-либо слове R вхождения L в результате подстановки $L — M$ получается слово, эквивалентное R. Например, воспользовавшись эквивалентностью $abcde \sim cadbe$, из слова *bb**abcde**c* получаем эквивалентное ему слово *bb**cadbe**c*.

В каждом ассоциативном исчислении возникает своя специальная *проблема слов*, заключающаяся в следующем: для любых двух слов в данном исчислении требуется узнать, эквивалентны они или нет. Решение этой проблемы аналогично поиску пути в лабиринте, площадки которого соответствуют смежным словам. Очевидно, эквивалентность двух слов означает, что соответствующие им площадки связаны некоторым путем, который представляет собой дедуктивную цепочку от одного слова к другому. Однако проблема слов является далеко идущим обобщением задачи поиска пути в конечном лабиринте. Так как в любом ассоциативном исчислении содержится бесконечное множество различных слов, то соответствующий лабиринт имеет бесконечное число площадок, и, следовательно, решение вопроса об эквивалентности любых двух слов сводится к поиску пути в *бесконечном лабиринте*.

С помощью алгоритма перебора решается *ограниченная проблема слов*: требуется установить, можно ли одно из заданных слов преобразовать в другое применением допустимых подстановок не более, чем k раз, где k — произвольное, но фиксированное число. Для этого достаточно построить все слова, смежные с одним из заданных слов,

затем для каждого из полученных слов построить все слова, смежные с ним и т. д. всего k раз. В результате получим список всех слов, которые можно получить из заданного с помощью допустимых подстановок, применяемых не более k раз. Если второе заданное слово окажется в этом списке, то ответ на поставленный вопрос будет положительным, а если его в списке нет, ответ отрицательный. Можно заметить, что ограниченная проблема слов соответствует ограничению лабиринта таким образом, что расстояние между рассматриваемыми площадками не превышает k коридоров.

Однако такой путь принципиально не пригоден для решения неограниченной проблемы слов. Поскольку длина дедуктивной цепочки, простирающейся между эквивалентными словами (если такая цепочка существует), может оказаться сколь угодно большой, то не существует никакой возможности указать такое конечное число k, которое гарантирует решение проблемы путем простого перебора. Поэтому для получения желаемых результатов необходимо применять другие идеи, основанные на анализе самого механизма преобразования слов посредством допустимых подстановок.

В некоторых случаях могут быть обнаружены и использованы свойства, остающиеся неизменными для всех слов дедуктивной цепочки *(дедуктивные инварианты)*. Так, в каждой из допустимых подстановок исчисления из (5) левая и правая части содержат одно и то же число вхождений буквы a. Следовательно, в любой дедуктивной цепочке все слова также должны содержать одно и то же число вхождений буквы a. На основе этого дедуктивного инварианта можно установить, какие слова не могут быть эквивалентными (например, слова $abacdac$ и $abaadac$ — не эквивалентны).

Проблема слов в ассоциативном исчислении имеет огромное значение в связи с тем, что к ней сводятся многие геометрические, алгебраические и логические задачи. Так, любую формулу логики высказываний и предикатов можно трактовать как слова в некотором алфавите, содержащем логические символы, высказывания, предикаты и предметные переменные. Процесс эквивалентного преобразования или вывода логического следствия может быть представлен как преобразование слов, причем роль допустимых подстановок играют логические законы или аксиомы. Таким образом, вопрос о выводимости какой-либо формулы становится вопросом существования дедуктивных цепочек, ведущих от слов, представляющих посылки, к словам, представляющим следствие. В ряде интерпретаций ассоциативного исчисления, в частности в теории вывода, используются ориентированные подстановки вида $L \to M$, которые допускают лишь подстановку слева направо (слова L в слово M). Это соответствует лабиринтам, по каждому коридору которого можно двигаться только в одном направлении.

7. Нормальный алгоритм Маркова. Система допустимых подстановок в некотором алфавите, снабженная точным предписанием о порядке и способе их использования, позволяет осуществить детерминированный процесс, который последовательно преобразует некоторое слово в новые слова, эквивалентные исходному. Говорят, что задан *алгоритм в алфавите* A, который применим к слову L и перерабатывает его в слово M, если, отправляясь от L и действуя согласно предписанию, в конце концов получают M, на котором процесс обрывается. Множество слов, к которым применим данный алгоритм, называют его *областью применимости*. Два алгоритма в некотором алфавите называются *эквивалентными*, если области их применимости совпадают и результаты переработки ими любого слова из общей области применимости также совпадают.

Важный шаг на пути уточнения понятия алгоритма сделан А. А. Марковым, который дал стандартные раз и навсегда определенные указания о порядке использования подстановок. Определение *нормального алгоритма Маркова* сводится к следующему.

Задается алфавит A и фиксируется в определенном порядке система ориентированных подстановок. Исходя из произвольного слова R в алфавите A, просматриваются подстановки в том порядке, в каком они заданы. Первая встретившаяся подстановка с левой частью, входящей в R, используется для преобразования R, в которое вместо первого вхождения ее левой части подставляется ее правая часть, в результате чего получаем новое слово R_1. Далее процесс повторяется, исходя из слова R_1, R_2 и т. д. до тех пор, пока этот процесс не останавливается. Признаками остановки процесса служат два случая: во-первых, когда получается такое слово R_n, что ни одна из левых частей допустимых подстановок в него не входят, и во-вторых, когда при получении R_n приходится применять последнюю подстановку.

Пусть, например, задан алфавит $A = \{1, +\}$ и система подстановок: $+ \to \wedge$, $1 \to 1$ ($\wedge$ — пустое слово). Слово $111 + 11 + + 1111 + 1$ этот алгоритм перерабатывает так:

$$\begin{array}{l} 111 + 11 + 1111 + 1 \\ 11111 + 1111 + 1 \\ 111111111 + 1 \\ 1111111111 \\ 1111111111 \end{array}$$

Процесс оканчивается применением заключительной подстановки, которая перерабатывает слово само в себя. Как видим, алгоритм суммирует количество единиц, т. е. осуществляет операцию сложения. Эквивалентный ему алгоритм можно задать с помощью системы подстановок: $1 + \to + 1$; $+1 \to 1$; $1 \to 1$.

В соответствии со смелой гипотезой, основанной на накопленном опыте, предполагается, что любой алгоритм может быть представлен в виде нормального алгоритма Маркова. Иначе говоря, нормальный алгоритм Маркова принимается в качестве стандартной формы любого алгоритма.

8. Машина Тьюринга. Другой стандартной формой представления любого алгоритма являются функциональные схемы, реализуемые в *машинах Тьюринга* (рис. 258). Слова, перерабатываемые в данном алфавите $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$, называемом *внешним алфавитом* машины, изображаются в ячейках неограниченной ленты (НЛ), причем в каждой ячейке может храниться только один символ.

Работа машины происходит в дискретном времени. На каждом такте обозревается единственная ячейка и считываемый символ ξ_i заменяется другим ξ_j ($i = j$ означает, что символ не изменяется), который определяется состоянием машины s_k в данный тактовый момент из множества ее возможных состояний $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Кроме того, вырабатывается последующее состояние машины и команда, управляющая перемещением по ленте, которая подготавливает очередную ячейку для обозрения на следующем такте. Таких команд в машине Тьюринга только три: *П* — обозревать соседнюю справа ячейку, *Л* — обозревать соседнюю слева ячейку и *Н* — продолжать обозревать прежнюю ячейку. Совокупность символов $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ и {П, Л, Н} образует *внутренний алфавит машины.*

Функциональная схема, соответствующая какому-либо алгоритму, задается подобно общей таблице переходов конечного автомата (6. 4) с некоторыми несущественными отличиями. Обычно строки таблицы соответствуют символам внешнего алфавита $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, а столбцы — состояниям машины $s_1, s_2, \ldots, s_n$. В каждой клетке записывается тройка символов, обозначающих замещающий символ из внешнего алфавита, управляющую команду и последующее состояние. Например, функциональная схема, соответствующая алгоритму сложения (числа представляются совокупностью единиц или просто «палочек», общее количество которых равно данному числу, причем все они расположены в ячейках без пропусков) имеет вид:

	s_1	s_2	s_3
1	$\wedge П s_3$	$1 Л s_2$	$1 П s_3$
$\wedge$	$\wedge П s_1$	$\wedge П s_1$	$1 H s_2$
+	$\wedge H!$	$+ Л s_2$	$+ П s$.

Знак «!» используется для обозначения *стоп-состояния*, при наступлении которого процесс останавливается и результирующее слово считывается по ленте, а через $\wedge$ обозначается пустой символ.

Функциональная таблица полностью определяет функционирование машины и реализуется в ней *логическим блоком* (*ЛБ*). На

два его входа подаются считываемые символы, над которыми совершаются операции (замена другими символами), и состояния, играющие роль команд, определяющих эти операции. На одном из выходов логического блока образуется символ, который в данном такте замещает на ленте обозреваемый символ, а на остальных двух выходах — команды, определяющие функционирование машины на следующем такте (перемещение по ленте и новое состояние). Для запоминания этих команд вводятся задержки $З_1$ и $З_2$, представляющие собой *внутреннюю память* машины.

Перед началом работы на ленту наносится исходное слово и задаются начальные условия, т. е. указывается первая обозреваемая ячейка и начальное состояние. После пуска машины процесс преобразования информации происходит автоматически.

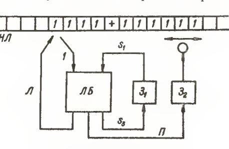


Рис. 258. Машина Тьюринга.

Пусть, например, требуется сложить числа 4 и 6. Исходное слово на ленте запишется в виде 1111 + 111111. В соответствии с приведенной выше схемой сложения начальные условия определяются ячейкой с крайней левой единицей и состоянием s_1. На первом такте единица стирается, выдается команда сдвига вправо и перехода в состояние s_3 ($\wedge Пs_3$). Последующие такты сводятся к сдвигам направо сквозь все единицы ($1Пs_3$) и знак + ($+Пs_3$) до тех пор, пока не будет достигнута первая пустая ячейка. Тогда в эту пустую ячейку вписывается единица и машина переходит в состояние s_2 ($1Нs_2$). При состоянии s_2 происходят сдвиги в обратном направлении через все символы 1 и + до первой пустой ячейки слева. После этого происходит сдвиг вправо, левая крайняя единица стирается, и машина переходит в состояние s_1($\wedge Пs_1$). В результате этого цикла единица левого слагаемого оказалась перенесенной в правое слагаемое, что соответствует слову 111 + 1111111 (сумма не изменяется). Очевидно, через четыре таких цикла исходное слово преобразуется к виду +1111111111. К началу пятого цикла обозревается символ + при состоянии s_1, который стирается и происходит остановка ($\wedge Н!$). В результате получим слово 1111111111, соответствующее числу 10.

Описанные машины Тьюринга являются специализированными: каждому алгоритму соответствует своя машина. Рассматривая функциональную схему как описание программы, можно прийти к понятию универсальной машины Тьюринга, которая реализует

любой алгоритм, если на ее ленту, кроме исходных данных, записана соответствующая программа. Таким образом, интуитивное понятие алгоритма получает точное определение как процесс, который может быть представлен функциональной схемой и реализован машиной Тьюринга.

9. Алгоритмическая разрешимость. После того как понятие алгоритма получило точное определение, вопрос об алгоритмической разрешимости того или иного класса задач ставится совершенно определенно: существует ли какая-либо стандартная форма алгоритма, решающая данный класс задач? В ряде случаев на этот вопрос теория алгоритмов дает отрицательный ответ.

В специальных разделах математики строго доказана неразрешимость ряда задач, например невозможность решения в радикалах алгебраических уравнений выше четвертой степени, невозможность трисекции угла с помощью циркуля и линейки и т. п. Отличительная особенность теории алгоритмов состоит в том, что она испытывает на разрешимость наиболее общие проблемы.

Пробным камнем теории алгоритмов явилась проблема распознавания выводимости: для любых двух формул R и S в логическом исчислении узнать, существует ли дедуктивная цепочка, ведущая от R к S, или же такой цепочки не существует. Оказалось, что эта проблема алгоритмически неразрешима. Отрицательный ответ получен и для проблемы распознавания эквивалентности слов в любом ассоциативном исчислении. Были построены конкретные примеры ассоциативных исчислений, в которых не существует алгоритма, позволяющего для любой пары слов установить, эквивалентны они или нет. Простейший пример такого исчисления приведен в (5).

Алгоритмическую неразрешимость следует понимать в том смысле, что не существует *единого алгоритма* для решения проблемы в целом. Но это вовсе не означает неразрешимость более узких классов задач данной проблемы. Так, несмотря на алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания выводимости, по существу вся математика представляет собой дедуктивную науку, в которой в качестве основного метода доказательства используется выводимость теорем из некоторой совокупности аксиом.

Не следует смешивать алгоритмическую неразрешимость какой-либо проблемы с положением, в котором находятся еще нерешенные проблемы. Если для нерешенных проблем остается хоть какая-нибудь надежда найти разрешающий алгоритм, то алгоритмическая неразрешимость раз и навсегда ставит точку над всякими попытками поиска такого алгоритма, поскольку бессмысленно искать то, чего не существует.

С точки зрения инженерной практики проблема алгоритмической разрешимости выглядит совсем иначе, чем с позиций самой математики. В силу конечности реального времени, отводимого на решение задачи, и ограниченных возможностей средств вычислительной техники (производительность и память) даже простые алгоритмы могут оказаться практически нереализуемыми, если они требуют выполнения слишком большого числа операций. Типичными примерами являются задачи выбора оптимальных вариантов при проектировании, игровые задачи и алгоритмы, основанные на простом переборе и т. п. В то же время алгоритмическая неразрешимость проблемы в целом не является препятствием для решения частных задач, относящихся к этой проблеме. Так, среди алгебраических уравнений выше четвертой степени могут оказаться такие, которые решаются не только в радикалах, но и в целых числах. Более того, можно определить корни уравнения с достаточной для практики степенью приближения, вовсе отказавшись от стремления найти решение в радикалах.

Аналогичный подход выработала практика и к задачам, которые относятся к нерешенным проблемам. Например, до сих пор не найден общий алгоритм раскраски граней любого плоского графа не больше чем четырьмя различными цветами так, чтобы никакие соседние грани не были окрашены одинаковым цветом *(проблема четырех красок)*. В то же время в реальных условиях еще не встречалось случаев, когда такая раскраска оказалась бы невозможной (эта задача возникает, например, при изготовлении географических карт). Можно предложить много различных способов, облегчающих решение конкретных задач этого типа. Однако ни один из них нельзя назвать алгоритмом, если он не гарантирует раскраску любого графа. А такого алгоритма как раз никому еще не удалось построить, несмотря на то, что этим вопросом занимались выдающиеся математики. В отличие от алгоритмов, практические способы, используемые для решения таких задач, относящихся к нерешенным проблемам, называют *псевдоалгоритмами*.

10. Прикладная теория алгоритмов. Стандартные формы представления алгоритмов, подобные нормальному алгоритму Маркова, в силу их чрезвычайно высокой степени детализации непригодны для инженерной практики. Машина Тьюринга является удобной абстрактной моделью реализации любого алгоритма человеком или вычислительной машиной, но в реальных условиях любой вид памяти и время функционирования жестко ограничены. В то же время при разработке и реализации конкретных алгоритмов в инженерной практике достаточно исходить из их общих свойств, сформулированных в (4).

Прикладная теория алгоритмов мало озабочена собственно существованием алгоритмов (обычно это просто подразумевается),

а направляет усилия, главным образом, на разработку практически наиболее эффективных методов их описания, преобразования и реализации. Алгоритм рассматривается как совокупность определенным образом связанных между собой *операторов*, представляющих элементарные операции, которые производятся над множеством подвергающихся переработке объектов. Способы реализации операторов считаются известными (как правило, операторы сами являются некоторыми стандартными алгоритмами), а при конкретной реализации алгоритма задаются также значения исходных данных и параметров, входящих в описание операторов.

Для описания алгоритмов используются различные методы, отличающиеся степенью детализации и формализации. Теоретическое описание обычно дается в повествовательно-формульном изложении, цель которого — обосновать без излишних подробностей процедуру, предлагаемую в качестве алгоритма. Для наглядного представления структуры алгоритмов широко применяются графические средства: графы, блок-схемы, сети. Формальное и полное описание алгоритмов осуществляется на специально разработанных для этой цели *алгоритмических языках*; оно содержит всю необходимую для реализации алгоритма информацию, но не связано непосредственно со специфическими особенностями вычислительных машин. Машинная реализация алгоритма требует перевода его на язык, свойственный данной машине, в виде программы. Роль автоматических переводчиков с алгоритмических языков играют специальные программы, называемые *трансляторами*. Часто общее описание алгоритма непосредственно переводится на машинный язык путем расшифровки операторов алгоритма в операции вычислительной машины.

В отличие от абстрактной теории алгоритмов, прикладная теория рассматривает не только детерминированные, но также *вероятностные* (статистические) и *эвристические* алгоритмы. В последнем случае, кроме детерминированных или статистически заданных правил, алгоритм включает также содержательные указания о целесообразном направлении процесса.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Составьте словесные алгоритмы для решения следующих задач:

а) умножение n чисел $a_1 a_2 \dots a_n$;

б) поиск максимального элемента из множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;

в) определение множества M, равного пересечению двух множеств M_1 и M_2 ($M = M_1 \cap M_2$);

г) умножение матрицы на вектор;

д) умножение матрицы на матрицу;

е) транспонирование матрицы.

2. Нормальный алгоритм Маркова задан в алфавите $\{a, b, c\}$ системой подстановок: $b \to acc$, $ca \to accc$, $aa \to \wedge$, $cccc \to \wedge$.

а) Найдите слова, в которые этот алгоритм перерабатывает слова *cacb* и *bb*.

б) Покажите, что алгоритм применим к любому исходному слову и перерабатывает его в одно из восьми слов (определите эти слова).

3. Постройте нормальный алгоритм Маркова, реализующий вычитание чисел, представленных строками из единиц (проверьте его на примере $6 - 2 = 4$, представляемом как $111111 - 11 = 1111$).

4. Изобразите все конфигурации, соответствующие примеру сложения чисел 4 и 6 на машине Тьюринга по программе, приведенной в (8). Под k-й конфигурацией понимают изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу k-го такта, причем под обозреваемой ячейкой указывают то состояние, которое подается в логический блок к началу этого же такта. Например, первые две конфигурации для рассматриваемого примера имеют вид:

			1	1	1	1	1	1	+	1	1	1	1		
			s_1												

				1	1	1	1	1	+	1	1	1	1		
				s_3											

5. Программа работы машины Тьюринга задана следующей функциональной таблицей:

	s_0	s_1	s_2	s_3
1	αПs_2	1Лs_1	1Пs_2	1Нs_3
$\wedge$	$\wedge$Пs_0	$\wedge$Пs_0	1Нs_1	$\wedge$Пs_0
*	*Нs_3	*Лs_1	*Пs_2	$\wedge$Нs_3
α	αПs_0	αПs_0	1Нs_1	1Лs_3

а) Запишите внешний и внутренний алфавиты машины (звездочка * играет роль разделителя между числами, задаваемыми последовательностями единиц).

б) Покажите, что заданная программа реализует бесконечный процесс повторного суммирования двух чисел m и n по формуле $km + n$, где k — любое натуральное число.

в) Как изменить функциональную таблицу, чтобы она реализовала алгоритм умножения двух чисел?

Литература

Основы математической логики глубоко изложены в монографиях П. С. Новикова «Элементы математической логики» (М., Физматгиз, 1959) и Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» (М., «Наука», 1971). Исторический очерк развития математической логики дан в книге А. И. Попова «Введение в математическую логику» (Изд. Ленинградского университета, 1959). Из популярной литературы можно рекомендовать книги

Л. А. Калужнина «Что такое математическая логика» (М., «Наука», 1964), Х. Фрейденталя «Язык логики» (М., «Наука», 1969), А. Гжегорчика «Популярная логика» (М., «Наука», 1972), Дж. Т. Калбертсона «Математика и логика цифровых устройств» (М., «Просвещение», 1965).

Теории автоматов и техническим приложениям математической логики посвящены книги В. М. Глушкова «Синтез цифровых автоматов» (М., Физматгиз, 1962), М. Айзермана и др. «Логика. Автоматы. Алгоритмы» (М., Физматгиз, 1963), А. Гилла «Введение в теорию конечных автоматов» (М., «Наука», 1966), Д. А. Поспелова «Логические методы анализа и синтеза схем» (М., «Энергия», 1968), Р. Миллера «Теория переключательных схем» (М., «Наука», Т. 1, 1970; Т. 2, 1971), А. Д. Закревского «Алгоритмы синтеза дискретных автоматов» (М., «Наука», 1971), Ю. А. Бузунова и Е. Н. Вавилова «Принципы построения цифровых вычислительных машин» (К., «Технiка», 1972).

Основы многозначной логики изожены в работе С. В. Яблонского «Введение в теорию функций k-значной логики», вошедшей в монографию «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики» (М., «Наука», 1975). Теоретические и прикладные вопросы многозначных элементов и структур рассматриваются в монографиях В. П. Сигорского и др. «Многоустойчивые элементы дискретной техники» (М., «Энергия», 1966) и Ю. Л. Иваськива «Принципы построения многозначных физических систем» (К., «Наукова думка», 1971), а также в сборниках (под ред. В. П. Сигорского) «Многозначные элементы и структуры» (М., «Советское радио», 1967) и «Многоустойчивые элементы и их применение» (М., «Сов. радио», 1971). С методами синтеза схем на пороговых элементах можно ознакомиться по книгам М. Дертузоса «Пороговая логика» (М., «Мир», 1967) и Е. А. Бутакова «Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов» (М., «Энергия», 1970).

Абстрактной теории алгоритмов посвящена фундаментальная монография А. И. Мальцева «Алгоритмы и рекурсивные функции» (М., «Наука», 1965). Более популярное изложение дано в книгах: З. В. Алферова «Теория алгоритмов» (М., «Статистика», 1973) и Б. А. Трахтенброт «Алгоритмы и вычислительные автоматы» (М., «Сов. радио», 1974). Прикладные вопросы теории алгоритмов освещены в справочнике В. Т. Кулика «Алгоритмизация объектов управления» (К., «Наукова думка», 1968).

При изучении математической логики полезно воспользоваться задачником С. Г. Гиндикина «Алгебра логики в задачах» (М., «Наука», 1972), который содержит также краткие сведения по теоретическим вопросам. Много полезных сведений читатель найдет в книге Н. И. Кондакова «Логический словарь-справочник» (М., «Наука», 1975), которая содержит обширный список литературы по математической логике.

Глава 6

ВЕРОЯТНОСТИ

Теория вероятностей, подобно другим разделам математики, развилась из потребностей практики; в абстрактной форме она отражает закономерности, присущие событиям массового характера. Эти закономерности играют исключительно важную роль в физике и других областях естествознания, военном деле, разнообразнейших технических дисциплинах, экономике и т. д.

Б. В. Гнеденко

В этой главе разъясняются основные понятия теории вероятностей и приводятся примеры их применения к решению инженерных задач.

На основе аксиоматического определения вероятности по Колмогорову излагается алгебра событий, использующая аппарат математической логики. Для определения вероятности сложного события достаточно в соответствующей ему канонической форме, аналогичной совершенной дизъюнктивной нормальной форме, заменить логические операции дизъюнкции и конъюнкции арифметическими операциями сложения и умножения, а логические переменные — вероятностями соответствующих им событий.

Важнейшим понятием теории вероятностей является случайная величина, которая при данном комплексе условий принимает с некоторой вероятностью одно из своих возможных значений. При рассмотрении случайных величин излагаются различные способы задания функций, определяющих их распределения. Приводятся сведения о числовых характеристиках распределений (математическом ожидании, дисперсии и т. п.) и методах их вычисления. Для удобства часто встречающиеся распределения дискретных и непрерывных случайных величин сведены в таблицы.

Совокупность случайных величин рассматривается как многомерный случайный вектор, который характеризуется многомерной функцией распределения. Излагаются методы преобразования случайных величин, позволяющие находить закон и характеристики распределения величины, которая является функцией совокупности случайных величин. В связи с этой задачей рассматривается приближенный метод статистического моделирования, известный под названием метода Монте-Карло и получивший широкое распространение в практических исследованиях.

Область приложения аппарата теории вероятностей столь быстро расширяется, что становится почти необозримой. Это, по существу,

вся природа, наука и техника. Даже простое перечисление задач, которые решаются с применением теории вероятностей и развившейся на ее основе математической статистики, заняло бы очень много места. Для иллюстрации использования аппарата теории вероятностей в инженерном деле выбраны некоторые типичные задачи, имеющие общий характер и затрагивающие ряд прикладных проблем: обработка наблюдений, процессы массового обслуживания, надежность и восстановление, информация и связь.

В соответствующих параграфах этой главы кратко излагается сущность проблемы, приводятся основные теоретические положения и рассматриваются методы их использования для решения практических задач. Ясно, что все это следует рассматривать лишь как краткие введения в затронутые проблемы, которые призваны облегчить использование специальной литературы по вероятностно-статистическим методам моделирования.

Решение инженерных задач с применением аппарата теории вероятностей обычно требует большого объема вычислений. Для облегчения вычислительной работы составлено большое количество разнообразных таблиц, которые можно найти в специальных монографиях и справочниках (в этой книге приведена, например, такая таблица для интеграла Лапласа, через который выражаются многие функции). Современные методы вероятностно-статистического моделирования предполагают, как правило, использование высокопроизводительных вычислительных машин.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Аксиомы теории вероятностей. Теория вероятностей прошла сложный путь развития. От анализа азартных игр, которым занимались такие крупные математики XVII века как Паскаль и Ферма, она перешла к решению важных практических задач и развила собственный аналитический аппарат (Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон). Однако в течение длительного периода эта наука подвергалась резкой критике и обстреливалась различными парадоксами, которые появлялись из-за недостаточно строгого ее обоснования.

В наше время теория вероятностей превратилась в важнейшую отрасль современной математики с чрезвычайно широкой областью применения. Ее обоснование и развитие связано с именами русских ученых П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова. Общепризнан высокий авторитет в этой области советской математической школы и ее выдающихся представителей С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчина и др.

Теория вероятностей стала логически совершенным разделом математики после того, как в ее основу была положена система аксиом, из которых выводятся все необходимые соотношения.

В качестве исходного понятия принимается *множество элементарных событий* U, которое играет роль основного множества (универсума). *Случайное событие* A рассматривается как некоторое подмножество универсума U. Невозможному событию соответствует пустое множество $\varnothing$, достоверному событию — сам универсум U, а противоположному событию — дополнение $\bar{A}=U\setminus A$. Таким образом, производится идентификация (отождествление) случайных событий и соответствующих им множеств элементарных событий.

Множество F подмножеств универсума U называют *множеством событий*, если результатом любой теоретико-множественной операции над множествами из F является множество, принадлежащее F. Следовательно, объединение, пересечение, дополнение, разность, дизъюнктивная сумма событий также являются событиями. Множество событий F часто называют *полем событий*. Если F — бесконечное множество, то оно называется *борелевским полем* (или *σ-алгеброй*) событий. Относительно операций объединения, пересечения и дополнения множество событий F образует булеву алгебру (5. 2. 10). Относительно дизъюнктивной суммы и пересечения (или объединения) оно образует коммутативное кольцо с единицей, причем роль единицы играет универсум U (2. 8. 4).

Вероятность определяется по Колмогорову следующей совокупностью аксиом:

1) каждому событию A из F соответствует неотрицательное действительное число $P(A)$, называемое *вероятностью события* A;

2) вероятность достоверного события равна единице, т. е. $P(U) = 1$;

3) если A и B — несовместные события (множества A и B не пересекаются), то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Эта система аксиом непротиворечива и служит основой элементарной теории вероятностей, изучающей конечные множества событий. При рассмотрении бесконечных множеств она дополняется следующей *аксиомой непрерывности:* для убывающей последовательности событий $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ из F такой, что $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, имеет место соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 0.$$

2. Вероятностное пространство. Непустое множество U элементарных событий, булева алгебра событий F и вероятность P, определенная на F, образуют в совокупности вероятностное пространство, которое обозначается как тройка (U, F, P).

Пусть $U = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ — конечное множество элементарных событий, и каждому элементарному событию $E_i \in U$ соответ-

ствует элементарная вероятность $P(E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $P(U) = 1$, то должно удовлетворяться соотношение

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1.$$

Множество событий F образуется из всех подмножеств универсума U (число элементов в F равно 2^n). Вероятность события $A \in F$ равна сумме вероятностей тех элементов из U, которые содержатся в A.

Следует обратить внимание на то, что при аксиоматическом определении нет нужды прибегать к понятиям равновероятности или частоты событий. В то же время предполагается, что элементарные события существенно различные и несовместимые. В этом смысле любое разбиение некоторого множества на попарно непересекающиеся подмножества может рассматриваться как множество элементарных событий. Это множество приобретает конкретное содержание в связи с данным комплексом условий или испытанием.

Так, при бросании игральной кости множество элементарных событий состоит из шести элементов: $U = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, где E_i означает выпадение i очков ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Множество F событий состоит из $2^6 = 64$ элементов, среди которых пустое множество $\varnothing$, основное множество U, одноэлементные множества $\{E_i\}$, а также множества, содержащие сочетания из шести элементов множества U по два, три, четыре и пять элементов. В предположении симметрии игральной кости следует приписать элементарным событиям E_i одинаковые вероятности $P(E_i) = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Для неправильной кости элементарные вероятности могут быть различными, например, они могут относиться как $2:1:2:2:3:2$. Тогда $P(E_1) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_6) = \frac{1}{6}$; $P(E_2) = \frac{1}{12}$ и $P(E_5) = \frac{1}{4}$. Вероятность события $A = \{E_1, E_2\}$, означающего выпадение не больше двух очков, в первом случае будет $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, а во втором случае $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$. Вероятность выпадения нечетного числа очков, т. е. события $B = \{E_1, E_3, E_5\}$ будет соответственно: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Аксиоматическая теория вероятностей обходит вопрос о приписывании конкретных значений элементарным вероятностям и ограничивается лишь постулированием их общих свойств. На решение этой задачи с вероятностных позиций претендует математическая статистика.

3. Вывод основных соотношений. Из приведенных аксиом выводятся основные соотношения теории вероятностей.

Так как $A+\overline{A}=U$, то на основании аксиом 2 и 3 имеем $P(A)+P(\overline{A})=1$, откуда следует $P(\overline{A})=1-P(A)$. В частности, из $\varnothing=\overline{U}$ имеем $P(\varnothing)=P(\overline{U})=1-1=0$.

Воспользовавшись свойством ассоциативности дизъюнктивной суммы $A_1+A_2+A_3=A_1+(A_2+A_3)$, на основании аксиомы 3 для попарно-несовместных событий получим $P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+$ $+P(A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$, и *теорема сложения* запишется следующим образом:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

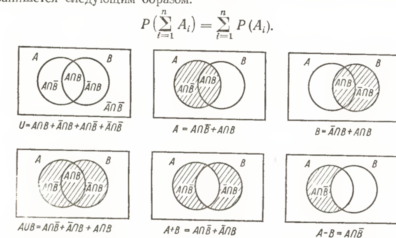


Рис. 259. Диаграммы Венна для основных операций над событиями.

Теорема сложения (как и аксиома 3) применима только для несовместных событий. Поэтому естественным шагом при выводе основных соотношений теории вероятностей является разбиение совокупности элементарных событий, определяющих данное событие, на попарно непересекающиеся подмножества. Такие разбиения для двух событий A и B наглядно представляются на диаграммах Венна (рис. 259). Там же приведены соотношения для операций над множествами A и B через дизъюнктивные суммы непересекающихся подмножеств, каждый член которых представляет собой пересечение данных событий или их дополнений. На основе этих выражений и теоремы сложения можно записать:

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B);$$

$$P(B)=P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap B);$$

$$P(A\cup B)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap B);$$

$$P(A+B)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B);$$

$$P(A-B)=P(A\cap\overline{B}).$$

Отсюда следуют формулы: для объединения $A \cup B$ (A, или B, или оба одновременно), дизъюнктивной суммы $A + B$ (либо A, либо B, но не оба вместе) и разности $A - B$ (A, но не B) двух совместных событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B);$$
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Поскольку $P(A \cap B) \geqslant 0$, то имеем следующие важные неравенства:

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B);$$
$$P(A + B) \leqslant P(A) + P(B);$$
$$P(A - B) \leqslant P(A).$$

Для несовместных событий $P(A \cap B) = 0$, и эти неравенства переходят в равенства.

Условная вероятность события B при условии выполнения события A принимается по определению

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

откуда для зависимых событий следует формула

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

Для независимых событий $P_A(B) = P(B)$, и поэтому

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

4. Поучительный пример. При использовании приведенных формул необходимо внимательно анализировать условие задачи и не упускать из виду важного обстоятельства, что вероятности событий и результат операций над ними должны быть определены на одном и том же основном множестве элементарных событий. Несоблюдение этого условия может привести к парадоксам, которые устраняются путем конкретизации задачи.

Пусть, например, требуется вычислить вероятность того, что атакующий бомбардировщик, который атакует лишь одну из двух целей, будет сбит над целью 1 или 2, если система противовоздушной обороны характеризуется вероятностью сбить бомбардировщик над первой целью $P_1 = 0{,}6$ и над второй целью $P_2 = 0{,}7$. Так как бомбардировщик не может быть сбит дважды, то события «быть сбитым над целью 1» и «быть сбитым над целью 2» несовместны. Тот, кто примет это в качестве основания для применения формулы суммы несовместных событий, получит несуразный результат $P_1 + P_2 = 0{,}6 + 0{,}7 = 1{,}3$.

Причина заключается в недоопределении задачи и необоснованном применении формулы суммирования. Значения P_1 и P_2 нельзя принимать за элементарные вероятности, так как они относятся к различным множествам элементарных событий. Поскольку бомбардировщик может быть сбит (событие B) только при условии его появления либо над целью 1 (событие A_1), либо над целью 2 (событие A_2), то по отношению к данному бомбардировщику необходимо рассматривать P_1 и P_2 как условные вероятности $P_1 = P_{A_1}(B)$ и $P_2 = P_{A_2}(B)$. События A_1 и A_2 образуют множество элементарных событий ($U = A_1 + A_2$, причем $P(A_1) + P(A_2) = 1$). В свою очередь, $A_1 = A_1 \cap B + A_1 \cap \overline{B}$ и $A_2 = A_2 \cap B + A_2 \cap \overline{B}$, следовательно, $U = A_1 \cap B + A_1 \cap \overline{B} + A_2 \cap B + A_2 \cap \overline{B}$.

Событию «быть сбитым над целью 1 или 2» благоприятствуют исходы $A_1 \cap B$ и $A_2 \cap B$, поэтому $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = P(A_1) P_{A_1}(B) + P(A_2) P_{A_2}(B)$. Таким образом, условие задачи необходимо дополнить значениями $P(A_1)$ или $P(A_2)$ или их отношением $P(A_1) : P(A_2) = \alpha$. При этом $P(B) = \frac{1}{1+\alpha} [\alpha P_{A_1}(B) + P_{A_2}(B)]$. Для равновероятных налетов на цели ($\alpha = 1$) имеем: $P(B) = 0{,}5\,(0{,}6 + 0{,}7) = 0{,}65$.

5. Формула полной вероятности. Рассмотренный пример иллюстрирует целесообразность решения общей задачи определения вероятности события B, которое может наступить при появлении одного из несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих *полную систему событий* ($A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$).

Так как $B = U \cap B = (A_1 + A_2 + \cdots + A^n) \cap B = A_1 \cap B + A_2 \cap \cap B + \cdots + A_n \cap B$, причем $A_i \cap B\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ — несовместные события, то $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$, откуда получаем *формулу полной вероятности:*

$$P(B) = P(A_1) P_{A_1}(B) + P(A_2) P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) P_{A_n}(B),$$

где $P_{A_i}(B)$ — условная вероятность наступления события B при условии, что произошло событие A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Пусть, например, в поступивших на склад трех партиях деталей процент годных составляет соответственно 89, 92 и 97%, а общее количество деталей в партиях относится как 1 : 2 : 3. Определим вероятность случайного выбора непригодной детали из всех трех партий. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что выбранная наугад деталь относится соответственно к первой, второй и третьей партиям. Так как эти события образуют полную систему, то $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$. По условию $P(A_1) : P(A_2) : P(A_3) = 1 : 2 : 3$, следовательно,

$$P(A_1) = \frac{1}{6};\ P(A_2) = \frac{1}{3};\ P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Рассматривая выбор непригодной детали как случайное событие B, вероятности такого события при условии, что деталь выбирается из первой, второй и третьей партий, соответственно имеют значения:

$$P_{A_1}(B) = 0{,}11; \; P_{A_2}(B) = 0{,}08; \; P_{A_3}(B) = 0{,}03.$$

Вероятность случайного выбора непригодной детали из всех трех партий определяется по формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(A_1) P_{A_1}(B) + P(A_2) P_{A_2}(B) + P(A_3) P_{A_3}(B) = \frac{1}{6}\,0{,}11 + \frac{1}{3}\,0{,}08 + \frac{1}{2}\,0{,}03 = 0{,}06.$$

6. Формула Бейеса. На основе коммутативности операции пересечения множеств ($A \cap B = B \cap A$) можно записать $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ или

$$P(A) P_A(B) = P(B) P_B(A).$$

Это соотношение справедливо и для случая, когда под A понимают некоторое событие A_i из полной системы событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, т. е. $P(A_i) P_{A_i} B = P(B) P_B(A_i)$, откуда

$$P_B(A_i) = P(A_i) \frac{P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Подставляя сюда $P(B)$ по формуле полной вероятности, получаем *формулу Бейеса:*

$$P_B(A_i) = P(A_i) \frac{P_{A_i}(B)}{P(A_1) P_{A_1}(B) + P(A_2) P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) P_{A_n}(B)}.$$

По этой формуле можно вычислить вероятности событий A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) при условии, что произошло событие B, если известны вероятности $P(A_i)$ и $P_{A_i}(B)$. Очевидно, получаемые при этом условные вероятности $P_B(A_i)$ удовлетворяют соотношению

$$P_B(A_1) + P_B(A_2) + \dots + P_B(A_n) = 1.$$

Так, для примера, рассмотренного в (5), $P_B(A_1)$ означает вероятность принадлежности детали к первой партии при условии, что эта деталь является непригодной. По формуле Бейеса находим:

$$P_B(A_1) = P(A_1) \frac{P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{0{,}11}{0{,}06} = \frac{11}{36}.$$

Аналогично получаем значения $P_B(A_2) = \frac{16}{36}$ и $P_B(A_3) = \frac{9}{36}$. Отсюда следует, что вероятности принадлежности негодной детали к первой, второй и третьей партии относятся как 11 : 16 : 9. Без уче-

та качества детали вероятности событий A_i $(i = 1, 2, 3)$ относились как $1:2:3$. Таким образом, введение дополнительного условия B (непригодность детали) приводит к перераспределению значений вероятностей полной системы событий $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Часто события A_i называют *гипотезами*, $P(A_i)$ — *априорными вероятностями*, $P_B(A_i)$ — *апостериорными вероятностями*, а саму формулу Бейеса — *теоремой гипотез*. Основанием для такой терминологии служат следующие соображения. Если известны только значения $P(A_i)$, то для получения $P_B(A_i)$ необходимо приписать какие-либо значения $P_{A_i}(B)$. При полном отсутствии информации о вероятности события B относительно событий A_i естественно считать $P_{A_1}(B) = P_{A_2}(B) = \cdots = P_{A_n}(B)$. Тогда из формулы Бейеса следует $P_B(A_i) = P(A_i)$, т. е. сделанное предположение означает, что в качестве первоначальных (априорных) вероятностей $P_B(A_i)$ приняты значения $P(A_i)$. После того как стали известны $P_{A_i}(B)$ (в результате проведенных экспериментов или получения дополнительной информации), по формуле Бейеса можно вычислить уточненные (апостериорные) вероятности $P_B(A_i)$.

Вернемся к нашему примеру. Пусть в поступивших трех партиях деталей обнаружено 180 негодных. Если отсутствуют сведения о проценте годных деталей каждой партии,то единственное, что можно сделать — это распределить негодные детали по партиям в отношениях $1:2:3$, т. е. к первой партии отнести 30 деталей, ко второй — 60 и к третьей — 90. Поставщики могут не согласиться с таким распределением. После того как они представили обоснованные данные о проценте пригодных деталей в каждой партии (соответственно 89, 92, и 97%), первоначальные соотношения уточняются как $11:16:9$, и непригодные детали разносятся по трем партиям соответственно в количествах 55, 80 и 45.

Другой пример относится к теории связи. Пусть передаваемый сигнал состоит из нулей и единиц, причем вероятность безошибочной передачи нуля $P_0(0) = 0{,}75$, а вероятность безошибочной передачи единицы $P_1(1) = 0{,}90$. В предположении, что в передаваемом сигнале — 40% нулей и 60% единиц, вероятность появления на выходе нуля определяется по формуле полной вероятности: $P(0)P_0(0) + P(1)P_1(0) = 0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}6 \cdot 0{,}10 = 0{,}36$. Если на выходе принят нуль, то априорная вероятность $P(0) = 0{,}4$ нуля на входе переходит в апостериорную вероятность, которая в соответствии с формулой Бейеса

$$P(0)\frac{P_0(0)}{P(0)P_0(0) + P(1)P_1(0)} = 0{,}4\frac{0{,}75}{0{,}36} = 0{,}833.$$

Полученный результат позволяет с вероятностью 0,833 утверждать, что при появлении на выходе нуля входным сигналом также является нуль.

7. Алгебра событий. События с позиций их осуществимости можно рассматривать как двузначные логические переменные, которые принимают значения 1 (событие происходит) или 0 (событие не происходит). При этом сложному событию соответствует логическая функция, которая представляется формулой булевой алгебры. Вероятность сложного события определяется как отображение события в интервал [0,1] множества действительных чисел.

Если сложное событие задано формулой алгебры множеств, то переход к соответствующей формуле алгебры логики легко осуществляется заменой соответственных операций: пересечения на конъюнкцию, объединения на дизъюнкцию, дополнения на отрицание. Соответствующие формулы для вероятностей событий, выраженные через логические операции, имеют вид:

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B);\ \ P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Для независимых событий $P(AB) = P(A)\,P(B)$, а для несовместных событий $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$. Вероятность конъюнкции нескольких зависимых событий выражается как $P(A_1A_2\ \dots\ A_n) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ \dots\ P_{A_1\dots A_{n-1}}(A_n)$.

Переход от логической формулы сложного события к его вероятности наиболее прост, если представить эту формулу как дизъюнкцию (сумму) членов, соответствующих несовместным событиям. Этому требованию всегда удовлетворяет совершенная дизъюнктивная нормальная форма, а также дизъюнкция любой совокупности непересекающихся s-кубов, образующих покрытие данной функции. Тогда вероятность сложного события получается заменой операций дизъюнкции арифметическим сложением и сопоставлением членам дизъюнктивной формы их вероятностей. В свою очередь, вероятность каждого члена, который представляет собой конъюнкцию событий, получается заменой операций конъюнкции арифметическим умножением и сопоставлением событиям их вероятностей (условных или безусловных) по формуле пересечения событий.

При определении вероятностей конъюнкций зависимых событий, в которые входят их отрицания, могут понадобиться значения $P_A(\bar{B})$ и $P_{\bar{A}}(B)$, в то время как известны $P(A)$, $P(B)$ и $P_A(B)$. Необходимые соотношения можно получить из тождеств $A = A(B \vee \bar{B}) = AB \vee A\bar{B}$ и $B = (A \vee \bar{A})\,B = AB \vee \bar{A}B$. Переходя к вероятностям, имеем $P(A) = P(A)\,P_A(B) + P(A)\,P_A(\bar{B})$ и $P(B) = P(A)\,P_A(B) + P(\bar{A})\,P_{\bar{A}}(B)$, откуда

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B);\ \ P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(B) - P(A)\,P_A(B)}{1 - P(A)}.$$

Для получения и преобразования формул событий используется аппарат алгебры логики, которая интерпретируется как *алгебра событий*. Независимо от формы исходного описания сложного события (множество, схема, граф, булева матрица, высказывание, таблица соответствия и т. п.) его можно привести к дизъюнкции несовместных событий, которую будем называть *канонической формой*.

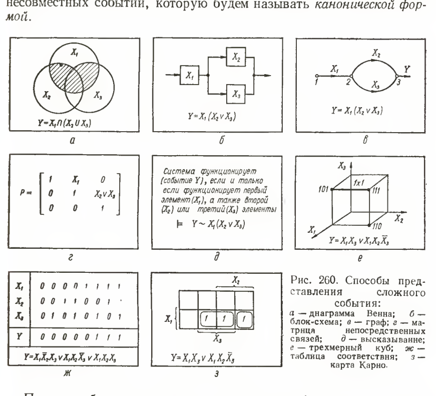


Рис. 260. Способы представления сложного события:
а — диаграмма Венна; *б* — блок-схема; *в* — граф; *г* — матрица непосредственных связей; *д* — высказывание; *е* — трехмерный куб; *ж* — таблица соответствия; *з* — карта Карно.

Пусть требуется определить вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) сложной системы, состоящей из трех независимо функционирующих элементов с надежностями $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$ и $p_3 = 0{,}9$. Система находится в рабочем состоянии только при условии функционирования первого и хотя бы одного из двух остальных элементов.

Обозначим через X_i событие «функционирует i-й элемент» ($i = 1, 2, 3$), а через Y — событие «функционирует система». Исходное описание может быть представлено в различных формах. Из диаграммы Венна (рис. 260, *а*), блок-схемы системы (рис. 260, *б*), графа событий (рис. 260, *в*) получаем логическую формулу $Y = X_1(X_2 \vee X_3)$. Эта же формула получается из матрицы непо-

средственных связей P (рис. 260, *г*), которая преобразуется в матрицу полных связей Q исключением узла *2* или умножением ее самой на себя, т. е.

$$Q = P^2 = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & 0 \\ 0 & 1 & X_2 \vee X_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1(X_2 \vee X_3) \\ 0 & 1 & X_2 \vee X_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда имеем $Y = q_{13} = X_1(X_2 \vee X_3)$. Если условие задачи рассматривать как сложное высказывание (рис. 260, *д*), то из тавтологии $\models Y \sim X_1(X_2 \vee X_3)$ следует $Y \leftrightarrow X_1(X_2 \vee X_3)$, что равносильно полученным ранее формулам. Переходя к вероятностям событий, получаем $P(Y) = p_1(p_2 + p_3 - p_2p_3)$.

Условие функционирования системы можно представить также таблицей соответствия (рис. 260, *ж*), из которой считываем совершенную дизъюнктивную нормальную форму $Y = X_1\overline{X}_2X_3 \vee X_1X_2\overline{X}_3 \vee \vee X_1X_2X_3$. Переходя к вероятностям, получаем $P(Y) = p_1(1 - p_2)p_3 + + p_1p_2(1 - p_3) + p_1p_2p_3 = p_1(p_2 + p_3 - p_2p_3)$. Если отобразить событие Y на трехмерном кубе (рис. 260, *е*) или на карте Карно (рис. 260, *з*), то его можно выразить через покрытие s-кубов $Y = = X_1X_3 \vee X_1X_2\overline{X}_3$ и, следовательно, $P(Y) = p_1p_3 + p_1p_2(1 - p_3) = = p_1(p_2 + p_3 - p_2p_3)$.

Подставляя численные значения вероятностей, находим надежность системы $P(Y) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8\ (1 - 0{,}9) = 0{,}686$.

8. **Принцип практической уверенности.** Если вероятность какого-либо события далека от единицы или нуля, то можно предсказать долю благоприятных для этого события исходов или его частоту лишь при достаточно большом числе повторений комплекса условий (испытаний). Но судить о появлении такого события при однократном испытании не представляется возможным.

Иначе обстоит дело, когда вероятность близка к единице или к нулю. Практически можно быть уверенным, что даже при однократном испытании в первом случае событие произойдет, а во втором не произойдет. В этом и состоит *принцип практической уверенности*, имеющий большое значение при решении конкретных задач.

Событие, вероятность которого близка к единице, называют *практически достоверным*, а событие, вероятность которого близка к нулю,— *практически невозможным*. Вопрос о том, как следует понимать «достаточную близость» вероятности к единице или нулю, решается в каждом отдельном случае на основе опыта, а также с учетом возможных последствий. Так, никто не откажется от намеченной загородной прогулки из-за того, что вероятность остаться без билета составляет 0,01. Но вряд ли нашлись бы желающие воспользоваться авиалинией, на которой из каждой сотни рейсов один заканчивается катастрофой. Если известно, что из 10 000 лампочек

только одна может оказаться негодной, то вероятностью брака можно пренебречь, и вся партия будет принята как практически безупречная. Однако в десятки раз меньшая вероятность выигрыша автомобиля вовсе не игнорируется многими участниками лотереи.

9. Субъективная вероятность. Принцип практической уверенности не следует смешивать с *субъективным представлением* о вероятности как степени уверенности в благоприятном исходе для данного события или в справедливости данного суждения. Некоторые авторы склонны принять такое представление, даже в качестве наиболее общего определения вероятности.

Несостоятельность подмены понятия вероятности, как объективной характеристики причинно-следственных связей между явлениями массового характера, субъективной оценкой возможности события очевидна. В то же время следует считаться с тем, что часто в практической деятельности не существует другого способа выразить отношение к тому или иному событию, явлению или суждению. В подобных случаях, например, говорят: имеется 75% уверенности (или шанс три к четырем), что изменение конструкции приведет к улучшению характеристик двигателя; степень достоверности измерений одной серии вдвое больше, чем измерений другой; вероятнее всего, что картина написана не Шишкиным, а его подражателями.

Разумеется, практическая ценность подобных утверждений зависит от личного опыта их авторов, в котором сложным образом переплетаются предыдущие наблюдения с рассуждениями по аналогии.

Понимая, что никакое субъективное суждение о вероятности не может заменить строгого определения этого понятия, не следует слишком сурово относиться к использованию субъективной вероятности в тех случаях, когда практически не существует никакой другой возможности выразить отношение к степени достоверности того или иного события. Необходимо также принять во внимание, что субъективная оценка обычно носит временный характер и часто служит рабочей гипотезой, которая уточняется по мере развития событий.

Типичным примером в этом смысле может служить применение формулы Бейеса. Если не известны точные значения условных вероятностей $P_{A_i}(B)$, но из каких-либо соображений их можно оценить приближенно, то априорные вероятности гипотез A_i вовсе не обязательно связывать с условием $P_{A_1}(B) = P_{A_2}(B) = \ldots = P_{A_n}(B)$. Более целесообразно принять приближенные значения $P'_{A_i}(B)$ и вычислить априорные вероятности $P'_B(A_i)$ по формуле Бейеса. После того как получены уточненные значения $P'_{A_i}(B)$, по этой же формуле вычисляются апостериорные вероятности. Так, при условиях рассмотренного в (6) примера потребителю деталей может быть

известно, что поставщики первой и второй партии обычно допускают примерно втрое больше брака, чем поставщик третьей партии. Тогда при определении априорных вероятностей естественно принять $P'_{A_1}(B) = P'_{A_2}(B) = 3P'_{A_3}(B)$, на основании чего находим

$$P'_B(A_1) = P(A_1)\frac{3P'_{A_3}(B)}{P(A_1)\ 3P'_{A_3}(B) + P(A_2)\ 3P'_{A_3}(B) + P(A_3)\,P'_{A_3}(B)} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{\frac{1}{6}\ 3 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично определяются $P'_B(A_2) = \frac{1}{2}$ и $P'_B(A_3) = \frac{1}{4}$. Таким образом, в соответствии с принятым приближением априорные вероятности брака в трех партиях относятся как 1 : 2 : 1,что значительно ближе к уточненному (апостериорному) отношению 11 : 16 : 9, чем принятое раньше отношение 1 : 2 : 3.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вероятность того, что давление в системе превысит номинальное значение, равна p_1. При повышенном давлении вероятность повреждения равна p_2. Определите вероятность повреждения вследствие повышения давления.

2. Детали могут изготавливаться с применением двух технологий. Одна из них включает три технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Другая включает две операции с одинаковыми вероятностями получения брака, равными 0,3. Определите, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если для небракованной детали вероятность принадлежности к первому сорту по первой технологии равна 0,9, а по второй — 0,8.

3. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, причем $P(A_i) = p_i$ и $P(\overline{A}_i) = 1 - p_i = q_i$. Покажите, что вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, выражается соотношением

$$p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i$$

4. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

5. Из 180 студентов, сдававших экзамены по английскому языку и математике, 15 не сдали экзамен по математике, 10 не сдали экзамен по английскому языку и 5 не сдали обоих экзаменов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный студент:

а) не сдал экзамен по математике и сдал экзамен по аглийскому языку;

б) сдал экзамен по математике и не сдал экзамен по английскому языку.

6. Покажите, что вероятность объединения трех событий выражается формулой $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$.

7. Пусть три события A, B, C из множества элементарных событий являются полностью независимыми и их вероятности $P(A) = 1/3$; $P(B) = 1/6$; $P(C) = 2/5$. Найдите вероятности событий, определенных следующими теоретико-множественными соотношениями:

а) $P = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$;

б) $Q = \overline{A \cup B \cup C}$;

в) $R = \overline{A} \cap B \cap C \cap (A \cup B)$;

г) $S = ((A \cap C) \cup \overline{B}) \cap ((A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C))$.

При решении задачи предварительно упростите эти соотношения и используйте соответствующие формулы для вероятностей независимых событий.

8. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найдите вероятность появления только одного из этих событий.

9. Вычислительное устройство состоит из трех блоков, вероятности сбоя в каждом из которых относятся как 1 : 4 : 5, а вероятности обнаружения сбоя в них соответственно равны 0,8; 0,9 и 0,95. Найдите вероятность того, что возникший в устройстве сбой будет обнаружен.

10. Три машины в цехе выпускают одинаковые детали, причем первая машина производит 30% всех деталей, вторая — 25%, а третья — 45%. Брак равняется соответственно 1; 1,2 и 2% от выпускаемой каждой машиной продукции. Какая вероятность того, что случайно выбранная деталь из 10 000 произведенных в течение месяца окажется бракованной? Если она окажется бракованной, то какова вероятность того, что она была произведена данной машиной?

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Дискретные случайные величины. Величина x, которая при данном комплексе условий принимает одно из своих возможных значений x_i с вероятностью $P(x_i) = P(x = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется *дискретной случайной величиной*. Принятие величиной x значения x_i можно рассматривать как случайное событие, причем все такие события образуют полную систему событий.

Функция $p(x)$, сопоставляющая каждому значению x_i случайной величины вероятность этого значения $P(x_i)$, полностью определяет случайную величину и называется *дискретным распределением* или *функцией вероятностей*. Эта функция может быть задана таблицей, графом или множеством упорядоченных пар $(x_i, P(x_i))$.

Функция $F(x_i) = P(x \leqslant x_i)$, определяющая вероятность того, что случайная величина *не превышает* значения x_i, называется *интегральной функцией распределения*, причем

$$F(x_i) = \sum_{x \leqslant x_i} p(x).$$

Ясно, что при $x_i \leqslant x_j$; $F(x_i) \leqslant F(x_j)$, т. е. интегральная функция распределения монотонно возрастающая, причем $0 \leqslant F(x_i) \leqslant 1$.

Дополнение $F(x_i)$ до единицы дает вероятность того, что случайная величина *превышает* значение x_i, т. е.

$$P(x > x_i) = 1 - F(x_i).$$

Так как $P(x \leqslant x_i) + P(x_i < x \leqslant x_j) = P(x \leqslant x_j)$, то вероятность попадания значений случайной величины в интервал $x_i < x \leqslant x_j$ можно вычислить для данной функции распределения по формуле:

$$P(x_i < x \leqslant x_j) = F(x_j) - F(x_i).$$

Любую характеристику случайной величины, из которой по известным правилам можно получить ее распределение, называют *законом распределения* этой величины.

Поясним это определение на примере бросания двух игральных костей. Множество элементарных событий U состоит из 36 элементов (a, b), где a и b — число очков, выпавшее при бросании первой и второй кости. Рассмотрим случайную величину x, значения которой x_i равны сумме очков $a + b$. При каждом испытании эта величина принимает одно из одиннадцати возможных значений (от 2 до 12). Считая элементарные события равновероятными и подсчитывая число таких событий m_i, для которых $x = x_i$, находим вероятности $P(x_i) = P(x = x_i)$, а также значения интегральной функции распределения $F(x_i) = P(x \leqslant x_i)$:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Графики распределения $P(x_i)$ и интегральной функции распределения $F(x_i)$ изображены на рис. 261.

2. Дискретные распределения. В практике широко используются типичные распределения случайных величин, которые обслуживают определенные классы задач. Одна из таких задач состоит в рассмотрении независимых многократно повторяющихся испытаний, называемых *испытаниями Бернулли*. Каждое из них приводит к одному из двух возможных исходов: событие наступает *(успех)*

или не наступает *(неудача)*. Вероятность наступления события p не меняется от испытания к испытанию. Требуется определить вероятность, с которой при n испытаниях событие наступает точно x раз. В этих условиях случайной величиной является число успешных исходов, которое может принимать значения от 0 до n.

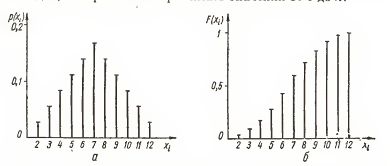


Рис. 261. Графики распределения суммы очков при бросании двух игральных костей:
а — функция вероятностей; *б* — интегральная функция распределения

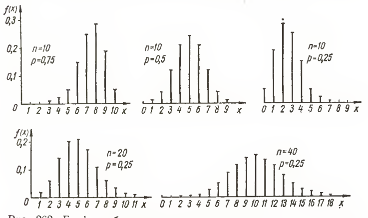


Рис. 262. Графики биномиального распределения при различных значениях параметров n и p.

Событие может появиться в n испытаниях точно x раз $(0 \leqslant x \leqslant n)$ C_n^x различными одинаково возможными способами. Так как испытания независимы, то каждому такому способу соответствует вероятность $p^x(1-p)^{n-x}$. На основании теоремы о сумме вероятностей получаем распределение рассматриваемой случайной величины:

$$f(x;\, n,\, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x (1-p)^{n-x}.$$

Название	Распределение	Параметры	Математическое ожидание
Биномиальное	$f(x;\ n,\ p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	$0 \leqslant p \leqslant 1$; $n \in N$ (N—множество положительных целых чисел)	np
Мультиномиальное	$f(x_1, \ldots, x_k;\ n;\ p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} p_1^{x_1} \ldots p_k^{x_k}$, $x_i = 0, 1, 2, \ldots$ $(i = 1, \ldots, k)$; $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$	$n \in N$; $p_1 > 0, \ldots, p_k > 0$; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$	np_i
Гипергеометрическое	$f(x;\ m,\ n,\ k) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{m-k}}{C_n^m}$, $x \leqslant k;\ n - x \leqslant m - k$	$m,\ n,\ k \in N$	$\frac{nk}{m}$
Геометрическое	$f(x;\ p) = p(1-p)^x$, $x = 1, 2, \ldots$	$0 \leqslant p \leqslant 1$	$\frac{1-p}{p}$
Распределение Паскаля (или отрицательное биномиальное)	$f(x;\ s,\ p) = C_{x+s-1}^{s-1} p^s (1-p)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$	Паскаля, если $s \geqslant 0$; отрицательное биномиальное, если $s \in N$	$\frac{s(1-p)}{p}$
Распределение Пуассона	$f(x;\ \lambda) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$	$\lambda t\ (\lambda > 0)$	λt

распределения

Таблица 8

Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	Применение
$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$	Вероятность появления события (исхода) x раз в n независимых испытаниях, когда вероятность p события в каждом испытании постоянна (извлечения с возвращением)
$np_i(1-p_i)$, $i=1, 2, \dots, k$	$\frac{1-2p_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$, $i=1, 2, \dots, k$	$\frac{1-6p_i(1-p_i)}{np_i(1-p_i)}$, $i=1, 2, \dots, k$	Вероятность появления i-го события (исхода) x_i раз в n испытаниях, когда вероятности событий p_i постоянны и события x_i образуют полную группу
$\frac{nk(m-k)(m-n)}{m^2(m-1)}$	—	—	Вероятность появления x исправных изделий в выборке объема m, взятой из совокупности объема n, которая содержит k неисправных изделий (извлечения без возвращения)
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$\frac{p^2-6p+6}{1-p}$	Вероятность того, что потребуется x испытаний Бернулли, прежде чем будет получен успешный исход
$\frac{s(1-p)}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{s(1-p)}}$	$\frac{p^2-6p+6}{s(1-p)}$	Вероятность того, что потребуется провести x испытаний Бернулли для появления s успешных исходов
λt	$\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$	$\frac{1}{\lambda t}$	Вероятность появления x независимых событий в данном интервале времени t, когда события происходят с постоянной интенсивностью λ

Это выражение представляет собой общий член разложения бинома $(p+q)^n$, где $q = 1 - p$, откуда и его название — *биномиальное распределение*. Легко проверяется общее свойство:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x;\ n,\ p) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1.$$

Величины n и p являются *параметрами*, полностью характеризующими биномиальное распределение как дискретную функцию от x. Графики биномиального распределения при различных значениях параметров показаны на рис. 262.

Определим, например, вероятность того, что из запланированных запусков десяти ракет успешными будут не менее девяти, если вероятность успеха для каждой ракеты равна 0,95. Искомый результат выражается суммой $f(9;\ 10;\ 0{,}95) + f(10;\ 10;\ 0{,}95) = C_{10}^{9} \cdot 0{,}95^9 \times \times 0{,}05 + C_{10}^{10} \cdot 0{,}95^{10} = 10 \cdot 0{,}630 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}599 = 0{,}315 + + 0{,}599 = 0{,}914$.

В табл. 8 приведены другие дискретные распределения, наиболее часто встречающиеся в инженерной практике (теория надежности, контроль качества, системы массового обслуживания и т. д.).

3. Непрерывные случайные величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать любое значение в интервале ее определения. Интегральная функция распределения случайной величины $F(x_i) = P(x \leqslant x_i)$, как и для дискретной величины, определяет вероятность того, что x не превосходит значения x_i. Имеют место также аналогичные соотношения: $P(x_1 < x \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1)$; $P(x > x_i) = 1 - F(x_i)$ и $F(x_i) \leqslant F(x_j)$ при $x_i \leqslant x_j$. Кроме того, $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.

Поскольку множество значений непрерывной случайной величины бесконечно и несчетно, то вероятность, соответствующая любому ее конкретному значению,— бесконечно малая величина. Поэтому значение вероятности нахождения случайной величины x в интервале от x_1 до x_2 не зависит от включения в этот интервал его крайних точек x_1 и x_2, т. е. $P(x_1 < x \leqslant x_2) = P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = P(x_1 < x < x_2) = = F(x_2) - F(x_1)$.

Для непрерывной случайной величины закон распределения $p(x_i) = P(x = x_i)$ не имеет смысла и вместо него определяется *плотность распределения (функция плотности, плотность вероятности, дифференциальная функция распределения)*

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_i \leqslant x \leqslant x_i + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}.$$

С учетом приведенных выше выражений имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz; \quad P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Из этих соотношений видно, что площадь под кривой плотности распределения (рис. 263) равна единице. Заштрихованные части площади равны вероятности того, что значение случайной величины меньше x_1, больше x_2 (рис. 263, *а*) или лежит между x_1 и x_2 (рис. 263, *б*).

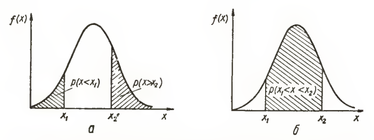


Рис. 263. Графики плотности распределения $f(x)$, где площадь заштрихованных участков равна вероятности того, что: *а* — $x < x_1$ или $x > x_2$; *б* — x находится между x_1 и x_2.

4. Нормальное распределение. Из непрерывных распределений наиболее часто используется *нормальное (гауссово)* распределение, плотность которого

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

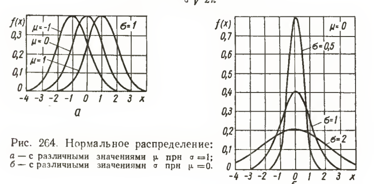
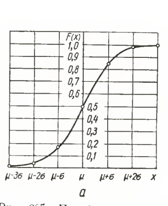


Рис. 264. Нормальное распределение: *а* — с различными значениями μ при $\sigma = 1$; *б* — с различными значениями σ при $\mu = 0$.

где μ и σ — параметры распределения. Интегральная функция этого распределения выражается соотношением

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z-\mu}{2\sigma^2}} dz.$$

Графики $f(x)$, называемые *нормальными кривыми*, при различных значениях σ и μ показаны на рис. 264. Эта функция имеет максимум при $x = \mu$ и симметрична относительно перпендикуляра к оси абсцисс в точке $x = \mu$. Изменение параметра μ не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси x (вправо, если μ возрастает, и влево, если μ убывает). С возрастанием σ максимум нормальной кривой $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ убывает, а сама кривая становится более пологой.



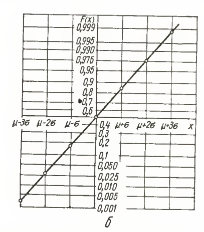


Рис. 265. Преобразование графика интегральной функции нормального распределения:

а — исходный график; *б* — линеаризованный график.

График интегральной функции нормального распределения $F(x; \mu, \sigma)$ показан на рис. 265, *а*. Изменением шкалы по оси ординат его можно представить прямой линией (рис. 265, *б*). Систему координат с такой шкалой называют *вероятностной бумагой*, которая удобна для обнаружения нормального закона распределения по совокупности экспериментальных значений $F(x; \mu, \sigma)$.

Если x — нормально распределенная величина с произвольными μ и σ, то *нормированная* величина

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

также распределена по нормальному закону, но с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, т. е.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}; \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Для определения значений $f(x; \mu, \sigma)$ и $F(x; \mu, \sigma)$ достаточно располагать таблицами для $f(y)$ и $F(y)$ нормированной случайной величины. Обычно в таких таблицах приводятся значения только для $y \geqslant 0$, так как из симметрии нормальной кривой следует, что

$$f(-y) = f(y); \quad F(-y) = 1 - F(y).$$

Функцию $F(y)$ можно записать в виде

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где первый интеграл равен 0,5, а второй является стандартной функцией, называемой *интегралом Лапласа*

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Таким образом, имеем соотношение

$$F(y) = \Phi(y) + 0{,}5.$$

В табл. 9 приведены значения интеграла Лапласа $\Phi(y)$ для значений y от 0 до 4,99 с дискретностью 0,01. Значения для отрицательных y определяется соотношением $\Phi(-y) = -\Phi(y)$. С помощью табл. 9 легко определяются значения интегральной функции нормального распределения при любых μ и σ:

$$F(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

5. Вероятность попадания в заданный интервал. Эта вероятность для нормально распределенной случайной величины с параметрами μ и σ определяется соотношением:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $y_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$; $y_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$, и выражается через интегралы Лапласа следующим образом:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{y_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dt = \Phi(y_2) - \Phi(y_1),$$

или

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

Таблица 9

Значения интеграла Лапласа $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

y	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,490097	0,490358	0,490613	0,490863	0,491106	0,491344	0,491576
2,4	0,491802	0,492024	0,492240	0,492451	0,492656	0,492857	0,493053	0,493244	0,493431	0,493613

2,5	0,493790	0,493963	0,494132	0,494297	0,494457	0,494614	0,494766	0,494915	0,495060	0,495201
2,6	0,495339	0,495473	0,495604	0,495731	0,495855	0,495975	0,496093	0,496207	0,496319	0,496427
2,7	0,496533	0,496636	0,496736	0,496833	0,496928	0,497020	0,497110	0,497197	0,497282	0,497365
2,8	0,497445	0,497523	0,497599	0,497673	0,497744	0,497814	0,497882	0,497948	0,498012	0,498074
2,9	0,498134	0,498193	0,498250	0,498305	0,498359	0,498411	0,498462	0,498511	0,498559	0,498605
3,0	0,498650	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498930	0,498965	0,498999
3,1	$0,49^{2}032$	$0,49^{2}064$	$0,49^{2}095$	$0,49^{2}126$	$0,49^{2}155$	$0,49^{2}183$	$0,49^{2}211$	$0,49^{2}237$	$0,49^{2}263$	$0,49^{2}288$
3,2	$0,49^{2}312$	$0,49^{2}336$	$0,49^{2}359$	$0,49^{2}381$	$0,49^{2}402$	$0,49^{2}423$	$0,49^{2}442$	$0,49^{2}462$	$0,49^{2}481$	$0,49^{2}499$
3,3	$0,49^{2}516$	$0,49^{2}533$	$0,49^{2}549$	$0,49^{2}565$	$0,49^{2}581$	$0,49^{2}595$	$0,49^{2}610$	$0,49^{2}624$	$0,49^{2}637$	$0,49^{2}650$
3,4	$0,49^{2}663$	$0,49^{2}675$	$0,49^{2}686$	$0,49^{2}698$	$0,49^{2}709$	$0,49^{2}719$	$0,49^{2}729$	$0,49^{2}739$	$0,49^{2}749$	$0,49^{2}758$
3,5	$0,49^{2}767$	$0,49^{2}775$	$0,49^{2}784$	$0,49^{2}792$	$0,49^{2}799$	$0,49^{2}807$	$0,49^{2}814$	$0,49^{2}821$	$0,49^{2}828$	$0,49^{2}834$
3,6	$0,49^{2}840$	$0,49^{2}846$	$0,49^{2}852$	$0,49^{2}858$	$0,49^{2}863$	$0,49^{2}868$	$0,49^{2}873$	$0,49^{2}878$	$0,49^{2}883$	$0,49^{2}887$
3,7	$0,49^{2}892$	$0,49^{2}896$	$0,49^{3}003$	$0,49^{3}042$	$0,49^{3}079$	$0,49^{3}115$	$0,49^{3}150$	$0,49^{3}183$	$0,49^{3}215$	$0,49^{3}246$
3,8	$0,49^{3}276$	$0,49^{3}305$	$0,49^{3}332$	$0,49^{3}359$	$0,49^{3}384$	$0,49^{3}409$	$0,49^{3}433$	$0,49^{3}455$	$0,49^{3}477$	$0,49^{3}498$
3,9	$0,49^{3}519$	$0,49^{3}538$	$0,49^{3}557$	$0,49^{3}575$	$0,49^{3}592$	$0,49^{3}609$	$0,49^{3}625$	$0,49^{3}640$	$0,49^{3}655$	$0,49^{3}669$
4,0	$0,49^{3}683$	$0,49^{3}696$	$0,49^{3}709$	$0,49^{3}721$	$0,49^{3}732$	$0,49^{3}743$	$0,49^{3}754$	$0,49^{3}764$	$0,49^{3}774$	$0,49^{3}784$
4,1	$0,49^{3}793$	$0,49^{3}802$	$0,49^{3}810$	$0,49^{3}818$	$0,49^{3}826$	$0,49^{3}833$	$0,49^{3}840$	$0,49^{3}847$	$0,49^{3}854$	$0,49^{3}860$
4,2	$0,49^{3}866$	$0,49^{3}872$	$0,49^{3}877$	$0,49^{3}883$	$0,49^{3}888$	$0,49^{3}893$	$0,49^{3}897$	$0,49^{4}022$	$0,49^{4}065$	$0,49^{4}106$
4,3	$0,49^{4}146$	$0,49^{4}183$	$0,49^{4}219$	$0,49^{4}254$	$0,49^{4}287$	$0,49^{4}319$	$0,49^{4}349$	$0,49^{4}378$	$0,49^{4}406$	$0,49^{4}433$
4,4	$0,49^{4}458$	$0,49^{4}483$	$0,49^{4}506$	$0,49^{4}528$	$0,49^{4}550$	$0,49^{4}570$	$0,49^{4}590$	$0,49^{4}608$	$0,49^{4}626$	$0,49^{4}643$
4,5	$0,49^{4}660$	$0,49^{4}675$	$0,49^{4}690$	$0,49^{4}705$	$0,49^{4}718$	$0,49^{4}731$	$0,49^{4}744$	$0,49^{4}756$	$0,49^{4}767$	$0,49^{4}778$
4,6	$0,49^{4}788$	$0,49^{4}798$	$0,49^{4}808$	$0,49^{4}817$	$0,49^{4}825$	$0,49^{4}834$	$0,49^{4}841$	$0,49^{4}849$	$0,49^{4}856$	$0,49^{4}863$
4,7	$0,49^{4}869$	$0,49^{4}876$	$0,49^{4}882$	$0,49^{4}887$	$0,49^{4}893$	$0,49^{4}898$	$0,49^{5}032$	$0,49^{5}078$	$0,49^{5}123$	$0,49^{5}166$
4,8	$0,49^{5}206$	$0,49^{5}245$	$0,49^{5}282$	$0,49^{5}317$	$0,49^{5}350$	$0,49^{5}382$	$0,49^{5}413$	$0,49^{5}442$	$0,49^{5}469$	$0,49^{5}495$
4,9	$0,49^{5}520$	$0,49^{5}544$	$0,49^{5}567$	$0,49^{5}588$	$0,49^{5}609$	$0,49^{5}628$	$0,49^{5}647$	$0,49^{5}665$	$0,49^{5}682$	$0,49^{5}698$

Примечание. Верхний индекс у цифры 9 показывает, сколько раз она появляется в данном значении.

При $x_1 = \mu - \alpha$ и $x_2 = \mu + \alpha$ с учетом симметрии нормальной кривой относительно прямой $x = \mu$ имеем

$$P(\mu - \alpha < x < \mu + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha/\sigma}^{\alpha/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Обозначив $z = \frac{\alpha}{\sigma}$, получим выражение для вероятности того, что отклонение нормально распределенной случайной величины x от значения μ не превышает α:

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2\Phi(z) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Функцию $\psi(z)$ часто называют *интегралом вероятности*. В частности, если $\alpha = K\sigma$, то $z = K$ и $\psi(K) = 2\Phi(K)$, причем, $\psi(1) = 0,68269$; $\psi(2) = 0,95450$; $\psi(3) = 0,99730$; $\psi(4) = 0,9999367$ и $\psi(5) = 0,999999427$. Как видно, уже при $\alpha = 3\sigma$ интеграл вероятности только на 0,0027 отличается от единицы. Иначе говоря, лишь в 0,27% случаев отклонение случайной величины от μ может превысить 3σ, что практически считается невозможным событием *(правило трех сигм)*. Если распределение случайной величины неизвестно, но условие по правилу трех сигм выполняется, то имеются основания предполагать, что изучаемая величина распределена по нормальному закону.

Пусть, например, техническими условиями задано, что длина некоторой детали должна лежать между 24 и 25 см, причем, длина детали — нормально распределенная величина с $\mu = 24,6$ см и $\sigma = 0,4$ см. Определим, какая доля изготовленных деталей не удовлетворяет техническим условиям.

Вероятность попадания длины деталей в заданный интервал определяется соотношением:

$$P(24 < x < 25) = \Phi\left(\frac{25 - 24,6}{0,4}\right) - \Phi\left(\frac{24 - 24,6}{0,4}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1,5) = \Phi(1) + \Phi(1,5).$$

По табл. 9 находим: $\Phi(1) = 0,3413$ и $\Phi(1,5) = 0,4332$, следовательно,

$$P(24 < x < 25) = 0,3413 + 0,4332 = 0,7745.$$

Это значит, что техническим условиям удовлетворяют 77,4% деталей, а 22,6% деталей будут иметь размеры, выходящие за допустимые пределы.

Нормальное распределение занимает особое место в теории вероятностей, а нормально распределенные величины широко применяются в практике. Это связано со следующим положением, вытекающим из *центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова.*

Если случайная величина x представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то x распределена по закону, близкому к нормальному.

Такое положение имеется, например, при измерении физических величин. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины. Так как на результат измерения влияет большое число различных независимых случайных факторов (условия окружающей среды, электрические и механические помехи и т. п.), то можно полагать, что ошибка измерения имеет нормальное распределение. Этот вывод часто подтверждается на практике.

Кроме нормального распределения широко используются другие типы распределений случайных величин, наиболее важные из которых приведены в табл. 10. Там же, как и в табл. 8, даны характеристики распределений, о которых пойдет речь ниже.

6. Центр распределения. Одной из наиболее важных характеристик распределения является *центр распределения* — точка, к которой тяготеют значения случайной величины.

В качестве такой характеристики чаще всего употребляется *математическое ожидание (среднее значение)*, которое для дискретной и непрерывной случайных величин определяется соответственно как

$$M(x) = \sum_i x_i p(x_i); \quad M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Например, математическое ожидание суммы очков при бросании двух игральных костей находим в соответствии со значениями $p(x_i)$, приведенными в (1):

$$M(x) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + \\ + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Для экспоненциального распределения интегрированием по частям находим:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Название	Плотность распределения	Параметры	Математическое ожидание
Нормальное	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	$-\infty<\mu<\infty$ $\sigma>0$	μ
Гамма-распределение	$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)}x^{\eta-1}e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0 \text{ при } x<0\end{cases}$	$\lambda>0$ $\eta>0$	$\frac{\eta}{\lambda}$
Экспоненциальное	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 \text{ при } x\leqslant 0\end{cases}$	$\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$
Бета-распределение	$f(x)=$ $=\begin{cases}\frac{\Gamma(\eta+\gamma)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}(1-x)^{\eta-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$	$\eta>0$ $\gamma>0$	$\frac{\gamma}{\eta+\gamma}$
Равномерное	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mu_1-\mu_0}, & \mu_0\leqslant x\leqslant\mu_1\\ 0 \text{ в остальных случаях}\end{cases}$	$\mu_0,\ \mu_1$ $\mu_0<\mu_1$	$\frac{\mu_0+\mu_1}{2}$
Логарифмически нормальное	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x-\mu)^2} & \text{при } x>0\\ 0 \text{ при } x\leqslant 0\end{cases}$	$-\infty\leqslant\mu\leqslant\infty$ $\sigma>0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

распределения

Таблица 10

Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	Применение
σ^2	0	0	Основное распределение математической статистики. Является приемлемой моделью для многих физических явлений вследствие того, что при довольно общих условиях распределение среднего n наблюдений стремится к нормальному, независимо от формы исходного распределения при $n \to \infty$
$\frac{\eta}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\eta}}$	$\frac{6}{\eta}$	Основное распределение математической статистики для случайных величин, ограниченных с одной стороны ($0 \leqslant x \leqslant \infty$). Описывает время, необходимое для появления η событий при условии, что они независимы и появляются с постоянной интенсивностью λ
$\frac{1}{\lambda^2}$	2	9	Распределение времени между независимыми событиями, появляющимися с постоянной интенсивностью. Частный случай распределения Вейбулла и гамма-распределения
$\frac{\eta\gamma}{(\eta+\gamma)^2(\eta+\gamma+1)}$	—	—	Основное распределение математической статистики для случайных величин, ограниченных с обеих сторон ($0 \leqslant x \leqslant 1$). Например, распределение доли совокупности, заключенной между наименьшим и наибольшим значением выборки
$\frac{(\mu_1-\mu_0)^2}{12}$	0	—1,2	Дает вероятность того, что наблюдение будет лежать в определенном интервале, когда вероятность того, что наблюдение принадлежит данному интервалу, прямо пропорциональна его длине. Частный случай бета-распределения
$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\,(e^{\sigma^2}+2)$	—	Описывает случайные величины, логарифм которых распределен по нормальному закону. Применимо, когда наблюдаемое значение случайной величины составляет случайную долю ранее наблюдавшегося явления

Название	Плотность распределения	Параметры	Математическое ожидание
Распределение Вейбулла	$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}}, & x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$	$\eta > 0$, $\sigma > 0$	$\sigma\Gamma\left(\frac{1}{\eta}+1\right)$

Из определения ясно, что математическое ожидание постоянной величины равно этой же величине, а математическое ожидание суммы (произведения) независимых случайных величин равно сумме (произведению) математических ожиданий слагаемых (сомножителей).

Другой характеристикой центра распределения является *медиана*, равная такому значению a непрерывной случайной величины x, перпендикуляр из которой делит пополам площадь под кривой плотности распределения $f(x)$. Эта точка определяется из соотношения

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = 0{,}5.$$

Так, для экспоненциального распределения медиану a находим, решая уравнение

$$\int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 0{,}5,$$

которое после интегрирования приводится к $e^{-\lambda a} = 0{,}5$, откуда

$$a = \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

В качестве характеристики центра распределения используется также *мода*. Для дискретной случайной величины она равна наиболее вероятному значению случайной величины (так, мода равна 7 в примере бросания двух игральных костей). Мода непрерывной случайной величины равна максимальному значению плотности распределения (например, для экспоненциального распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geqslant 0$ и $\lambda > 0$ мода определяется значением $x = 0$).

Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	Применение
$\sigma^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\eta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\eta}+1\right)\right]^2\right\}$	—	—	Общее распределение времени безотказной работы при самых разнообразных интенсивностях отказов. Распределение экстремальных значений для минимальных элементов, взятых из N значений, которые имеют ограниченное слева распределение

На рис. 266 указаны характеристики центра некоторого распределения. Следует заметить, что крайние значения плотности распределения существенно влияют на математическое ожидание, значительно слабее от них зависит медиана, а мода вовсе не чувствительна к ним.

7. Моменты распределения. Сравнительно большие, но маловероятные значения случайной величины оказывают слабое влияние на математическое ожидание. Для более полного учета влияния таких значений используются характеристики, называемые *моментами распределения*.

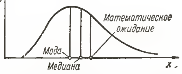
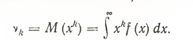


Рис. 266. Расположение математического ожидания, медианы и моды некоторого распределения.

Начальным моментом порядка k *(k-м моментом)* случайной величины x называют математическое ожидание величины x^k, т. е.



$$\nu_k = M(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx.$$

Центральным моментом порядка k случайной величины x называют математическое ожидание k-й степени ее отклонения $x - M(x)$ от среднего значения:

$$\mu_k = M((x - M(x))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k f(x)\,dx.$$

Для дискретных случайных величин вместо интегралов записываются суммы:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p(x_i); \quad \mu_k = \sum_i (x_i - M(x))^k p(x_i).$$

Первый начальный момент совпадает с математическим ожиданием, т. е. $\nu_1 = M(x)$. Первый центральный момент всегда равен

нулю, так как $\mu_1 = M(x - M(x)) = M(x) - M(x) = 0$. Зависимости между моментами легко получить, сопоставляя их выражения на основе свойств математического ожидания. Так, $\mu_2 = M((x - \nu_1)^2) = M(x^2 - 2x\nu_1 + \nu_1^2) = M(x^2) - 2\nu_1 M(x) + M(\nu_1^2) = \nu_2 - 2\nu_1\nu_1 + \nu_1^2$, откуда

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Аналогично находим другие соотношения:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Распределения, как правило, могут быть описаны с помощью первых четырех моментов, а моменты более высоких порядков используются редко.

Второй центральный момент μ_2 является показателем рассеивания и называется *дисперсией*. Она обычно обозначается через $D(x)$ и определяется для дискретной и непрерывной случайных величин соответственно

$$D(x) = \sum_i (x_i - M(x))^2 p(x_i); \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)\,dx.$$

Дисперсия постоянной величины равна нулю. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат. Дисперсия как суммы, так и разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, т. е.

$$D(x \pm y) = D(x) + D(y).$$

Квадратный корень из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением*, т. е.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)},$$

причем, саму дисперсию $D(x)$ часто обозначают через $\sigma^2(x)$.

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону, математическое ожидание и среднее квадратическое значение совпадают соответственно с параметрами μ и σ. На основании результатов, полученных в (5), можно утверждать, что 68,3% значений нормально распределенной величины попадают в интервал $\mu \pm \sigma$, 95,5% значений — в интервал $\mu \pm 2\sigma$, 99,7% значений — в интервал $\mu \pm 3\sigma$. При рассмотрении любых других распределений с конечными математическими ожиданиями μ и дисперсией σ^2 вероятность попадания значений случайной величины в интервал можно оценить с помощью *неравенства Чебышева*. Согласно этому неравенству, по крайней мере, $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot 100\%$ значений случайной величины находится в интервале $\mu \pm k\sigma$.

Третий центральный момент μ_3 характеризует отклонение кривой распределения от симметричной. Кривая распределения с одной вершиной при $\mu_3 < 0$ имеет левостороннюю (отрицательную) асимметрию, а при $\mu_3 > 0$ — правостороннюю (положительную) асимметрию (рис. 267). Для симметричного (например, нормального) распределения $\mu_3 = 0$. *Асимметрией* называют величину

$$A(x) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Наконец, четвертый центральный момент μ_4 характеризует островершинность кривой распределения. Так как для нормального распределения отношение $\mu_4/\mu_2^2 = 3$, то в качестве характеристики островершинности принимается величина

$$E(x) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3,$$

называемая *эксцессом*. Ясно, что отклонение эксцесса от нуля характеризует более островершинную (при $E(x) > 0$) или менее островершинную (при $E(x) < 0$) кривую по сравнению с нормальной.



Рис. 267. Асимметрия распределения:
левосторонняя ($\mu_3 < 0$) и правосторонняя ($\mu_3 > 0$).

Определим, например, моменты и другие характеристики для экспоненциального распределения. Ранее в (6) было найдено $\nu_1 = M(x) = \frac{1}{\lambda}$. Остальные начальные моменты:

$$\nu_2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2}; \quad \nu_3 = \int_0^\infty x^3 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{6}{\lambda^3}; \quad \nu_4 = \int_0^\infty x^4 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{24}{\lambda^4}.$$

На основании приведенных выше соотношений получаем:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{2}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 = \frac{2}{\lambda^3};$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\left(\frac{6}{\lambda^3}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 6\left(\frac{2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 = \frac{9}{\lambda^4}.$$

Таким образом, имеем:

$$D(x) = \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{\lambda};$$

$$A(x) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 2; \quad E(x) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 6.$$

Так как $A(x) > 0$ и $E(x) > 0$, то экспоненциальное распределение имеет правостороннюю асимметрию, и кривая этого распределения более островершинна по сравнению с нормальной.

8. Статистические распределения. При изучении множества однородных объектов относительно некоторого характерного признака (количественного или качественного) обычно подвергают испытаниям некоторое его подмножество случайно отобранных объектов, называемое *выборкой*. Множество объектов, из которых производится выборка, составляет *генеральную совокупность*. Число объектов выборки (или генеральной совокупности) определяет ее объем. Различают *повторные выборки*, когда отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность, и *бесповторные выборки*, когда отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. Обычно в практике используются бесповторные выборки. Генеральная совокупность, содержащая очень большое число объектов, может рассматриваться как бесконечное множество, благодаря чему часто достигаются упрощения вычислений без существенного влияния на точность результата.

Наблюдаемое значение, характеризующее признак объекта выборки, называют *вариантой*, а последовательность вариант в возрастающем порядке — *вариационным рядом*. Если в выборке объема n варианта x_i наблюдается с частотой n_i (значение x_i наблюдается n_i раз), то *относительная частота варианты* выражается как

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

Перечень вариант и соответствующих им частот (или относительных частот) образует *статистическое распределение выборки*. Оно обычно задается таблицей, например:

Варианта x_i	2	5	7	10	15
Частота n_i	1	2	3	8	7

Отметив в прямоугольной системе координат точки (x_i, n_i) или (x_i, w_i) и соединив их отрезками прямых, получим ломаную линию, которая называется *полигоном частот* (или относительных частот). Для приведенного выше примера полигон частот показан на рис. 268.

Статистическое распределение выборки можно представить также в виде последовательности интервалов и соответствующих им

частот, что особенно удобно, если признаком является непрерывная величина. Интервал, в котором заключены все варианты, разбивают на несколько частичных интервалов длиною h_i и находят для каждого из них сумму частот n_i вариант, попавших в i-й интервал. Если все частичные интервалы одинаковы ($h_i = h$), то соответствующие варианты называют *равноотстоящими*, причем их численные значения определяются точками, лежащими посредине частичных интервалов. При этом частота первоначальной варианты, которая оказалась на границе двух частичных интервалов, поровну распределяется между этими интервалами.

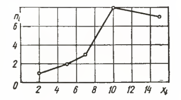


Рис. 268. Полигон частот.

Пусть, например, получены следующие результаты для выборки объема $n = 100$:

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Разбивая интервал 1—1,5 на пять частичных интервалов ($h = 0,1$), приходим к следующему распределению относительно равноотстоящих вариант:

Частичный интервал	1,0—1,1	1,1 —1,2	1,2 —1,3	1,3 —1,4	1,4 —1,5
Равноотстоящая варианта x_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
Сумма частот n_i	18	20	25	22	15
Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	180	200	250	220	150

Отложив по оси абсцисс частичные интервалы и построив на них как на основаниях прямоугольники высотой $\frac{n_i}{h_i}$ $\left(\text{или } \frac{w_i}{h_i}\right)$, получим *гистограмму частот* (или относительных частот). Величина $\frac{n_i}{h_i}$ называется *плотностью частоты*, а $\frac{w_i}{h_i}$ — *плотностью относительной частоты*. Очевидно, общая площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки n, а площадь гистограммы относительных частот равна единице. Гистограмма частот для рассмотренного распределения показана на рис. 269.

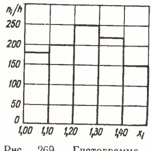


Рис. 269. Гистограмма частот (для равноотстоящих вариант).

Если через n_x обозначить число наблюдений, при которых значение признака меньше x, то

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

представляет собой *эмпирическую функцию распределения*. В соответствии с теоремой Бернулли при увеличении числа испытаний относительная частота события по вероятности стремится к вероятности этого события. Поэтому $F^*(x)$ приближается к интегральной (теоретической) функции распределения $F(x)$.

9. Эмпирические моменты. По данным наблюдений можно вычислить начальные и центральные эмпирические моменты, которые определяются соответственно формулами:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^k; \quad m_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i (x_i - M_1)^k.$$

Так, для распределения относительно равноотстоящих вариант из (8) имеем:

$$M_1 = \frac{1}{100}(18 \cdot 1{,}05 + 20 \cdot 1{,}15 + 25 \cdot 1{,}25 + 22 \cdot 1{,}35 + 15 \cdot 1{,}45) = \\ = 1{,}246;$$

$$M_2 = \frac{1}{100}(18 \cdot 1{,}05^2 + 20 \cdot 1{,}15^2 + 25 \cdot 1{,}25^2 + 22 \cdot 1{,}35^2 + 15 \cdot 1{,}45^2) = \\ = 1{,}570.$$

Аналогично вычисляются и остальные начальные моменты. Центральные моменты можно найти либо непосредственно по приведенным выше формулам, либо через начальные моменты в соответ-

ствии с зависимостями из (7). Так, для центрального момента второго порядка имеем:

$$m_2 = M_2 - M_1^2 = 1{,}570 - 1{,}246^2 = 0{,}017.$$

При вычислении эмпирических моментов удобно пользоваться *условными вариантами*

$$u_i = \frac{x_i - c}{h_i},$$

где c — постоянная величина *(условный нуль)*. Если вариационный ряд состоит из равноотстоящих вариант x_i с шагом h и в качестве c выбрано значение одной из этих вариант, то условные варианты выражаются целыми числами.

Сначала вычисляются начальные моменты для условных вариант, называемые *условными эмпирическими моментами*, т. е.

$$\tilde{M}_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^k = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k.$$

Искомые эмпирические моменты просто выражаются через условные. Так, при $k = 1$ имеем

$$\tilde{M}_1 = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i - \frac{c}{n}\sum_i n_i\right) = \frac{1}{h}(M_1 - c),$$

где использовано соотношение $\sum n_i = n$. Отсюда

$$M_1 = \tilde{M}_1 h + c.$$

Для центрального момента второго порядка запишем выражение:

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_i n_i (x_i - M_1)^2 = \frac{1}{n}\sum_i n_i (x_i - c - \tilde{M}_1 h)^2 =$$

$$= h^2\left[\frac{1}{n}\sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h} - \tilde{M}_1\right)^2\right],$$

откуда после очевидных преобразований получаем

$$m_2 = (\tilde{M}_2 - \tilde{M}_1^2)\, h^2.$$

Аналогично находим соотношения для эмпирических центральных моментов высших порядков:

$$m_3 = (\tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_2\tilde{M}_1 + 2\tilde{M}_1^3)\, h^3;$$

$$m_4 = (\tilde{M}_4 - 4\tilde{M}_3\tilde{M}_1 + 6\tilde{M}_2\tilde{M}_1^2 - 3\tilde{M}_1^4)\, h^4.$$

Процесс вычислений целесообразно представить таблицей, которая для рассматриваемого примера при $c = x_3 = 1{,}25$ имеет вид:

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
1,05	18	—2	—36	72	—144	288
1,15	20	—1	—20	20	—20	20
1,25	25	0	0	0	0	0
1,35	22	1	22	22	22	22
1,45	15	2	30	60	120	240
$\sum$	100	—	—4	174	—22	576

$$\tilde{M}_1 = -0{,}04;\ \tilde{M}_2 = 1{,}74;\ \tilde{M}_3 = -0{,}22;\ \tilde{M}_4 = 5{,}7.$$

На основании полученных значений условных эмпирических моментов при $h = 0{,}1$ находим:

$$M_1 = -0{,}04 \cdot 0{,}1 + 1{,}25 = 1{,}246;$$
$$m_2 = [1{,}74 - (-0{,}04)^2]\,0{,}1^2 = 1{,}74 \cdot 10^{-2};$$
$$m_3 = [-0{,}22 - 3 \cdot 1{,}74\,(-0{,}04) + 2\,(-0{,}04)^3]\,0{,}1^3 = -1{,}13 \cdot 10^{-5};$$
$$m_4 = [5{,}76 - 4 \cdot (-0{,}22)\,(-0{,}04) + 6 \cdot 1{,}74(-0{,}04)^2 - 3\,(-0{,}04)^4]\,0{,}1^4 = 5{,}74 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, параметры распределения выражаются следующим образом:

$$M(x) = M_1 = 1{,}246;$$
$$D(x) = m_2 = 1{,}74 \cdot 10^{-2};\quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 0{,}132;$$
$$A(x) = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = -\frac{1{,}13 \cdot 10^{-5}}{2{,}30 \cdot 10^{-3}} = -0{,}49 \cdot 10^{-2};$$
$$E(x) = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{5{,}74 \cdot 10^{-4}}{3{,}03 \cdot 10^{-4}} = 1{,}89.$$

Как видно, имеет место небольшая левосторонняя асимметрия, а островершинность несколько больше, чем у нормального распределения.

10. Многомерные распределения. На практике часто приходится исследовать некоторые системы и явления, описываемые не одной, а несколькими случайными величинами *(случайными векторами)*. При этом используются понятия многомерной функции распределения, совместной плотности вероятностей, условной функции и плотности распределения, коэффициентов корреляции и пр.

Под *n-мерной функцией распределения* вектора $\vec{X}$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ понимается вероятность совместного выполнения неравенств $x_1 \leqslant u_1, x_2 \leqslant u_2, \ldots, x_n \leqslant u_n$, рассматриваемая как функция n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = P\{x_1 \leqslant u_1, x_2 \leqslant u_2, \ldots, x_n \leqslant u_n\}.$$

Аналогично тому, как это делалось для одной случайной величины, *совместная плотность вероятности* совокупности случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или *плотность вероятности вектора* $\vec{X}$ определяется как предел отношения вероятности попадания в бесконечно малую область к величине этой области при стягивании ее в точку:

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lim_{\substack{\Delta u_i \to 0 \\ i=1, 2, \ldots, n}} \frac{P\{u_1 \leqslant x_1 \leqslant u_1 + \Delta u_1; \ldots ; u_n \leqslant x_n \leqslant u_n + \Delta u_n\}}{\Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n}.$$

Функция распределения и плотность вероятности вектора $\vec{X}$ связаны соотношениями:

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \int_{-\infty}^{u_1} \cdots \int_{-\infty}^{u_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$$

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n}$$

и обладают свойствами, в основном аналогичными свойствам функции распределения и плотности вероятности скалярной случайной величины.

1. Функция распределения случайного вектора неотрицательна и не может быть больше единицы.

2. Если хотя бы одна из переменных u_i принимает значение $-\infty$, то функция распределения вектора $\vec{X}$ равна нулю.

3. Если $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \infty$, то рассматриваемая функция распределения равна единице.

4. Функция распределения вектора $\vec{X}$ является неубывающей и непрерывной справа функцией каждого из аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

5. Плотность вероятности случайного вектора неотрицательна и интеграл от нее по всей области возможных значений случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен единице.

6. Если проинтегрировать плотность вероятности n-мерного случайного вектора по каким-нибудь m из переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ по всей области их изменения, то в результате получится плотность

вероятности $n - m$-мерного вектора с координатами, соответствующими оставшимся переменным.

С помощью функции распределения легко вычислить вероятность попадания конца вектора $\vec{X}$ в параллелепипед $a_i < x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где a_i и b_i — произвольные постоянные. При этом получаем выражение:

$$P\{a_1 < x_1 \leqslant b_1;\ a_2 < x_2 \leqslant b_2;\ \ldots;\ a_n < x_n \leqslant b_n\} =$$
$$= F(b_1, b_2, \ldots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P_{ij} -$$
$$- \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P_{ijk} + \cdots + (-1)^n F(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $P_{ij\ldots m}$ — значение функции $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ при $u_i = a_i$; $u_j = a_j, \ldots, u_m = a_m$ и при остальных u_s, равных b_s.

Говорят, например, что вектор $\vec{X}$ подчиняется *n-мерному нормальному закону распределения*, если его плотность распределения имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{D}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

где $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} b_{ij}(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})$ — положительно определенная квадратичная форма; D — определитель

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если через D_{ij} обозначить минор D, соответствующий элементу b_{ij}, то

$$D_{ii} = \sigma_i^2 D;\ D_{ij} = \operatorname{cov}(x_i, x_j) D,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где m_{x_i}, σ_i^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия координаты x_i; $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$ — математическое ожидание произведения центрированных координат x_i, x_j, называемое *ковариацией*, т. е. $\operatorname{cov}(x_i, x_j) = M[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})]$.

11. Моменты системы случайных величин. Аналогично тому, как это делалось для одной случайной величины, вводятся понятия *моментов совокупности случайных величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом *начальным моментом k-го порядка* называют математическое ожидание:

$$\nu_k = M[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}],$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

Очевидно, что начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию той случайной величины x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), степень которой равна единице.

Центральным моментом порядка k называют величину

$$\mu_k = M\left[(x_1 - m_{x_1})^{k_1}(x_2 - m_{x_2})^{k_2} \cdots (x_n - m_{x_n})^{k_n}\right],$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. Особый интерес представляют центральные моменты второго порядка, т. е.

$$M\left[(x_i - m_{x_i})^2\right] = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$M\left[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})\right] = \operatorname{cov}(x_i, x_j) \quad \text{для} \quad i \neq j; \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

На практике часто используют нормированную величину

$$r_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j},$$

называемую *коэффициентом корреляции*. Этот коэффициент удовлетворяет условию $|r_{ij}| \leqslant 1$ и отражает степень линейной зависимости величин x_i, x_j. Очевидно, что ковариация и коэффициент корреляции независимых случайных величин равны нулю, однако обратное утверждение неверно. Пусть, например, величина x_1 имеет симметричное распределение относительно начала координат и $x_2 = x_j$. Тогда $\operatorname{cov}(x_1, x_2) = 0$ и $r_{1,2} = 0$, несмотря на то, что x_2 является функцией x_1.

Отметим, что центральный момент любого нечетного порядка многомерного нормального распределения равен нулю, а центральный момент четного порядка можно выразить через соответствующие моменты второго порядка. Так, например, для четвертого момента получаем:

$$M\left[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})(x_k - m_{x_k})(x_l - m_{x_l})\right] = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk},$$

где $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$; $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(x_i, x_j)$.

12. Условные распределения. На практике часто приходится находить закон распределения одной совокупности случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что каждая из случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_m$ другой совокупности принимает значение, заключенное в интервале $a_j < y_j \leqslant b_j$; ($j = 1, 2, \ldots, m$).

В связи с этим определяется *условная функция распределения совокупности случайных величин* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ как условная вероятность

выполнения неравенств $x_1 \leqslant u_1$, $x_2 \leqslant u_2$, ..., $x_k \leqslant u_k$ относительно события, заключающегося в выполнении неравенств $a_j < y_j \leqslant b_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$:

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_k/a_j < y_j \leqslant b_j;\ j = 1, 2, \ldots, m) =$$
$$= P\{x_1 \leqslant u_1;\ x_2 \leqslant u_2;\ \ldots;\ x_k \leqslant u_k/a_1 < y_1 \leqslant b_1;\ a_2 < y_2 \leqslant b_2; \ldots;\ a_m < y_m \leqslant b_m\}.$$

Как и всякая условная вероятность, эта вероятность может быть определена выражением:

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \ldots, u_k/a_j < y_j \leqslant b_j;\ j = 1, 2, \ldots, m) =$$
$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{u_1}\int\limits_{-\infty}^{u_2}\cdots\int\limits_{-\infty}^{u_k}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dx_1 \ldots dx_k dy_1 \ldots dy_m}{\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m}.$$

Продифференцировав эту формулу по $u_1, u_2, \ldots, u_k$, можно найти условную плотность вероятности совокупности случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при условии, что случайные величины y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ принимают значения, заключенные в пределах $a_j < y_j \leqslant b_j$:

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_k/a_j < y_j \leqslant b_j;\ j = 1, 2, \ldots, m) =$$
$$= \frac{\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(u_1, u_2, \ldots, u_k; y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m}{\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(y_1 y_2, \ldots, y_m)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m}.$$

В частности, многомерное нормальное распределение обладает тем свойством, что все его условные распределения также являются нормальными.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Вероятность взятия вратарем одиннадцатиметрового штрафного удара равна 0,25. Требуется определить вероятность того, что он возьмет хотя бы один мяч из четырех, т. е. $P(x \geqslant 1)$:

а) Какому стандартному распределению соответствует эта задача?

б) Сформулируйте и решите задачу через вероятность противоположного события, т. е. $P(x \geqslant 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0)$.

2. Известно, что диаметр деталей, изготавливаемых на станке, есть нормально распределенная величина со средним квадратическим $\sigma = 0{,}2$ мм. Найдите вероятность брака, если бракуются детали, диаметр которых откло-

няется от среднего значения (математического ожидания) более, чем на 0,35 мм.

3. Найдите математическое ожидание и дисперсию распределения, полученного в результате испытания 10 конденсаторов, которое состояло в измерении отклонения емкости от номинальной через контрольное время их работы:

Конденсатор	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение емкости, мкФ	—0,12	0,10	0,16	0,01	0	0,05	0	—0,06	—0,03	0,02

4. Случайная величина x распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 30$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$. Найдите вероятность того, что случайная величина:

а) попадет в интервал $10 \leqslant x \leqslant 35$;

б) не превысит значения $x = 15$.

5. Покажите, что центр распределения всегда совпадает с точкой a, если кривая плотности распределения $f(x)$ симметрична относительно прямой $x = a$.

6. Докажите соотношения, выражающие зависимость между моментами распределения:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

7. Докажите приведенные в (7) свойства дисперсии:

а) $D(c) = 0$ $(c = \text{const})$;

б) $D(cx) = c^2 D(x)$;

в) $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$, где x и y — независимые случайные величины.

8. При каком значении p биномиальное распределение симметрично?

9. При увеличении числа независимых испытаний n биномиальное распределение приближается к нормальному с математическим ожиданием $\mu = np$ и дисперсией $\sigma^2 = np(1 - p)$. Это аппроксимирующее распределение дает приемлемые результаты, если np и $np(1-p)$ не менее 5. Используя аппроксимацию биномиального распределения нормальным, решите следующие задачи:

а) Вероятность рождения мальчика постоянна и равна 0,51. Какова вероятность того, что среди случайно выбранных 100 новорожденных окажется ровно 50 мальчиков?

б) Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

10. Размеры 200 деталей, изготовленных на одном станке, распределены относительно равноотстоящих вариант ($h = 0{,}2$ мм) следующим образом:

h_i	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
n_i	1	4	17	16	82	66	14	6	3	1

Вычислите эмпирические моменты, а также математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, асимметрию и эксцесс.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Основные формулы. В инженерной практике часто приходится находить закон распределения и моменты случайного параметра y, являющегося некоторой функцией случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданных своим совместным законом распределения. Если эти величины являются непрерывными, для определения функции распределения $F_y(u)$ используется выражение:

$$F_y(u) = \int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совместная плотность распределения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$; D — область интегрирования, определяемая неравенством

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant u.$$

В случае дискретных случайных величин аналогичное решение дается с помощью n-мерной суммы, распространенной на область D.

Моменты функции случайных аргументов можно оценить путем разложения ее в ряд Тейлора в точке математических ожиданий. При этом начальный момент любого порядка $M[y^k]$ вычисляют с помощью формулы:

$$M[y^k] = \psi_m + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^{n} \sum_{r_2=1}^{n} \cdots \sum_{r_k=1}^{n} \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{r_k}} \right)_m \times$$
$$\times M[(x_{r_1} - m_{r_1})(x_{r_2} - m_{r_2}) \cdots (x_{r_k} - m_{r_k})]^k.$$

Здесь ψ_m — значение функции $\psi = [\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k$ в точке математических ожиданий; q — степень используемого отрезка ряда Тейлора; $M[(x_{r_1} - m_{r_1})(x_{r_2} - m_{r_2}) \cdots (x_{r_k} - m_{r_k})]^k$ — моменты связи k-го порядка между величинами $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_k}$, которые считаются заданными или могут быть определены при заданном законе распределения системы случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Центральные же моменты произвольного порядка могут быть определены, как отмечалось выше, через соответствующие начальные моменты.

2. Функция одной случайной величины. Рассмотрим прежде всего линейное преобразование одной случайной величины. При этом параметр y, закон распределения которого ищется, задается в виде $y = ax + b$, где a, b — заданные константы, а искомая функция распределения, как видно из рис. 270, определяется выражением:

$$F_y(u) = \begin{cases} F_x\left(\frac{u-b}{a}\right), & \text{если } a > 0; \\ 1 - F_x\left(\frac{u-b}{a}\right), & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

(Коэффициент a в рассматриваемом случае не может равняться нулю, так как при $a = 0$ параметр y не является случайной величиной).

Математическое ожидание и дисперсия параметра y определяются в рассматриваемом случае формулами:

$M[y] = am_x + b$; $D[y] = a^2\sigma_x^2$, где m_x и σ_x^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины x. Моменты других порядков выражаются также через соответствующие моменты величины x.

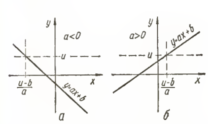


Рис. 270 Иллюстрация связи функции распределения параметра $y = ax + b$ с функцией распределения аргумента x.

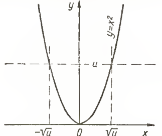


Рис. 271. Иллюстрация связи функции распределения параметра $y = x^2$ с функцией распределения аргумента x.

Заметим, что линейное преобразование не меняет вид закона распределения, а меняет только его параметры. При этом коэффициент a называют *масштабным множителем*, а b — *центрирующей постоянной*.

Если параметр y является нелинейной монотонной и непрерывной функцией $\varphi(x)$ случайного аргумента x, функция распределения $F_y(u)$ аналогично предыдущему случаю определяется выражением:

$$F_y(u) = \begin{cases} F_x(\psi(u)), & \text{если } \varphi(x) \text{ монотонно возрастает;} \\ 1 - F(\psi(u)), & \text{если } \varphi(x) \text{ монотонно убывает.} \end{cases}$$

Здесь ψ — функция, обратная функции φ. Эту формулу можно распространить на случай оценки функции распределения непрерывной однозначной функции $\varphi(x)$. Выделим в области изменения аргумента xk интервалов, в которых функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, и r интервалов, в которых $\varphi(x)$ монотонно убывает. Тогда для $F_y(u)$ можно записать:

$$F_y(u) = \sum_{i=1}^{k} [F_x(\psi^i(u)) - F_x(x_{\text{н}}^i)] + \sum_{i=1}^{r} [F_x(x_{\text{в}}^i) - F_x(\psi^i(u))],$$

где $\psi^i(u)$ — значение функции ψ при $y = u$ в i-м интервале; $x_{\text{н}}^i$, $x_{\text{в}}^i$ — концы i-го интервала.

Пусть необходимо определить функцию распределения параметра y, заданного уравнением $y = x^2$. Как видно из рис. 271, область изменения аргумента x в рассматриваемом случае можно разбить на два интервала: $(-\infty, 0)$, где y убывает, и $(0, \infty)$, когда y возрастает. При этом $\psi^1(u) = -\sqrt{u}$; $\psi^2(u) = \sqrt{u}$, и для $F_y(u)$ получаем выражение:

$$F_y(u) = F_x(\sqrt{u}) - F_x(0) + F_x(0) - F_x(-\sqrt{u}) = \\ = F_x(\sqrt{u}) - F_x(-\sqrt{u}).$$

Математическое ожидание и дисперсия параметра y в рассматриваемом случае определяются формулами:

$$M[y] = m_x^2 + \mu_2; \; D[y] = m_x^4 + 6m_x^2\mu_2 + 4m_x\mu_3 + \mu_4.$$

Здесь μ_k — центральный момент k-го порядка случайной величины x.

3. Линейная функция совокупности случайных величин. Совершенно аналогично определяется закон распределения функции многих случайных аргументов. Пусть y является линейной функцией n случайных аргументов: $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$. Тогда

$$F_y(u) = F_z(u - b); \quad z = \sum_{i=1}^{n} z_i; \quad z_i = a_i x_i;$$

$$F_{z_i}(u) = F_{x_i}\left(\frac{u}{a_i}\right),$$

т. е. задача оценки функции распределения $F_y(u)$ сводится к задаче оценки функции распределения параметра z, являющегося суммой n-случайных величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$ при известном их законе распределения. Рассмотрим случай, когда $n = 2$. На рис. 272 изображена область интегрирования, вероятность попадания в которую случайного вектора с координатами z_1, z_2 определяет значение функции распределения $F_z(u)$ в точке u. Согласно приведенным выше формулам можно записать

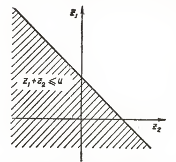


Рис. 272. Область интегрирования, определяющая функцию распределения параметра $z = z_1 + z_2$.

$$F_z(u) = \iint\limits_{z_1+z_2<u} f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u-z_2} f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 = \\ = \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z_2, z_2)\, dz_2\, dx.$$

Особое практическое значение имеет случай, когда складываемые величины z_1, z_2 являются независимыми. Тогда говорят о композиции законов распределения и, так как при этом $f(z_1, z_2) = f_1(z_1) f_2(z_2)$, то для $F_z(u)$ получаем выражение:

$$F_z(u) = \iint\limits_{z_1+z_2<u} f_1(z_1) f_2(z_2)\, dz_1\, dz_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{z_1}(u - z_2) f_2(z_2)\, dz_2 = \int\limits_{-\infty}^{u} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x - z_2) f_2(z_2)\, dz_2\, dx.$$

Пусть, например, необходимо найти композицию равномерных в интервале (0, 1) законов распределения. Так как при этом плотности распределения задаются в интервалах:

$$f_1(z_1) = f_2(z_2) = f(v) = \begin{cases} 0, & \text{если } v \leqslant 0 \text{ или } v > 1; \\ 1, & 0 < v \leqslant 1, \end{cases}$$

задачу удобно решать путем геометрического представления соответствующих областей интегрирования. Интегрируя по этим областям (рис. 273), можно получить:

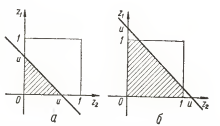


Рис. 273. Области интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $z = z_1 + z_2$ при равномерных в интервале (0,1) законах распределения аргументов.

$$F_z(u) = \begin{cases} 0 & \text{, если } u \leqslant 0; \\ \frac{1}{2} u^2 & \text{, если } 0 < u \leqslant 1; \\ 1 - \frac{(2-u)^2}{2} & \text{, если } 1 < u \leqslant 2; \\ 1 & \text{, если } u > 2. \end{cases}$$

Полученный закон носит название *закона Симпсона*. Композиция совокупности законов распределения изучалась многими авторами. В связи с этим сформулирован ряд предельных теорем и выделены классы устойчивых и безгранично делимых законов, которые будут рассмотрены ниже. Здесь отметим, что в общем случае при невыполнении условий известных предельных теорем, для оценки функции распределения $F_y(u)$ в практических исследованиях необходимо применять специальные методы, например, *метод Монте-Карло*, который рассматривается в (6).

Для оценки же математического ожидания и дисперсии параметра y в общем случае можно получить соответственно выражения

$$M[y] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b;$$

$$D[y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j},$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между аргументами x_i и x_j.

Если этот коэффициент равен нулю, т. е. аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоррелированы, то

$$D[y] = \sum_{i<1}^{n} a_i^2 \sigma_{xi}^2.$$

4. Устойчивые и безгранично делимые распределения. Найдем закон распределения композиции двух нормальных законов, т. е. определим $F_z(u)$, если $z = z_1 + z_2$:

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2}}; \quad f_2(z_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}}.$$

Согласно предыдущему пункту

$$F_z(u) = \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - z_2) f_2(z_2)\, dz_2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - z_2 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dz_2\, dx.$$

Если раскрыть скобки в показателе степени подынтегрального выражения и привести подобные члены, то получим:

$$F_z(u) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Az_2^2 + 2Bz_2 - C} dz_2\, dx,$$

где $A = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}$; $B = \frac{m_2}{2\sigma_2^2} + \frac{x - m_1}{2\sigma_1^2}$; $C = \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_1^2}$. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{AC - B^2}{A}},$$

то после преобразований для $F_z(u)$ получаем нормальный закон распределения

$$F_z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{[x-(m_1+m_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} dx$$

с математическим ожиданием $m = m_1 + m_2$ и дисперсией $D = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Таким образом, композиция двух нормальных законов распределения также является нормальным законом. Очевидно, что этот вывод нетрудно распространить на композицию произвольного числа n нормальных законов распределения. При этом математическое ожидание и дисперсия результирующего закона соответственно равны сумме математических ожиданий и дисперсий слагаемых.

Замеченное свойство нормальных распределений сохранять свой вид при их наложении (композиции) называется *свойством устойчивости*. Этим свойством обладают, кроме нормального, и другие распределения. Распределение F называется *устойчивым*, если оно не сосредоточено в нуле, и композиция любого числа таких распределений подчиняется распределению, отличающемуся от F только параметрами расположения (2). Устойчивые распределения играют все возрастающую роль в качестве обобщения нормального распределения.

С понятием устойчивости тесно связано понятие *безграничной делимости*. Распределение F *безгранично делимо*, если при каждом n его можно представлять как распределение суммы n независимых случайных величин с одним и тем же распределением F_n. Следует отметить, что безграничная делимость является свойством типа, т. е. вместе с F все распределения, отличающиеся от F лишь параметрами расположения, безгранично делимы. Устойчивые распределения безгранично делимы и выделяются среди безгранично делимых тем, что для них F_n отличается от F лишь параметрами расположения.

Вторым примером устойчивого (и значит безгранично делимого) закона распределения может служить закон Пуассона.

5. Нелинейное преобразование совокупности случайных величин. Законы распределения нелинейных функций совокупности случайных величин изучены в меньшей мере, чем линейных. Поэтому в рассматриваемых случаях используются в основном некоторые приближенные методы. Только в некоторых частных случаях для функции распределения $F_y(u)$ нелинейного параметра y можно получить аналитические выражения.

Предположим, что параметр y, закон распределения которого ищется, является произведением двух случайных величин $y = x_1x_2$. На рис. 274 изображены области интегрирования,

определяющие $F_y(u)$ в рассматриваемом случае, при $u > 0$ и соответственно $u < 0$. Как видно из этих рисунков, для $F_y(u)$ можно записать следующее выражение:

$$F_y(u) = \int\limits_{x_1} \int\limits_{x_2 \leqslant u} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{u/x_2}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{u/x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Если аргументы x_1, x_2 независимы, то

$$F_y(u) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[1 - F_{x_1}\left(\frac{u}{x_2}\right)\right] f_2(x_2)\, dx_2 + \int\limits_{0}^{\infty} F_{x_1}\left(\frac{u}{x_2}\right) f_2(x_2)\, dx_2.$$

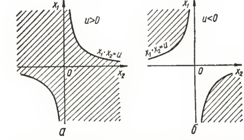


Рис. 274. Области интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $y = x_1 x_2$.

Рис. 275. Область интегрирования, определяющая функцию распределения параметра $y = x_1 x_2$ при равномерных в интервале (0,1) законах распределения аргументов.

Пусть, например, аргументы x_1, x_2 независимы, и законы распределения равномерны в интервале (0, 1). Интегрируя по области, изображенной на рис. 275, для $F_y(u)$ можно получить выражения:

$$F_y(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leqslant 0; \\ u(1 - \ln u), & \text{если } 0 < u \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } u > 1. \end{cases}$$

Для определения математического ожидания и дисперсии параметра $y = x_1 x_2$ при произвольных законах распределения аргументов получаем выражения:

$$M[y] = m_{x_1} m_{x_2} + r \sigma_{x_1} \sigma_{x_2};$$

$$D[y] = m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 + m_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 + m_{x_2}^2 \sigma_{x_1}^2 + 4 m_{x_1} m_{x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} r + 2 m_1 \rho_{x_1 x_2^2} + 2 m_{x_2} \rho_{x_1^2 x_2} + \rho_{x_1^2 x_2^2},$$

где r — коэффициент корреляции между x_1 и x_2; $\rho_{x_1^{k_1} x_2^{k_2}} = M[(x_1 - m_{x_1})^{k_1}(x_2 - m_{x_2})^{k_2}]$ — центральный момент порядка $k_1 + k_2$ (2.11).

Пусть теперь y определяется функцией $y = x_1/x_2$. На рис. 276 аналогично предыдущему случаю изображены области интегрирования, определяющие $F_y(u)$ при положительном и отрицательном u. Интегрируя по этим областям, получаем выражение

$$F_y(u) = \iint\limits_{x_1/x_2 \leq u} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{ux_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_{-\infty}^{0} \int_{ux_2}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

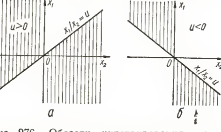


Рис. 276. Области интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $y = x_1/x_2$.

которое при независимых x_1, x_2 принимает вид:

$$F_y(u) = \int_0^{\infty} F_{x_1}(ux_2) f_2(x_2)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{0} [1 - F_{x_1}(ux_2)] f_2(x_2)\, dx_2.$$

В частности, можно показать, что при нормальном законе распределения аргументов, т. е. когда

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\},$$

функция распределения $F_y(u)$ определяется выражением

$$F_y(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} u.$$

Такое распределение называется *распределением Коши*. Оно является примером распределения, не имеющего математического ожидания и дисперсии, так как интегралы, определяющие эти характеристики, не существуют.

Если параметр y является функцией, близкой к линейной, для оценки $F_y(u)$ применяют метод линеаризации. Этот метод заключается в представлении исходной функции $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейной частью разложения ее в ряд Тейлора в точке математических ожиданий, т. е.

$$y \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_m (x_i - m_{x_i}),$$

где $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m$ — производная от функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по аргументу x_i в точке математических ожиданий.

Далее, предполагая выполнимость условий центральной предельной теоремы или законы распределения аргументов нормальными, считают закон распределения $F_y(u)$ также нормальным с параметрами, определяемыми выражениями:

$$M[y] = \varphi(m_1, m_2, \ldots, m_n);$$

$$D[y] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 +$$

$$+ 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m r_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}.$$

В большинстве же практических случаев, при решении современных технических проблем, необходимо определить законы распределения некоторых параметров, являющихся существенно нелинейными функциями случайных аргументов. Например, при оценке работоспособности электронной цепи необходимо исследовать закон распределения ее передаточной характеристики, которая является существенно нелинейной функцией относительно параметров компонентов даже для линейных цепей. Для решения подобных задач применяются специальные методы, наиболее распространенным из которых является метод Монте-Карло.

6. Метод Монте-Карло. Этот метод заключается в моделировании случайных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в результате которого получают M реализаций случайного вектора с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и, следовательно, M значений параметра $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отношение числа реализаций m, удовлетворяющих условию $y \leqslant u$, к общему числу реализаций M отождествляется с вероятностью $p = p(y \leqslant u) = F_y(u)$. Точность получаемого при этом результата может быть оценена, например, при помощи неравенства Чебышева, согласно которому

$$P\left\{\left|\frac{m}{M} - p\right| \leqslant \sqrt{\frac{p(1-p)}{M\varepsilon}}\right\} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

где ε — произвольное число из интервала (0, 1) (обычно ε полагают равным 0,01; 0,05 или 0,001).

Моделирование случайных аргументов осуществляется с помощью заранее рассчитанных таблиц случайных чисел, некоторых датчиков (генераторов) случайных чисел или псевдослучайных чисел, вычисленных по заданным правилам. Применение того или иного метода моделирования зависит от конкретных условий задачи.

Наиболее часто используется метод моделирования с помощью псевдослучайных чисел, получаемых путем перехода от равномерно распределенных чисел к числам, подчиняющимся заданным законам распределения.

Если аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимы, моделирование вектора $\vec{x}$ заключается в отдельном моделировании каждого аргумента x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Можно доказать, что случайная величина $\gamma = F_{x_i}(u)$ подчиняется равномерному закону распределения при любой функции распределения $F_{x_i}(u)$. Благодаря этому реализации случайных величин x_i получают путем моделирования равномерно распределенных чисел z_j и перехода к требуемым числам с помощью обратной функции $F^{-1}_{x_i}(u)$, т. е. решая уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{u_j} f_i(x_i)\, dx_i = z_j$$

относительно u_j. Например, числа u_j, подчиняющиеся экспоненциальному закону распределения, можно найти по формуле $u_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - z_j)$, получаемой из уравнения

$$1 - e^{-\lambda u_j} = z_j,$$

где z_j — равномерно распределенные числа в интервале (0, 1).

В общем случае, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависимы, моделирование вектора $\vec{x}$ осуществляют путем моделирования равномерно распределенных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и решения системы уравнений:

$$F_{x_1}(u_1) = z_1;$$
$$F_{x_2}(u_2/u_1) = z_2;$$
$$F_{x_n}(u_n/u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = z_n$$

относительно величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые подчиняются заданному закону распределения (здесь $F_{x_i}(u_i/u_1, u_2, \ldots, u_{i-1})$ — условная функция распределения).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Плотность распределения величины x описывается выражением

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\beta^2}(\ln x - \alpha)^2}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Определите закон распределения величины $y = \ln x$; $M[y]$ и $D[y]$.

2. Пусть случайная величина x подчиняется равномерному закону в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $y = a\sin(x + b)$, где a и b — некоторые константы.

3. Двумерный случайный вектор с координатами (x_1, x_2) распределен по нормальному закону. Найдите совместный закон распределения величин:

$$x_1' = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha;$$
$$x_2' = - x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

и покажите, что при α, удовлетворяющем условию $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2}$, величины x_1' и x_2' являются независимыми.

4. Система случайных величин x_1, x_2 подчинена нормальному закону распределения. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию параметра y, если:

а) $y = x_1 - x_2$;

б) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

5. Найдите закон распределения суммы $y = x_1 + x_2 + x_3$, если случайные величины x_1, x_2, x_3 подчиняются равномерному закону распределения в интервале $(0, 1)$.

6. Найдите плотность вероятности случайной величины $y = x_1/x_2$, если x_1, x_2 — независимые случайные величины, плотность вероятности которых задана выражениями:

$$f_{x_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} e^{-\frac{nx^2}{2}};$$

$$f_{x_2}(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \dfrac{x^{n-1} e^{-\frac{nx^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } x \geqslant 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

4. ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

1. Наблюдения. Количественные результаты при наблюдениях получают обычно путем *измерения* или *счета*. Счет можно рассматривать как разновидность измерений, а измерения часто сводятся к счету (например, интервал времени можно определить, подсчитав количество заполняющих его равномерно следующих импульсов). Если истинное значение наблюдаемой величины есть x_0, а в резуль-

тате наблюдения (измерения) получено значение x, то ошибка наблюдения выражается как $\delta = x - x_0$.

Условимся для краткости под термином *величина* понимать как тип наблюдаемой величины (масса, давление, напряжение и т. п.), так и ее истинное значение. Термин *наблюдение* будет означать процесс регистрации результата и сам результат. При этом *ошибка* определяется разностью между наблюдением и величиной.

Различают три вида ошибок: промахи, систематические ошибки и случайные ошибки. *Промахи* возникают из-за грубого нарушения нормальных условий наблюдения (неправильные действия наблюдателя, неисправность измерительной аппаратуры, резкое изменение внешних условий) и обычно характеризуются сравнительно большими ошибками.

Систематические ошибки являются результатом влияния неучтенных факторов, связанных с условиями наблюдения (повышенная температура, электромагнитные помехи и т. п.) или недостатками измерительных устройств (неправильная градуировка шкалы, несовершенство метода измерения). Промахи и систематические ошибки в значительной мере могут быть обнаружены и устранены как при обработке наблюдений, так и при организации измерительного процесса (выбор метода измерения, проверка приборов, использование автоматической регистрирующей аппаратуры, сбор и анализ предварительных данных об объекте наблюдения и условиях окружающей среды, подготовка и инструктаж экспериментаторов). Однако как бы хорошо ни были организованы наблюдения, всегда остается множество неучтенных факторов, влияние которых приводит к *случайным ошибкам*.

2. Основная гипотеза. Случайные ошибки естественно рассматривать как результат влияния большого числа различных причин, каждая из которых вносит очень малую ошибку, и ни одна из них не является доминирующей (если выявлены доминирующие ошибки, то их следует отнести к систематическим ошибкам и учитывать соответствующей поправкой). В соответствии с теоремой Ляпунова имеются веские основания считать, что случайная ошибка распределена по нормальному закону *(основная гипотеза)*. Если также предположить, что отклонения наблюдений равновероятны в обе стороны от величины, то математическое ожидание случайной ошибки δ равно нулю и ее плотность вероятности $f(\delta)$ и функция распределения $F(\delta)$ имеют вид:

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}; \quad F(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Параметр распределения σ (среднее квадратическое отклонение случайной величины δ) принимается в качестве *средней ошибки*. Как видно из рис. 264, *б*, чем больше значение σ, тем более пологим является график функции $f(\delta)$, и, следовательно, вероятность больших отклонений наблюдений от истинной величины с ростом σ увеличивается. Вероятность ошибки δ, лежащей в интервале от $-\alpha$ до α, выражается через интеграл вероятности (2.5) следующим образом:

$$P(-\alpha < \delta < \alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \psi(k),$$

где $k = \frac{\alpha}{\sigma}$. Вычислив значение k для заданного α при известном σ, можно найти эту вероятность по табл. 9 для функции Лапласа $\Phi(k)$, причем $\psi(k) = 2\Phi(k)$. Если исходной является вероятность ошибки, т. е. $\psi(k)$, то по тем же таблицам обратным интерполированием для $\Phi(k) = \frac{1}{2}\psi(k)$ определяется значение k, а значит, и интервал ошибки δ. Принимаемое при этом значение вероятности называют *доверительной вероятностью* (или *достоверностью*), а соответствующий ей интервал — *доверительным интервалом*. Часто используют стандартные доверительные интервалы, при которых $\alpha = \sigma, 2\sigma, 3\sigma$. Им соответствуют надежности: $P(-\sigma < \delta < +\sigma) = \psi(1) = 2\Phi(1) = 0{,}683$; $P(-2\sigma < \delta < +2\sigma) = \psi(2) = 2\Phi(2) = 0{,}955$ и $P(-3\sigma < \delta < +3\sigma) = \psi(3) = 2\Phi(3) = 0{,}997$.

На основании соотношения $\delta = x_i - x_0$ выражения для доверительных вероятностей можно представить также в виде:

$$P(x_i - \alpha < x_0 < x_i + \alpha) = \psi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right),$$

или

$$P(-k\sigma < x_i - x_0 < k\sigma) = \psi(k).$$

Для характеристики наблюдений употребляют также *вероятную ошибку* ρ, определяемую как $P(-\rho \leqslant \delta \leqslant \rho) = 0{,}5$, т. е. ρ — это такое отклонение, которое с одинаковой вероятностью 0,5 может быть превзойдено или не превзойдено по абсолютной величине. Так как $\psi(k) = 2\Phi(k) = 0{,}5$, то $\Phi(k) = 0{,}25$ и $k = 0{,}6745$ (этот результат находим по табл. 9 с помощью обратного интерполирования). Но $k = \frac{\rho}{\sigma}$, следовательно, вероятная ошибка выражается через среднюю ошибку соотношением $\rho = 0{,}6745\sigma$.

3. Точечные оценки. При нормальном распределении ошибки $\delta = x - x_0$ наблюдение x также распределено по нормальному закону (2.4)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

с математическим ожиданием, равным истинному значению x_0 наблюдаемой величины, и дисперсией σ^2. Это означает, что отдельное наблюдение представляет собой элемент из бесконечного множества наблюдений, которые могут быть выполнены в одинаковых условиях (такие наблюдения называют *равноточными*) со средней ошибкой σ. Это бесконечное множество возможных наблюдений образует нормальную генеральную совокупность (2.8), среднее арифметическое которой равно математическому ожиданию, т. е. величине x_0.

На практике количество наблюдений ограничено, и вариационный ряд из n наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно рассматривать как случайную выборку из генеральной совокупности. Возникает вопрос, как распорядиться этой выборкой, чтобы наилучшим образом оценить величину x_0 и степень достоверности полученного результата.

Поскольку наблюдения взаимно независимы, то плотность вероятности для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется как произведение плотностей вероятностей каждого из наблюдений, т. е.

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)\, p(x_2) \ldots p(x_n) =$$

$$= \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2\right].$$

Эта вероятность имеет экстремумы относительно x_0 и σ, значения которых определяются из уравнений:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0; \quad \frac{1}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = 0.$$

Наибольшего значения вероятность выборки достигает при $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{\text{ср}}$ и любом σ, а также при $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = \sigma_n$ и любом x_0. Это означает, что при нормальном распределении наиболее вероятной оценкой наблюдаемой величины является среднее выборки $x_{\text{ср}}$, а наилучшей оценкой средней ошибки для данного x_0 является среднее квадратическое отклонение σ_n выборки

от истинного значения наблюдаемой величины. Полученные результаты называют *точечными оценками* параметров, а способ их определения — *методом максимального правдоподобия.*

Точечная оценка σ_n используется в тех случаях, когда истинное значение наблюдаемой величины x_0 известно (например, при исследовании точности измерительного устройства). На основании наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются отклонения $\delta_i = x_i - x_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и вычисляется

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2},$$

которая является средней квадратической ошибкой измерения величины x. Оценка σ_n характеризует точность показаний измерительного устройства на участке шкалы в окрестностях значения x_0 и означает с вероятностью $\psi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$, что ошибка δ не превосходит α.

Пусть, например, показания тахометра отклоняются относительно величины $x_0 = 1000$ об/мин по нормальному закону и выборка из $n = 20$ наблюдений дает $\sigma_n = 17{,}7$ об/мин. Тогда $P(-\sigma_n \leqslant \leqslant \sigma \leqslant \sigma_n) = \psi(1) = 0{,}683$, т. е. можно ожидать, что 68,3% всех отсчетов будут находиться в интервале от 982,3 до 1017,7 об/мин. Для отклонения $\alpha = 10$ об/мин имеем $\frac{\alpha}{\sigma_n} = \frac{10}{17{,}7} = 0{,}56$ и по табл. 9 находим $\psi(0{,}56) = 2\Phi(0{,}56) \approx 0{,}425$. Значит отсчет с относительной погрешностью 1% при использовании тахометра в окрестностях отметки 1000 об/мин может быть получен примерно в 4 случаях из 10. Повышение степени достоверности результата неизбежно связано со снижением требований к точности измерения. Если, например, принять надежность 0,95, то придется мириться с отклонением $\alpha' = 2\sigma_n = 35{,}4$ об/мин, т. е. с относительной погрешностью 3,5%.

Другая точечная оценка

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

повсеместно используется на практике для определения наиболее вероятного значения наблюдаемой величины. Следует, однако, помнить, что она гарантирует наилучший результат для данной выборки только в случаях нормального распределения. Если оце-

нивать среднюю ошибку значением σ_n, которое эта величина принимает при $x_0 = x_{ср}$, т. е.

$$\sigma_{ср} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{ср})^2},$$

то нет никакой гарантии, что эта оценка будет наилучшей. Можно лишь утверждать, что она тем ближе к истинной средней ошибке σ, чем ближе средние выборки $x_{ср}$ к величине x_0.

4. Оценки в классической теории ошибок. Для оценки точности наблюдений необходимо рассмотреть $x_{ср}$ и $\sigma_{ср}$ как случайные величины. Можно показать, что их плотности вероятностей выражаются функциями:

$$f_1(x_{ср}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(x_{ср}-x_0)^2};$$

$$f_2(\sigma_{ср}) = \frac{n^{\frac{1}{2}(n-1)}\sigma_{ср}^{n-2}}{2^{\frac{1}{2}(n-3)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sigma^{n-1}} e^{-\frac{n\sigma_{ср}^2}{2\sigma^2}},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — *гамма-функция* (интеграл Эйлера второго рода), значения которой можно взять из таблиц или вычислить по формулам (вторая формула используется для целого положительного числа n):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt; \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Как видно, $x_{ср}$ распределено по нормальному закону с математическим ожиданием x_0 и средним квадратическим отклонением $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, которое характеризует точность оценки величины x_0 через среднее выборки $x_{ср}$. Эта точность повышается пропорционально квадратному корню из объема выборки, но с увеличением n возрастает сравнительно медленно. Кроме того, повышение точности за счет значительного увеличения объема выборки может быть сведено на нет неполностью устраненной систематической ошибкой. Поэтому на практике даже при сравнительно высоких требованиях к достоверности результата ограничиваются 30—50 отсчетами. Конкретные рекомендации относительно объема выборки обычно основываются на анализе требуемой достоверности результата, точности измерительных устройств и условий наблюдения.

Среднее квадратическое отклонение сценки $x_{ср}$ при объеме выборки n и известном стандарте σ нормально распределенной

величины x_0 определяется по приведенной выше формуле как $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Однако на практике точное значение σ обычно не известно. В классической теории ошибок приближенное значение для σ определяют следующим образом. Из закона распределения $f_2(\sigma_{ср})$ находят математическое ожидание $M(\sigma_{ср}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ и полагают его равным $\sigma_{ср}^2$. Разумеется, замена $M(\sigma_{ср}^2)$ на $\sigma_{ср}^2$ таит в себе известный произвол, поэтому в правой части формулы для $M(\sigma_{ср}^2)$ величину σ следует заменить на ее приближенное значение, которое обозначим через s. Тогда $\sigma_{ср}^2 = \frac{n-1}{n}s^2$, откуда следует $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_{ср}^2$, и на основании выражения для $\sigma_{ср}^2$ из (3) получаем

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{ср})^2}.$$

Это соотношение, называемое *формулой Бесселя*, используется для определения средней ошибки одного наблюдения по данным выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина s называется *выборочным стандартом*. Приближенную оценку для среднего квадратического отклонения величины $x_{ср}$ получим, разделив выборочный стандарт s на квадратный корень из объема выборки n, т. е.

$$s_{ср} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{ср})^2}.$$

Достоверность определения величины x_0 по n наблюдениям выражается как $P(-ks_{ср} < x_{ср} - x_0 < ks_{ср}) = \psi(k)$ или $P(x_{ср} - ks_{ср} < x_0 < x_{ср} + ks_{ср}) = \psi(k)$, что сокращенно представляется записью $x_0 = x_{ср} \pm ks_{ср}$. Относительная ошибка равна $\frac{ks_{ср}}{x_{ср}}$, где k определяется на основании функции $\psi(k)$, равной заданной достоверности. Для достоверности 0,683 относительная ошибка равна $\frac{s_{ср}}{x_{ср}}$, а для достоверности 0,955 увеличивается вдвое.

Неточность, связанная с заменой $M(\sigma_{ср}^2)$ на $\sigma_{ср}^2$ при выводе формулы Бесселя, сказывается тем меньше, чем больше объем выборки n. Но, как показывает анализ, даже при очень больших n (порядка тысячи) относительная ошибка определения $\sigma_{ср}$ все же составляет несколько процентов. Поэтому нет смысла записывать значения σ и $\sigma_{ср}$ большее, чем с двумя значащими цифрами. Вто-

рая значащая цифра $\sigma_{ср}$ определяет и число значащих цифр, которые достаточно удерживать в записи $x_{ср}$.

5. **Порядок обработки равноточных наблюдений.** При вычислении $x_{ср}$ и s удобно пользоваться формулами:

$$x_{ср} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) + a;$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right]^2\right\}},$$

где a — произвольная величина, для которой обычно выбирают округленное число, близкое к $x_{ср}$. Пусть, например, требуется обработать ряд из 12 равноточных наблюдений некоторой величины. Соответствующие вычисления приведены ниже ($a = 18320$):

i	x_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$
1	18338	18	324
2	18316	—4	16
3	18325	5	25
4	18341	21	441
5	18332	12	144
6	18319	—1	1
7	18313	—7	49
8	18329	9	81
9	18310	—10	100
10	18322	2	4
11	18330	10	100
12	18314	—6	36
	$\sum$	49	1321

$$x_{ср} = \frac{49}{12} + 18320 = 18324{,}1; \quad s = \sqrt{\frac{1}{11}\left(1321 - \frac{49^2}{12}\right)} = 10{,}1;$$

$$s_{ср} = 10\frac{10}{\sqrt{12}} = 2{,}92.$$

Полученный результат записывается сокращенно

$$x_0 = 18324{,}1 \pm 2{,}9,$$

что означает $P(18321{,}2 < x_0 < 18327{,}0) = 0{,}683$ или $P(18318{,}3 < < x_0 < 18329{,}9) = 0{,}955$, и вообще,

$$P(18324{,}1 - 2{,}9k < x_0 < 18324{,}1 + 2{,}9k) = \psi(k) = 2\Phi(k),$$

где k — любое число.

Вероятная ошибка среднего арифметического $\rho_{ср} = 0,6745s = 2,0$, т. е.

$$P(18322,1 < x_0 < 18326,1) = 0,5.$$

6. Достоверность малых выборок. В инженерной практике обычно ограничиваются небольшим числом наблюдений, в результате чего оценка результата с помощью величины $s_{ср}$ может оказаться недостаточно точной. Это связано с тем, что в соотношении $P(-ks_{ср} < x_{ср} - x_0 < ks_{ср}) = \psi(k)$, или равносильном ему

$$P\left(-k < \frac{x_{ср} - x_0}{s_{ср}} < k\right) = \psi(k)$$

$s_{ср} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ принимается вместо точной величины $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Необходимое уточнение достигается с помощью *распределения Стьюдента*

$$S(u;\, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

которому подчиняется величина

$$u = \frac{x_{ср} - x_0}{s}\sqrt{n} = \frac{x_{ср} - x_0}{\sigma_{ср}}\sqrt{n-1} = \frac{x_{ср} - x_0}{s_{ср}}.$$

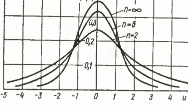


Рис. 277. Распределение Стьюдента.

График распределения Стьюдента (рис. 277) напоминает по форме нормальное распределение и с увеличением n приближается к нему, сливаясь с ним при $n \to \infty$, а при малых n сильно отличается от нормального. Оно играет большую роль в статистике малых выборок (*микростатистике*).

Вероятность того, что u не превзойдет по абсолютному значению числа k, выражается как

$$P(-k < u < k) = P(x_{ср} - ks_{ср} < x_0 < x_{ср} + ks_{ср}) = S(k,\, n),$$

где

$$S(k,\, n) = \int_{-k}^{+k} s(u;\, n)\,du.$$

Как видно, при малых выборках для оценки достоверности вместо интеграла вероятности $\psi(k)$ используется функция $S(k,\, n)$,

которая зависит не только от k, но и от объема выборки n. Значения $S(k, n)$ задаются соответствующими таблицами. Ниже для сравнения приводятся некоторые значения $\psi(k)$ и $S(k, n)$:

k	$S(k, n)$ при значениях n						$\psi(k)$
	2	3	4	5	8	12	
0,1	0,063	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,07966
0,2	0,126	0,140	0,146	0,149	0,153	0,155	0,15852
0,5	0,295	0,333	0,349	0,356	0,368	0,373	0,38292
1,0	0,500	0,577	0,609	0,626	0,649	0,661	0,68269
2,0	0,705	0,817	0,861	0,884	0,914	0,926	0,95450
3,0	0,795	0,905	0,942	0,960	0,980	0,988	0,99730
5,0	0,874	0,962	0,985	0,992	0,998	0,999	0,99999

Для определения доверительного интервала более удобны таблицы, в которых приводятся значения k в зависимости от n и доверительной вероятности. Например, для $P(x_{ср} - ks_{ср} < x_0 < x_{ср} + ks_{ср}) = 0,95$ получаем:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1

Для приведенного в (5) примера при $n = 12$ и $s_{ср} = 2,9$ имеем $P(18321,2 < x_0 < 18327,0) = 0,661$ и $P(18318,3 < x_0 < 18329,9) \approx \approx 0,929$. Как видно, вероятность выйти за интервал $2s_{ср}$ при 12 выборках равна 0,071, в то время как в соответствии с классической теорией эта вероятность была занижена и составляла только 0,045. Для достоверности 0,95 при $n = 12$ находим $k = 2,2$, что соответствует доверительному интервалу ошибки $ks_{ср} = 2,2 \cdot 2,9 = 6,4$ вместо $2s_{ср} = 2 \cdot 2,9 = 5,8$, даваемого классической теорией.

7. Неравноточные наблюдения. Если наблюдения одной и той же величины (или однородных величин) выполняются в неодинаковых условиях или с помощью различных средств и методов, то они характеризуются различными средними ошибками и называются *неравноточными*. Естественно, что при обработке неравноточных наблюдений необходимо хотя бы приблизительно оценить степень их надежности.

Эта задача решается достаточно просто. Каждому наблюдению приписывается свой вес m_i, который обычно выражается целым числом. Наименее достоверные наблюдения получают и наимень-

ший вес (например, $m = 1$), а остальным приписывается тем больший вес, чем выше их достоверность (или меньше средняя ошибка). Конечно, до обработки наблюдений численные значения средних ошибок неизвестны, поэтому приписывание весов основывается на степени доверия к аппаратуре и наблюдателям, на учете условий наблюдения, на опыте и интуиции исследователя.

Удобнее всего рассматривать вес m_i как «размножение» наблюдения, т. е. считать, что наблюдение с весом m_i равноценно m_i наблюдениям с единичным весом, что соответствует снижению средней ошибки в $\sqrt{m_i}$ раз (4). Этот подход и является основным критерием при «взвешивании» наблюдений. Обработка неравноточных наблюдений осуществляется аналогично равноточным с тем лишь различием, что формулы для $x_{ср}$ и s имеют вид:

$$x_{ср} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - a) + a;$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - a)^2 - \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right]^2\right\}},$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$; a — произвольное число, близкое к $x_{ср}$, а средняя ошибка результата наблюдения определяется как $s_{ср} = \frac{s}{\sqrt{p}}$. Величина $\frac{1}{n-1}$ в формуле для s соответствует тому обстоятельству, что только n наблюдений являются независимыми. Изложенное иллюстрируется нижеследующим примером ($a = 240$):

i	x_i	m_i	$x_i - a$	$m_i(x_i - a)$	$m_i(x_i - a)^2$
1	236,4	1	—3,6	—3,6	12,96
2	241,6	3	1,6	4,8	7,68
3	242,0	1	2,0	2,0	4,00
4	240,7	5	0,7	3,5	2,45
5	237,4	3	—2,6	—7,8	20,28
6	239,5	5	—0,5	—2,5	1,25
7	243,8	3	3,8	11,4	43,32
8	242,5	5	2,5	12,5	31,25
	$\sum$	26		20,3	123,19

$$x_{ср} = \frac{20,3}{26} + 240 = 240,78; \quad s = \sqrt{\frac{1}{7}\left(123,19 - \frac{20,3^2}{26}\right)^2} = 3,92;$$

$$s_{ср} = \frac{3,92}{\sqrt{26}} = 0,77.$$

Согласно классической теории результат записывается в виде: $x_0 = 240,78 \pm 0,77$. Пользуясь методом малых выборок для $k = 1$ и $n = 8$ по таблице из (6) находим $S(1,8) = 0,649$, что соответствует $P(240,01 < x_0 < 241,55) = 0,649$. Для достоверности 0,955 при $n = 8$ по приведенной в (6) таблице имеем $k = 2,4$, следовательно, $ks_{ср} = 2,4 \cdot 0,77 = 1,85$, что соответствует доверительному интервалу от 238,93 до 242,63.

8. Косвенные наблюдения. Часто интерес представляет величина, которая является функцией $w = f(x, y, \ldots, v)$ и определяется по результатам измерений ее аргументов $x_{ср}, y_{ср}, \ldots, v_{ср}$, т. е. $w_{ср} = f(x_{ср}, y_{ср}, \ldots, v_{ср})$. Если величины $x, y, \ldots, v$ независимы, то средняя квадратическая ошибка выражается формулой

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \sigma_y^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0^2 \sigma_v^2},$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \sigma_v$ — средние ошибки измеряёмых величин, а частные производные определяются в области средних или номинальных значений аргументов. Эта формула получается разложением в ряд Тейлора функции $w = f(x, y, \ldots, v)$ с использованием свойства дисперсии суммы независимых случайных величин, которая равна сумме их дисперсий.

Известны более точные формулы, учитывающие объемы выборок, зависимость аргументов и ряд других факторов, но в силу своей сложности они применяются лишь в случаях повышенной ответственности.

Приведенная формула, хотя и является приближенной, позволяет получить вполне удовлетворительные оценки.

Пусть, например, сопротивление R проводника определяется по данным измерения его длины l и диаметра d и вычисляется по формуле $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2} = r \frac{l}{d^2}$, где $r = \rho \frac{4}{\pi}$. Тогда

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{r}{d^2}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(-\frac{2rl}{d^3}\right)^2 \sigma_d^2}; \quad \frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2},$$

где σ_l и σ_d — средние ошибки измерения величин l и d. Если диаметр измерен с относительной ошибкой 0,5% и требуется получить результат для R, относительная ошибка которого не превышает 1,5%, то при измерении длины достаточно не превысить ошибку $\frac{\sigma_l}{l} = \sqrt{1,5^2 - (2 \cdot 0,5)^2} = 1,1\%$.

9. Метод наименьших квадратов. Этот метод решает задачу определения величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$, не поддающихся непосредственному наблюдению, по результатам измерения других величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые являются их функциями

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим случай, когда функции линейны (к нему сводится задача и для функций общего вида), т. е. когда исходной является система так называемых *условных уравнений*:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эту систему непосредственно решить нельзя, так как правые части уравнений вместо точных значений y_{i0} содержат результаты их измерений $y_i = y_{i0} + \delta_i$ со случайными ошибками δ_i. Однако если $n > m$, то на основании принципа максимального правдоподобия (3) можно найти такую совокупность значений $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которая с наибольшей вероятностью удовлетворяла бы исходным зависимостям. В предположении о нормальном распределении случайных величин y_i

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - y_{i0})^2}{2\sigma^2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

для плотности вероятности случайной выборки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеем

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2\right].$$

Эта вероятность достигает максимума при минимуме функции, стоящей в показателе экспоненты, т. е. при таких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_m$, которые обращают в нуль все частные производные.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2\right] = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right) a_{ik} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда для определения значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ получаем *нормальную систему уравнений:*

$$\sum_{j=1}^{m} c_{kj}x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}y_i,$$

где $c_{kj} = c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{ij}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Условие максимального правдоподобия совпадает с требованием минимума суммы квадратов ошибок

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i0})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i.$$

Отсюда и название *метод наименьших квадратов (принцип Лежандра)*. Хотя при его обосновании вводилось предположение о нормальном распределении, однако, строго доказано, что оценки, основанные на методе наименьших квадратов, обладают минимальными погрешностями, независимо от типа распределения *(теорема Гаусса—Маркова)*.

Проиллюстрируем изложенное на примере системы условных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4{,}91x_1 - 59{,}0x_2 &= -339{,}8 \\ 2{,}72x_1 - 2{,}7x_2 &= -47{,}5 \\ 0{,}05x_1 + 32{,}4x_2 &= 262{,}5 \\ -2{,}91x_1 + 27{,}7x_2 &= 152{,}9 \\ -4{,}77x_1 + 1{,}4x_2 &= -27{,}9 \end{aligned}\right\}.$$

Чтобы перейти к нормальной системе уравнений, необходимо определить четыре коэффициента c_{11}, c_{12}, c_{21} и c_{22}, два из которых равны между собой ($c_{12} = c_{21}$):

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{5} a_{i1}^2 = 4{,}91^2 + 2{,}72^2 + 0{,}05^2 + 2{,}91^2 + 4{,}77^2 = 62{,}73;$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^{5} a_{i1}a_{i2} = 4{,}91\,(-59{,}0) + 2{,}72\,(-2{,}7) + 0{,}05 \cdot 32{,}4 + \\ + (-2{,}91)\,27{,}7 + (-4{,}77)\,1{,}4 = -382{,}7;$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^{5} a_{i2}^2 = 59{,}0^2 + 2{,}7^2 + 32{,}4^2 + 27{,}7^2 + 1{,}4^2 = 5307{,}3.$$

Правые части уравнений определяются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}y_i = 4{,}91\,(-339{,}8) + 2{,}72\,(-47{,}5) + 0{,}05 \cdot 262{,}5 + \\ + (-2{,}91)\,152{,}9 + (-4{,}77)\,(-27{,}9) = 2096{,}3;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}y_i = (-59{,}0)\,(-339{,}8) + (-2{,}7)\,(-47{,}5) + 32{,}4 \cdot 262{,}5 + \\ + 27{,}7 \cdot 152{,}9 + 1{,}4\,(-27{,}9) = -32877{,}7.$$

Таким образом, получаем нормальную систему уравнений

$$62,73x_1 - 382,7x_2 = 2096,3;$$
$$-382,7x_1 + 5307,3x_2 = -32877,7,$$

решение которой дает значения искомых величин $x_1 = 7,81$ и $x_2 = 6,76$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. При 20 измерениях некоторой величины получены следующие результаты:

i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	10,5	8	11,0	15	10,8
2	10,8	9	10,3	16	10,9
3	11,2	10	10,8	17	10,8
4	10,9	11	10,6	18	10,7
5	10,4	12	11,3	19	10,9
6	10,6	13	10,5	20	11,0
7	10,9	14	10,7		

На основе оценок классической теории ошибок:

а) найдите среднее выборки $x_{ср}$, выборочный стандарт s и среднее квадратическое отклонение $s_{ср}$;

б) определите доверительные интервалы, соответствующие доверительным вероятностям 0,683; 0,8; 0,955;

в) вычислите вероятную ошибку $\rho_{ср}$ и запишите соответствующий доверительный интервал.

2. По условиям предыдущей задачи с помощью распределения Стьюдента:

а) уточните доверительные интервалы, соответствующие доверительным вероятностям 0,683; 0,8; 0,955;

б) определите доверительные интервалы и вероятности при $k = 1$, 2, 3.

3. Решите задачу 1 при дополнительном условии, что надежность первых десяти измерений оценивается весом 3, следующих пяти — весом 2 и пяти последних — весом 1. Сравните результаты с полученными в задаче 1.

4. Емкость конденсатора определяется по формуле $C = \frac{Q}{U}$. По результатам измерений заряда Q и напряжения U, средние квадратические ошибки которых соответственно σ_Q и σ_U, покажите, что средняя квадратическая ошибка $\sigma_{ср}$ выражается соотношением

$$\sigma_{ср} = \frac{1}{U}\sqrt{\sigma_Q^2 + \left(\frac{Q}{U}\,\sigma_U\right)^2}.$$

5. ПРОЦЕССЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Общая структура. Существует большое число процессов, для которых характерна следующая общая структура (рис. 278): в совокупность пунктов, называемую *системой обслуживания*, поступают через некоторые промежутки времени объекты *(входящий поток)*, которые подвергаются там соответствующим операциям *(обслуживанию)* и затем покидают систему *(выходящий поток)*, освобождая место для следующих объектов. Промежутки времени, через которые поступают объекты, и время обслуживания хотя и могут быть регулярными, но, как правило, носят случайный характер. При массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникать *очереди*.

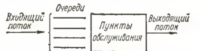


Рис. 278. Структура системы обслуживания.

Процессы массового обслуживания типичны для связи (телефон, телеграф, почта), транспорта (воздушные, наземные и морские перевозки) культурно-бытовых предприятий (театры, магазины, городское сообщение, поликлиники), производственных процессов (ремонт и обслуживание оборудования, сборочные линии) и т. п. Проблемы, родственные задачам массового обслуживания, постоянно возникают и в других областях (эволюция в биологии, движения физических частиц, преобразование информации в вычислительных машинах и т. п.). В любом случае составными элементами процесса массового обслуживания могут являться: 1) входящий поток, 2) очередь, 3) система пунктов обслуживания, 4) выходящий поток.

Независимо от конкретной природы и характера объектов, поступающих в систему обслуживания, их называют *требованиями* (или *заявками*). Входящий поток требований рассматривается как последовательность событий, следующих через какие-то моменты времени (например, вызовы на станции скорой помощи, приходы судов в порт, выход из строя станков и т. п.). Распределение входящего потока в основном обусловливает и характер процесса массового обслуживания.

Структура очередей и поступление из них требований на обслуживание определяются как свойствами и возможностями, так и установленными правилами прохождения требований через эти системы. Требования могут выполняться в порядке поступления (операции на конвейере), с приоритетом (внеочередное право получения билетов), в случайном порядке (отбор образцов для статистического анализа), в порядке первого очередного поступления при освободившемся канале обслуживания (прием вызова телефонной стан-

цией). Очереди могут ограничиваться по длине, т. е. по числу находящихся в них заявок, и по времени ожидания. Эти ограничения обусловлены либо возможностями системы массового обслуживания (ограниченность мест в театре, объема оперативной памяти машины), либо поведением объектов обслуживания и соответствующими правилами (отказ от обслуживания из-за неприемлемости длины очереди или времени ожидания в ней, регламентация порядка обслуживания). В конечном счете, основной характеристикой очереди является *время ожидания*.

Система пунктов обслуживания может иметь различную организацию: с последующими, параллельными и комбинированными каналами, некоторые из которых могут быть специализированными. В зависимости от поступления требований и образования очередей эта система может обладать способностями изменять свою организацию. В то же время ее свойства, как указывалось выше, влияют на структуру очереди и отношение к ней объектов обслуживания. Так, при занятости всех каналов поступающие требования могут получать отказ (системы с отказом) или становиться в очередь (системы с ожиданием).

Рис. 279. Поток требований во времени.

Процессы массового обслуживания изучаются с целью их рациональной организации (обеспечение наибольшей пропускной способности при возможно меньших затратах времени и материальных ресурсов) или выявления закономерностей тех явлений природы, для которых характерны подобные процессы.

2. Простейший поток. Рассмотрим поток однородных событий (требований), различающихся только моментами их появления. Такой поток можно изобразить последовательностью точек на оси времени (рис. 279).

Входящий поток называют *простейшим*, если вероятность поступления того или иного числа требований в течение интервала времени t зависит только от протяженности этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени *(стационарность)*, причем требования поступают поодиночке *(ординарность)* и независимо друг от друга *(отсутствие последействия)*.

Хотя многие индивидуальные процессы и не удовлетворяют полностью этим требованиям, понятие простейшего потока играет большую роль, так как близкие к нему потоки часто встречаются на практике. Но наиболее важно то обстоятельство, что в результате суммирования некоторого числа стационарных ординарных потоков с практически любым последействием получается поток, близкий к простейшему.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность поступления k событий за время t. Если поток требований простейший, то вероятность случайного события, состоящего в том, что за время $t + \Delta t$ поступит точно n требований, можно представить как

$$P_n(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t) P_k(\Delta t).$$

Действительно, пусть событие A_{n-k} означает поступление $n - k$ требований за время t, а событие B_k — поступление k требований за время Δt. Тогда рассматриваемое событие можно представить как пересечение несовместных событий $A_{n-k} \cap B_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Так как интервалы t и Δt на оси времени не пересекаются, и требования поступают независимо, то события A_{n-k} и B_k при любом k независимы, следовательно, $P(A_{n-k} \cap B_k) = P(A_{n-k}) P(B_k) = P_{n-k}(t) P_k(\Delta t)$. С учетом несовместности событий $A_{n-k} \cap B_k$ и получаем приведенное выше соотношение.

Пусть Δt — настолько малый интервал времени, что в силу ординарности простейшего потока вероятность попадания в этот интервал больше одного требования пренебрежимо мала. Это значит, что при $k > 1$ вероятности $P_k(\Delta t) = 0$, и, следовательно, имеем:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t) P_1(\Delta t).$$

По условию стационарности вероятность поступления одиночного требования в интервале Δt не зависит от расположения этого интервала на оси времени и пропорциональна его длине. Поэтому можно считать, что $P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$, где λ — коэффициент пропорциональности, смысл которого будет выяснен позже. Очевидно, вероятность отсутствия требований в интервале Δt выразится как $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$. Таким образом, получаем

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{n-1}(t) \lambda \Delta t,$$

или

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda [P_{n-1}(t) - P_n(t)].$$

Положив $\Delta t \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda [P_{n-1}(t) - P_n(t)],$$

где $n \geqslant 1$. При $n = 0$ первый член уравнения отсутствует, так как возможен единственный случай, соответствующий отсутствию требований как за время t, так и в коротком интервале Δt. Поэтому

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t).$$

Решение этого уравнения при граничном условии $P_0(0) = 1$, есть $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. При $n = 1$ имеем

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda [P_0(t) - P_1(t)] = \lambda [e^{-\lambda t} - P_1(t)],$$

решение которого при граничном условии $P_1(0) = 0$ имеет вид $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Продолжая этот процесс, находим для плотности распределения числа требований за время t следующее выражение

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

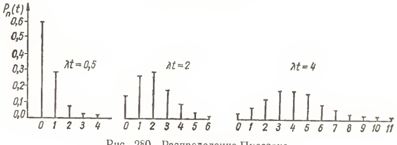


Рис. 280. Распределение Пуассона.

что представляет собой дискретное *распределение Пуассона*, которое характеризует простейший поток. На рис. 280 показаны графики этого распределения для различных значений $a = \lambda t$.

3. Число требований в заданном интервале. Найдем математическое ожидание распределения Пуассона:

$$M(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = \lambda t.$$

Полученная величина λt определяет среднее значение числа требований, поступивших за время t. Отсюда ясно, что параметр λ представляет собой среднее число требований в единицу времени, в связи с чем его называют *интенсивностью* (или *плотностью*) *потока*. Среднее число требований $a = \lambda t$ за время t в силу стационарности простейшего потока не зависит от положения временного интервала, поэтому под t можно понимать и время, прошедшее от начала процесса.

Распределение Пуассона дает значения вероятности поступления за время t ровно n требований. В частности, вероятность того, что в интервале времени t не поступит ни одного требования, равна $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, а вероятность поступления одного требования $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Вероятность поступления за время t не

более одного требования будет $P_0(t) + P_1(t) = (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}$. В общем случае вероятность того, что за время t поступит *не более n требований*, определяется функцией распределения $F(n, t)$, которая равна сумме вероятностей $P_k(t)$ для $k \leqslant n$, т. е.

$$F(n, t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Вероятность поступления *более n требований* за время t равна дополнению $F(n, t)$ до единицы, т. е. $1 - F(n, t)$.

Пусть, например, в бюро обслуживания поступает в среднем 12 заказов в час. Найдем вероятность того, что за 1 мин в бюро не поступит ни одного заказа, а также вероятность поступления не более трех заказов за 10 мин. Так как $\lambda = \frac{12}{60} = 0{,}2$ заказов/мин, то ответ на первый вопрос получается из выражения $P_0(1) = e^{-0,2} = 0{,}819$. Для ответа на второй вопрос необходимо найти вероятности $P_k(10)$ для $k = 0, 1, 2, 3$ при $\lambda t = 0{,}2 \cdot 10 = 2$ (обычно для этого используются соответствующие таблицы):

$$P_0(10) = 0{,}135; \quad P_1(10) = 0{,}271; \quad P_2(10) = 0{,}271; \quad P_3(10) = 0{,}180.$$

Сумма полученных вероятностей $0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 + 0{,}180 = 0{,}857$, равная значению интегральной функции распределения при $n \leqslant 3$, и определяет искомую вероятность поступления не более трех заказов за 10 мин.

Определение вероятностей $P_n(t)$ и их суммирование облегчается, если использовать приближенную формулу

$$R(n, a) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \approx \Phi\left(\frac{n + 0{,}5 - a}{\sqrt{a}}\right) + 0{,}5,$$

где $a = \lambda t$ и $\Phi(y)$ — интеграл Лапласа (2.4), значения которого даны в табл. 9, причем $\Phi(-y) = -\Phi(y)$.

Функция $R(n, a) = R(n, \lambda t)$ представляет собой интегральную функцию распределения Пуассона, определяющую для простейшего потока вероятность поступления не менее n заявок за время t при интенсивности потока λ. Плотность распределения числа требований за время t, т. е. вероятность поступления ровно n требований, можно выразить как

$$P_n(t) = P_n\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{a^n}{n!} e^{-a} = R(n, a) - R(n - 1, a).$$

Дисперсия, характеризующая рассеивание числа требований в интервале t, определяется формулой $D(n) = M(n^2) - [M(n)]^2$. Так как

$$M(n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} =$$

$$= \lambda t \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \right] = \lambda t (\lambda t + 1),$$

а также $[M(n)]^2 = (\lambda t)^2$, то для дисперсии пуассоновского потока получаем

$$D(n) = \lambda t (\lambda t + 1) - (\lambda t)^2 = \lambda t,$$

т. е. такое же выражение, как и для математического ожидания. Это свойство можно использовать для решения вопроса о соответствии простейшему потоку некоторого потока требований и вообще любой случайной величины, если ее статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) известны или определены опытным путем. Существенное различие математического ожидания и дисперсии может служить причиной отказа от использования распределения Пуассона.

4. Интервал между двумя последовательными требованиями. Вероятность того, что интервал между двумя последовательными требованиями превысит некоторую величину τ (см. рис. 279), равна вероятности отсутствия требований в этом интервале, т. е. $e^{-\lambda\tau}$. Очевидно, дополнение этой величины до единицы дает функцию распределения интервалов между появлением двух последовательных требований, т. е.

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Дифференцируя, находим плотность распределения

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}.$$

При пуассоновском потоке закон распределения вероятностей для интервалов между двумя последовательными событиями является экспоненциальным с параметром $\lambda\tau$. Математическое ожидание и дисперсия интервала τ, распределенного по экспоненциальному закону, в соответствии с (2.6) выражаются как

$$M(\tau) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, среднее время между двумя последовательными требованиями $\tau_{ср}$ обратно пропорционально интенсивности

потока требований λ. Этой же величине равно и среднее квадратическое отклонение интервала τ от $\tau_{ср}$, определяемое как квадратный корень из дисперсии, т. е.

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{D(\tau)} = \frac{1}{\lambda} = \tau_{ср}.$$

Важное свойство экспоненциального закона распределения состоит в том, что вероятность появления очередного требования по прошествии времени τ не зависит от момента появления предшествующего. Это свойство присуще только экспоненциальному закону и представляет собой следствие независимости поступления событий во времени, которое ранее (2) было названо отсутствием последействия.

5. **Время обслуживания и время ожидания.** Производительность системы обслуживания зависит от числа каналов и их быстродействия. Время обслуживания одного требования чаще всего считают случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Для этого имеется много оснований: простота аналитических выражений, отсутствие последействия, близость к свойствам многих реальных систем и др. Экспоненциальный закон особенно хорошо описывает такие системы, которые сравнительно быстро обслуживают основную массу требований, а длительные сроки обслуживания встречаются тем реже, чем больше они занимают времени.

Итак, пусть время обслуживания t задано экспоненциальным законом с плотностью распределения $g(t) = \mu e^{-\mu t}$ $(t > 0)$. Среднее время обслуживания выражается математическим ожиданием, которое равно $\frac{1}{\mu}$. Таким образом, параметр μ представляет собой величину, обратную среднему времени обслуживания (его можно назвать *интенсивностью обслуживания*). Дисперсия времени обслуживания равна $\frac{1}{\mu^2}$. Функция распределения

$$G(t) = \int_0^t \mu e^{-\mu\tau}\, d\tau = 1 - e^{-\mu t}$$

представляет собой вероятность того, что обслуживание закончится за время t, т. е. вероятность освобождения за это время канала обслуживания. Очевидно, вероятность того, что за время t канал не освободится, равна $1 - G(t) = e^{-\mu t}$. Если в системе занято k каналов, то вероятность того, что ни один из них не освободится за время t, равна $(e^{-\mu t})^k = e^{-k\mu t}$.

Время ожидания требования в очереди (если она существует) обычно также задается экспоненциальным законом с плотностью распределения $h(t) = \nu e^{-\nu t}$, где параметр ν — величина, обратная среднему времени ожидания. Функция распределения $H(t) =$

$= 1 - e^{-\nu t}$ представляет собой вероятность того, что время ожидания не превысит t.

6. Марковские процессы. Процессы массового обслуживания являются дискретными процессами с конечным или счетным множеством состояний и непрерывным временем. Переход из одного состояния в другое происходит скачком в момент, когда наступает какое-то событие, вызывающее такой переход (поступление нового требования, начало или конец обслуживания, уход требования из очереди и т. д.).

Для процессов массового обслуживания с пуассоновским потоком требований и экспоненциальным распределением времени обслуживания характерно отсутствие последействия. Иначе говоря, будущее развитие зависит только от состояния в настоящий момент и не зависит от того, как происходило развитие в прошлом. Такие процессы называют *марковскими*.

Пусть на систему обслуживания, состоящую из m одинаковых каналов (пунктов), поступает простейший поток требований. При наличии хотя бы одного свободного канала немедленно начинается обслуживание, а если все каналы заняты, требование становится в очередь. Время обслуживания и время ожидания подчинены экспоненциальным законам распределения.

Обозначим через s_i состояние системы, в котором занято ровно i каналов (s_0 — состояние, в котором все каналы свободны) и очереди нет ($i = 0, 1, \ldots, m$). При $i > m$ образуется очередь, и система может находиться в состояниях s_{m+r}, где r — число требований в очереди ($r = 1, 2, \ldots$). Если на длину очереди не накладывается ограничений, то r может быть сколь угодно большим, и система имеет потенциально неограниченное число состояний. Пренебрегая возможностью «перескока» системы через состояние за сколь угодно малое время Δt (в силу предположения об ординарности простейшего потока вероятность такого события пренебрежимо мала), можно считать, что система через время Δt либо остается в прежнем состоянии, либо переходит в соседнее. Итак, возможные состояния систем будут следующие:

$$\left.\begin{array}{l} s_0 \text{ — все каналы свободны} \\ s_i \text{ — занято } i \text{ каналов, } 1 \leqslant i \leqslant m \end{array}\right\} \text{ очереди нет}$$

$$s_{m+r} \text{ — заняты все } m \text{ каналов, } r \text{ требований в очереди } (r \geqslant 0).$$

Обозначим через $p_i(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии s_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Очевидно, для любого момента времени t сумма вероятностей состояний равна единице (*нормировочное условие*), т. е.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1,$$

так как события, состоящие в том, что в момент времени t система находится в состояниях $s_1, s_2, \ldots, s_n$, несовместны и образуют полную систему событий. Задача состоит в том, чтобы определить вероятности состояний $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ как функции времени.

7. Уравнения Колмогорова. Марковский процесс описывается относительно вероятностей $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)$ системой дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями Колмогорова*. При составлении этих уравнений удобно воспользоваться *графом состояний*, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги — возможным переходам из состояния в состояние. Для рассматриваемой системы массового обслуживания граф состояний показан на рис. 281.

Рис 281. Граф состояний системы массового обслуживания.

Зафиксируем момент t и найдем вероятность $p_k(t+\Delta t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет в состоянии s_k. Так как система может оставаться в прежнем состоянии или переходить только в соседние состояния, то $p_k(t+\Delta t) = P(A)+P(B)+P(C)$, где A, B и C — несовместные события. Событие A означает, что система за время Δt не изменила своего состояния s_k, а события B и C означают, что переход в s_k произошел соответственно из состояний s_{k-1} и s_{k+1}.

Пусть система в момент t находилась в состоянии s_i и вероятность того, что за время Δt она перейдет в состояние s_j, равна $P_{ij}(\Delta t)$. Величину

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

называют *плотностью вероятности перехода*. При достаточно малом Δt имеет место приближенное соотношение

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\,\Delta t.$$

Очевидно, вероятность того, что система за время Δt не перейдет из состояния i в состояние j, выражается как $1 - P_{ij}(\Delta t) = 1 - \lambda_{ij}\Delta t$.

Выразим вероятности событий A, B и C через вероятности состояний и плотности вероятностей перехода (членами высших порядков малости по сравнению с Δt пренебрегаем):

$$P(A) \approx p_k(t)(1 - \lambda_{k,\,k-1}\Delta t)(1 - \lambda_{k,\,k+1}\Delta t) \approx p_k(t)\,[1 - (\lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{k,\,k+1})\Delta t];$$

$$P(B) \approx p_{k-1}(t)\,\lambda_{k-1,\,k}\Delta t;$$

$$P(C) \approx p_{k+1}(t)\,\lambda_{k+1,\,k}\Delta t.$$

На основании этих соотношений имеем

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)\,[1 - (\lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{k,\,k+1})\Delta t] + p_{k-1}(t)\,\lambda_{k-1,\,k}\Delta t + p_{k+1}(t)\,\lambda_{k+1,\,k}\Delta t,$$

или

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \lambda_{k-1,\,k}p_{k-1}(t) - (\lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{k,\,k+1})\,p_k(t) + \lambda_{k+1,\,k}p_{k+1}(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение относительно производной вероятности k-го состояния (для простоты аргументы t вероятностей состояний опускаем):

$$\frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1,\,k}p_{k-1} - (\lambda_{k,\,k-1} + \lambda_{k,\,k+1})\,p_k + \lambda_{k+1,\,k}p_{k+1}.$$

Записав аналогичные выражения для всех состояний, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которую можно представить в матричной форме:

$$\frac{dp}{dt} = \Lambda p,$$

где $p = (p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$ — *вектор вероятностей состояний и* Λ — *матрица плотностей вероятностей переходов.*

$\lambda_{k-1,k}$ $\lambda_{k,k+1}$ S_{k-1} S_k S_{k+1} $\lambda_{k,k-1}$ $\lambda_{k+1,k}$

Рис. 282. К составлению уравнения для k-го состояния.

Систему уравнений Колмогорова легко записать непосредственно из размеченного графа системы, в котором каждой дуге приписан вес, равный соответствующей плотности вероятности перехода. Так, сравнивая рис. 282 с уравнением для k-го состояния, легко вывести простое правило. Производная вероятности k-го состояния равна сумме членов, каждый из которых представляет собой произведение веса дуги, инцидентной k-й вершине, на вероятность того состояния, к которому она направлена. При этом вес дуги принимается положительным, если дуга направлена от k-й вершины, и отрицательным, если дуга направлена к k-й вершине. Это правило применимо для записи уравнений Колмогорова по размеченному графу любого марковского процесса.

На основе приведенного правила можно записать непосредственно и матрицу Λ. Для этого достаточно коэффициенты k-го уравнения при вероятностях состояний разместить в тех столбцах k-й строки, которые соответствуют этим состояниям.

8. Система массового обслуживания с ожиданием. Составим уравнения Колмогорова для системы массового обслуживания с ожиданием, описанной в (6). Для этого прежде всего определим плотности вероятностей переходов и разметим граф этой системы (см. рис. 281).

Вероятности перехода $P_{i,\, i+1}$ из состояния i в «старшее» состояние $i+1$ зависят исключительно от потока требований (каждое новое требование либо поступает в канал обслуживания, либо становится в очередь). Так как вероятность того, что за время τ поступит одно требование, как показано в (4), определяется функ-

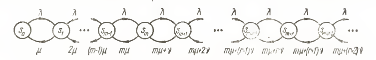


Рис. 283. Размеченный граф системы массового обслуживания.

цией $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, то $P_{i,\, i+1}(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda\,\Delta t} \approx 1 - (1 - \lambda\,\Delta t) = \lambda\,\Delta t$. Отсюда находим $\lambda_{i,\, i+1} = \lambda$, и всем дугам графа, направленным от вершины s_i к вершине s_{i+1}, приписываем веса, равные интенсивности потока требований λ.

Переход в «младшее» состояние обусловливается исключительно освобождением каналов обслуживания. Исходя из функции распределения времени обслуживания $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, выведенной в (5), аналогично находим, что при наличии только одного канала плотность вероятности перехода в младшее состояние равна интенсивности обслуживания μ. Если занято i каналов, то интенсивность обслуживания увеличивается в i раз и, следовательно, $P_{i,\, i+1}(\Delta t) = i\mu$, причем $i \leqslant m$, где m — число каналов обслуживания.

При возникновении очереди каждое состояние характеризуется занятостью всех каналов системы обслуживания ($i = m$), поэтому интенсивность освобождения каналов становится постоянной и равной $m\mu$. Как только канал освобождается, его немедленно занимает требование из очереди, и система переходит в младшее состояние. В этих условиях такой переход может быть вызван также уходом из очереди одного требования, если время ожидания превышает допустимое. Распределение времени ожидания $H(t) = 1 - e^{-\nu t}$ определяется интенсивностью ν ухода из очереди при наличии в ней одного требования. Для очереди длины r интенсив-

ность, с которой требования отказываются от обслуживания и уходят из очереди, равна $r\nu$. Таким образом, плотность вероятности перехода из состояния s_{m+r} в s_{m+r-1} $(r > 1)$ равна сумме интенсивностей освобождения каналов и отказа от обслуживания, т. е.

$$\lambda_{m+r,\ m+r-1} = m\mu + r\nu.$$

После того, как граф полностью размечен (рис. 283), в соответствии с правилом, изложенным в (7), записываем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1;$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)\, p_i + (i+1)\,\mu p_{i+1} \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1);$$

$$\frac{dp_{m+r}}{dt} = \lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu + r\nu)\, p_{m+r} + [m\mu + \\ + (r+1)\,\nu] = p_{m+r+1} \quad (r \geqslant 0).$$

Если система в начальный момент времени находилась в состоянии s_i, то начальными условиями являются соотношения $p_i = 1$; $p_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m+r, \ldots;\ j \neq i)$. Полученная система содержит неограниченное число уравнений. Она становится конечной, если накладываются ограничения на длину очереди, т. е. на величину r. Но даже и без таких ограничений на практике используют то обстоятельство, что с увеличением r вероятности p_{m+r} становятся пренебрежительно малыми. Поэтому последние уравнения, начиная с некоторого значения r, могут быть отброшены. Решение системы уравнений процесса массового обслуживания совместно с нормировочным условием (6) дает вероятности $p_i(t)$ состояний s_i, которые полностью определяют протекание этого процесса во времени.

9. Стационарный режим. В теории массового обслуживания чаще интересуются не столько тем, как протекает процесс во времени, сколько предельным *стационарным режимом*, который (если он существует) наступает при $t \to \infty$. Стационарный режим описывается системой алгебраических уравнений, которая получается из системы дифференциальных уравнений путем приравнивания нулю всех производных по времени, т. е.

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

$$\lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)\, p_i + (i+1)\,\mu p_{i+1} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1);$$

$$\lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu + r\nu)\, p_{m+r} + [m\mu + (r+1)\,\nu]\, p_{m+r+1} = 0 \ (r \geqslant 0).$$

Хотя и в стационарном режиме система меняет свои состояния случайным образом, но вероятности их уже не зависят от времени. Каждая из них, являясь постоянной величиной, характеризует *относительное время пребывания системы в данном состоянии.*

Присоединив к системе алгебраических уравнений нормировочное условие $\sum_i p_i = 1$, можно определить значения вероятностей в установившемся режиме и получить ряд общих характеристик процесса (без нормировочного уравнения можно было бы получить эти значения только с точностью до постоянного множителя). Из первого уравнения находим $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \alpha p_0$, где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ называют *приведенной плотностью потока требований* (среднее число требований, поступающих за среднее время обслуживания одного требования). Определяя из каждого последующего уравнения новую неизвестную и подставляя значения неизвестных, выраженных из предыдущих уравнений, получаем

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

При $i > m$ тем же способом находим

$$p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{\alpha^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (m + j\beta)} p_0 = \frac{\alpha^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (m + j\beta)} p_m \quad (r \geqslant 1),$$

где $\beta = \frac{\nu}{\mu}$ можно по аналогии назвать *приведенной плотностью потока уходов из очереди* (без обслуживания). В соответствии с нормировочным условием имеем

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!} p_0 + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (m + j\beta)} p_0 = 1,$$

откуда получаем

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (m + j\beta)}}.$$

Средняя длина очереди $r_{ср}$ определяется как математическое ожидание числа находящихся в очереди требований, т. е.

$$r_{ср} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \alpha^r}{\prod\limits_{j=1}^{r} (m + j\beta)} p_0 \quad (r \geqslant 1).$$

Так как некоторые требования, не дождавшись обслуживания, покидают очередь с интенсивностью ν, то всего будет уходить $\nu r_{ср}$

требований в единицу времени, и из λ поступивших за это же время требований будет обслужено $\lambda - \nu r_{\text{ср}}$. Отсюда находим важные характеристики системы — *относительную пропускную способность* q и *среднее число занятых каналов* $k_{\text{ср}}$:

$$q = \frac{\lambda - \nu r_{\text{ср}}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu r_{\text{ср}}}{\lambda}; \quad k_{\text{ср}} = \frac{\lambda - \nu r_{\text{ср}}}{\mu} = \alpha - \beta r_{\text{ср}}.$$

Величина q характеризуется вероятностью того, что поступившее в систему требование будет обслужено (при отсутствии очереди $r_{\text{ср}} = 0$ и $q = 1$, т. е. все заявки обслуживаются). Величину $k_{\text{ср}}$ можно также определить как математическое ожидание числа занятых каналов, т. е.

$$k_{\text{ср}} = \sum_{i=0}^{m-1} i p_i + \sum_{r=0}^{\infty} m p_{m+r} = \sum_{i=0}^{m-1} i p_i + m\left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} p_i\right),$$

где использовано нормировочное условие и то обстоятельство, что в состояниях s_{m+r} все m каналов заняты. Это выражение более удобно, так как не требуется суммировать бесконечный ряд (при определении $r_{\text{ср}}$). Поэтому им можно воспользоваться для вычисления $r_{\text{ср}}$ и q:

$$r_{\text{ср}} = \frac{\alpha - k_{\text{ср}}}{\beta} = \frac{\lambda - \mu k_{\text{ср}}}{\nu}; \quad q = 1 - \frac{\nu(\alpha - k_{\text{ср}})}{\lambda\beta} = \frac{k_{\text{ср}}}{\alpha} = \frac{\mu}{\lambda} k_{\text{ср}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что относительную пропускную способность системы можно рассматривать как отношение среднего числа занятых каналов к приведенной плотности потока требований.

10. Частные случаи. Из предыдущего рассмотрения можно получить ряд важных частных случаев. Другие многочисленные варианты систем массового обслуживания исследуются аналогично и подробно описаны в специальной литературе.

Чистая система с ожиданием, в которой требования не оставляют очереди, получается при $\nu \to 0$ ($\beta \to 0$), что соответствует неограниченному времени ожидания. При этом

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0 \ (1 \leqslant i \leqslant m); \quad p_{m+r} = \frac{\alpha^{m+r}}{m^r m!} p_0 = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^r p_m \quad (r \geqslant 1);$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum\limits_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{m}\right)^r} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{m+1}}{m!\,(m-\alpha)}}.$$

Выражение для p_0 справедливо при $\alpha < m$, так как только при этом условии бесконечная сумма в его знаменателе (геометрическая прогрессия) сходится к своему значению $\frac{\alpha}{m-\alpha}$.

Если же $\alpha \geqslant m$, т. е. среднее число требований, приходящееся на время обслуживания одной заявки, превышает количество каналов (пунктов) системы, то знаменатель будет неограниченно возрастать и $p_0 = 0$, а значит, и вероятность любого состояния со временем становится равной нулю. Иначе говоря, такой процесс имеет тенденцию к неограниченному переходу в «старшие» состояния, что соответствует *неограниченному возрастанию очереди* и отсутствию стационарного режима. При $\alpha < m$ среднее число заявок, находящихся в очереди, конечно и выражается формулой

$$r_{\text{ср}} = \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{\alpha}{m}\right)^r p_0 = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{\alpha}{m\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)^2} p_0 = \frac{\alpha^{m+1} p_0}{(m-1)!\,(m-\alpha)^2}.$$

Система с отказами принимает требования на обслуживание только при наличии свободных каналов. Требование, поступившее в момент времени, когда все m каналы заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Это значит, что очередь отсутствует ($r = 0$), и система характеризуется конечным числом уравнений, соответствующих состояниям $s_0, s_1, \ldots, s_m$. Очевидно, соотношения для системы с отказами получаются из приведенных в (9), если устремить к нулю среднее время ожидания, т. е. положить $\nu \to \infty$ ($\beta \to \infty$):

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha^i}{i!}}; \quad p_i = \frac{\alpha^i}{i!} p_0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Эти выражения можно преобразовать к виду, удобному для вычислений при больших i, если использовать приближенную формулу, приведенную в (3):

$$p_i = \frac{\frac{\alpha^i}{i!}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{\frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}} = \frac{P(i, \alpha)}{R(m, \alpha)} = \frac{R(i, \alpha) - R(i-1, \alpha)}{R(m, \alpha)}.$$

Эти выражения называют *формулами Эрланга*, который впервые исследовал систему с отказами применительно к телефонной связи. Полагая $k = m$ (все каналы заняты), получаем *вероятность отказа*

$$p_{\text{отк}} = p_m = \frac{\alpha^m}{m!} p_0 = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!}} = 1 - \frac{R(m-1, \alpha)}{R(m, \alpha)}.$$

Так как все требования, не получившие отказа, обслуживаются, то вероятность того, что попавшее в систему требование будет обслужено, т. е. относительная пропускная способность

$$q = 1 - p_m = \frac{R(m-1,\ \alpha)}{R(m,\ \alpha)}.$$

Среднее число занятых каналов $k_{\text{ср}}$ можно вычислить по формуле $k_{\text{ср}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \ldots + mp_m$. Однако проще выразить эту величину как отношение абсолютной производительности системы (среднего числа требований, обслуживаемых системой в единицу времени) к интенсивности обслуживания μ (среднего числа требований, обслуживаемых одним каналом в единицу времени), т. е

$$k_{\text{ср}} = \frac{\lambda(1-p_m)}{\mu} = \alpha(1-p_m) = \alpha q = \alpha\frac{R(m-1,\ \alpha)}{R(m,\ \alpha)}.$$

Система с ограниченной длиной очереди характеризуется тем, что поступившее требование становится в очередь только, если число требований в ней (длина очереди) не превышает заданного значения $r = v$. При этом недопустимая длина очереди является единственной причиной, которая заставляет требование ее покинуть, а время ожидания не принимается во внимание, т. е. может считаться сколь угодно большим ($\nu \to 0$). Очевидно, в этом случае система уравнений будет конечной, так как уравнения для $r > v$ теряют смысл. Соотношения для данной системы получаем из (9), ограничив суммирование по r верхним пределом v и положив $\nu \to 0$ $(\beta \to 0)$:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!}\sum\limits_{r=1}^{v}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^r}; \quad p_i = \frac{\alpha^i}{i!}p_0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n);$$

$$p_{m+r} = \frac{\alpha^m}{m!}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^r p_0 \quad (1 \leqslant r \leqslant v).$$

Вероятность того, что требование покинет систему необслуженным, равна вероятности p_{m+v}, характеризующей наличие в очереди v заявок, а относительная пропускная способность системы выражается как $q = 1 - p_{m+v}$.

11. Примеры систем массового обслуживания. Рассмотрим несколько типичных примеров, иллюстрирующих применение полученных соотношений.

Регулирование очереди. На автозаправочную станцию поступает пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda = 1{,}6$ (автомашин в минуту). Колонка обслуживает машину в среднем за 1,25 мин ($\mu = 0{,}8$ 1/мин). Определить условие, при котором система имеет ста-

ционарный режим; среднее число $r_{ср}$ машин в очереди при трех работающих колонках ($m = 3$) и вероятность $p(r_{ср} \leqslant 3)$ того, что длина очереди не превышает количество колонок; необходимое количество колонок, при котором вероятность того, что длина очереди превышает число колонок, равна или меньше 0,01.

Так как $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$, то из условия стационарности $\alpha < m$ получаем $m > 2$. По формулам для чистой системы с ожиданием при $m = 3$ находим:

$$\frac{1}{p_0} = 1 + 2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{6}2^3 + \frac{2^4}{6(3-2)} = 9;$$

$$p_0 = \frac{1}{9}; \quad p_1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}; \quad p_2 = \frac{2^2}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9};$$

$$p_3 = \frac{2^3}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{27}; \quad p_4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{27} = \frac{8}{81};$$

$$p_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{27} = \frac{16}{243}; \quad p_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{32}{729}.$$

На основании этих данных вычисляем:

$$r_{ср} = \frac{2^4}{2(3-2)^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9}; \quad P(r \leqslant 3) = \sum_{i=0}^{6} p_i = \frac{665}{729} = 0{,}912.$$

Как видно, полученное значение вероятности сильно превышает заданное, так как вероятность нахождения в очереди больше трех машин равна $1 - 0{,}912 = 0{,}088$. Испытаем случай $m = 4$. Аналогично находим:

$$p_0 = 0{,}130; \quad p_1 = 0{,}260; \quad p_2 = 0{,}260; \quad p_3 = 0{,}173; \quad p_4 = 0{,}087;$$

$$p_5 = 0{,}043; \quad p_6 = 0{,}021; \quad p_7 = 0{,}011; \quad p_8 = 0{,}005;$$

$$p(r \leqslant 4) = \sum_{i=0}^{8} p_i = 0{,}990.$$

Вероятность нахождения в очереди более четырех машин равна $1 - 0{,}990 = 0{,}01$, и, таким образом, для удовлетворения поставленного условия достаточно четырех колонок.

Автоматическая телефонная станция. Пусть станция обеспечивает не более 120 переговоров одновременно. Средняя длительность разговора 1 мин, а вызовы поступают в среднем через 0,5 с. Рассматривая станцию как систему с отказами, определим среднее число занятых каналов $k_{ср}$, относительную пропускную способность q и среднее время пребывания вызова на станции (с учетом того, что разговор может и не состояться) $t_{ср}$.

Параметры станции $\mu = \frac{1}{60}$; $\lambda = \frac{1}{0,5} = 2$; $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 120$; $m = 120$. Так как число состояний велико, воспользуемся соотношением

$$k_{\text{ср}} = \alpha \frac{R(m-1, \alpha)}{R(m, \alpha)} = 120 \frac{R(119, 120)}{R(120, 120)},$$

где

$$R(119, 120) = \Phi\left(\frac{119 + 0,5 - 120}{\sqrt{120}}\right) + 0,5 = \Phi(-0,046) + 0,5 = -\Phi(0,046) + 0,5;$$

$$R(120, 120) = \Phi\left(\frac{120 + 0,5 - 120}{\sqrt{120}}\right) + 0,5 = \Phi(0,046) + 0,5.$$

По табл. 9 с помощью интерполирования находим $\Phi(0,046) = 0,018$, следовательно:

$$R(119,120) = -0,018 + 0,5 = 0,482;$$
$$R(120,120) = 0,018 + 0,5 = 0,518.$$

С учетом полученных значений имеем:

$$k_{\text{ср}} = 120 \frac{0,482}{0,518} = 112; \quad q = \frac{k_{\text{ср}}}{\alpha} = 0,931; \quad t_{\text{ср}} = \frac{K_{\text{ср}}}{\lambda} = \frac{112}{2} = 56 \text{ с}.$$

Обслуживание станков. Два рабочих обслуживают группу из шести станков. Остановка каждого работающего станка происходит в среднем каждые полчаса. Процесс наладки занимает в среднем 10 мин. Определить среднюю занятость рабочих, абсолютную пропускную способность и среднее количество неисправных станков.

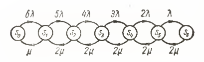


Рис. 284. Граф системы обслуживания станков.

Возможные состояния системы обслуживания следующие: s_0 — все станки работают, рабочие не заняты; s_1 — один станок остановился и один рабочий занят; s_2 — два станка остановились, двое рабочих заняты; s_i — i станков остановились, два из них настраивают, $i-2$ ждут очереди ($i = 3, 4, 5, 6$). Граф системы показан на рис. 284, где $\lambda = 2$ интенсивность потока требований (2 станка в час); $\mu = 6$ — интенсивность обслуживания (6 станков в час), а уравнения для стационарного режима имеют вид:

$$-6\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \quad 6\lambda p_0 - (5\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0;$$
$$5\lambda p_1 - (4\lambda + 2\mu) p_2 + 2\mu p_3 = 0; \quad 4\lambda p_2 - (3\lambda + 2\mu) p_3 + 2\mu p_4 = 0;$$
$$3\lambda p_3 - (2\lambda + 2\mu) p_4 + 2\mu p_5 = 0; \quad 2\lambda p_4 - (\lambda + 2\mu) p_5 + 2\mu p_6 = 0;$$
$$\lambda p_5 - 2\mu p_6 = 0.$$

Отсюда находим вероятности состояний:

$$p_1 = \frac{6\lambda}{\mu} p_0 = 2p_0; \quad p_2 = \frac{5}{3} p_0; \quad p_3 = \frac{10}{9} p_0; \quad p_4 = \frac{5}{9} p_0; \quad p_5 = \frac{5}{27} p_0;$$

$$p_6 = \frac{5}{162} p_0; \quad \left(1 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{162}\right) p_0 = 1;$$

$$p_0 = \frac{162}{1061} = 0,153.$$

Среднее число занятости рабочих определяется математическим ожиданием распределения налаживаемых станков, т. е.

$$p_1 + 2(p_2 + \cdots + p_6) = p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 2(1 - 2p_0) = \\ = 2(1 - 2 \cdot 0,153) = 1,388.$$

При интенсивности обслуживания $\mu = 6$ среднее число станков, обслуживаемых в единицу времени, т. е. абсолютная пропускная способность $u_{\text{ср}}\mu = 1,388 \cdot 6 = 8,328$. Среднее число неисправных станков равно математическому ожиданию распределения станков, связанных с процессом обслуживания (налаживаются или ожидают очереди):

$$w_{\text{ср}} = 1 \cdot p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 = 12p_0 = \\ = 12 \cdot 0,153 = 1,836.$$

Этот пример является типичным для *замкнутых систем массового обслуживания* (интенсивность потока поступающих требований зависит от состояний самой системы). Графы всех процессов, рассмотренных в настоящей главе, имеют одинаковую структуру: все состояния можно вытянуть в цепочку, в которой соседние состояния связаны прямой и обратной связью. Аналогичными графами представляются биологические процессы изменения численности вида (популяции) животных. Поэтому их часто называют *процессами «гибели и размножения»*.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Среднее число вызовов, поступающих на телефонную станцию за минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 мин поступит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

2. Перед станком установлен бункер, в который поступают заготовки с интенсивностью $\lambda = 2$ заготовки/мин. Если в бункере уже находятся две заготовки, то очередная заготовка передается на другой станок. Вычислить основные вероятностные характеристики системы, если среднее время обслуживания 2 с.

3. Система обслуживания состоит из k каналов, причем время обслуживания в каждом канале распределено по экспоненциальному закону, характеризующимся интенсивностью обслуживания $\mu = 2$ требования/мин. В систему поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda = 4$ требования/мин.

а) Определите вероятность того, что при $k = 3$ число требований в очереди будет равно числу каналов; не больше числа каналов?

б) Какое должно быть число каналов обслуживания k, чтобы длина очереди не больше, чем в одном случае из 100, могла превышать k.

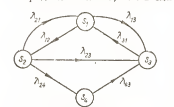


Рис. 285. Граф марковского процесса к задаче 6.

4. Линия связи содержит три канала, причем вызовы принимаются при наличии хотя бы одного свободного канала, а если все каналы заняты, то вызов получает отказ. Интенсивность потока $\lambda = 0,8$ вызовов/мин, средняя продолжительность разговора 1,5 мин. Найдите вероятности всех состояний, абсолютную вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

5. Рабочий обслуживает группу из трех станков, каждый из которых останавливается в среднем 2 раза. Среднее время наладки станка составляет 10 мин. Определите:

а) вероятности всех состояний системы;

б) абсолютную пропускную способность рабочего;

в) среднее количество неисправных станков.

6. Составьте и решите уравнения Колмогорова для марковского процесса, заданного графом на рис. 285.

6. НАДЕЖНОСТЬ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ

1. Определение надежности. Проектирование сложных систем немыслимо без учета и анализа надежности. Недостаточная надежность может привести не только к чрезмерным эксплуатационным издержкам (ремонт и восстановление), но и к более тяжким последствиям (невыполнение задачи, опасные ситуации, аварии). Методы теории вероятностей и математической статистики позволяют устанавливать количественные показатели надежности, сравнивать различные варианты по этим показателям, упрощать и сокращать процесс выбора лучшего варианта проектируемой системы.

Надежность — это свойство системы сохранять свое качество (работоспособность). Основными составляющими надежности являются безотказность, ремонтоспособность (восстанавливаемость) и долговечность. В качестве количественных характеристик надежности чаще всего используют вероятность и среднее время безотказной работы, коэффициент готовности и т. п. Надежность системы зависит от ее состава и структуры, т. е. от количества и качества составных элементов и способов их объединения в системе. Источником ненадежности являются отказы элементов и системы в целом. Различают отказы постепенные, внезапные, самоустраняющиеся (сбои).

Очевидными средствами повышения надежности системы являются увеличение надежности элементов, а также *резервирование* (введение в систему избыточных элементов, которые должны заме-

нять выходящие из строя, или функционировать параллельно). В резервированных системах *восстановление* (ремонт отказавшего элемента или пополнение резерва) может производиться немедленно после отказа или только после того, как все резервные элементы исчерпаны. Соответственно различают *восстанавливаемые (обслуживаемые)* и *невосстанавливаемые (необслуживаемые)* системы.

2. Вероятность безотказной работы. Вероятность безотказной работы в течение времени t определяется некоторой функцией $p(t)$, которую называют *законом надежности*. Вероятность того, что за время t элемент откажет, характеризует противоположное свойство — ненадежность и выражается как $F(t) = 1 - p(t)$. Очевидно, $F(t)$ можно рассматривать как функцию распределения отказов. Ее производная

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dp(t)}{dt}$$

есть плотность распределения времени безотказной работы или, как говорят, *плотность отказов*.

Смысл этой терминологии становится ясным, если исходить из определения показателей надежности путем наблюдения и статистической обработки отказов достаточно бо́льшого числа однородных элементов. Регистрируя время, которое каждый элемент проработал до отказа, можно определить число всех тех элементов n_t, отказ которых наступил за время t. Частное от деления n_t на число всех испытуемых элементов n дает приближенное значение функции распределения $F(t) \approx \frac{n_t}{n}$, которое тем более точно, чем больше число элементов n участвовало в испытании. Отсюда можно предположить, что если в системе имеется n однородных элементов, то ожидаемое число отказов за время t будет равно $n\,F(t)$, а ожидаемая частота появления отказов — $nf(t)$. Таким образом, $f(t)$ можно рассматривать как частоту отказов однородных элементов, отнесенную к общему их числу, что и выражается термином «плотность отказов».

Чаще всего в качестве показателя надежности принимают интенсивность отказов, равную отношению ожидаемой частоты появления отказов к ожидаемому числу работоспособных элементов, т. е.

$$\lambda(t) = \frac{nf(t)}{n - nF(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{p(t)} = -\frac{p'(t)}{p(t)} = -\frac{d}{dt}(\ln p(t)).$$

Отсюда можно выразить закон надежности $p(t)$ через интенсивность отказов:

$$\ln p(t) = -\int_0^t \lambda(t)\,dt; \quad p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right) = e^{-\Lambda(t)},$$

а также плотность отказов $f(t)$ и функцию распределения отказов:

$$f(t) = \lambda(t) p(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)}; \quad F(t) = 1 - p(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}.$$

Интенсивность отказов определяют также как *условную вероятность отказа элемента* в момент времени t при условии, что он до этого момента работал безотказно. В дальнейшем для краткости вероятность $p(t)$ безотказной работы в течение времени t будем называть просто *надежностью*, а вероятность $F(t) = 1 - p(t)$ — *ненадежностью*.

3. Экспоненциальный закон надежности. Распределение отказов является важной вероятностной характеристикой, для получения которой существуют два пути. Один из них заключается в обработке экспериментальных данных, получаемых при испытаниях на надежность массовых изделий или в результате наблюдения за работой различного оборудования в реальных условиях. Другой сводится к постулированию на основе физических соображений некоторого закона распределения отказов, который с определенной степенью приближения отражает истинное положение вещей. Чаще всего оба пути используются совместно.

В литературе рассмотрены многие типы распределений отказов. Наиболее простые и легко обозримые соотношения получаются, если принять интенсивность отказов постоянной, т. е. считать $\lambda(t) = \lambda$. Тогда: $\Lambda(t) = \lambda t$ и

$$p(t) = e^{-\lambda t}; \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

т. е. приходим к экспоненциальному закону распределения отказов. По аналогии с процессами массового обслуживания можно говорить о простейшем потоке отказов с интенсивностью λ. При этом вероятность появления за время t точно k отказов определяется распределением Пуассона $P_k(t)$, а вероятность появления самое большее k отказов $(k < n)$ — функцией распределения $F(k, t)$, которые были рассмотрены в (5. 2) и (5. 3):

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad F(k, t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Среднее время безотказной работы $t_{\text{ср}}$ равно его математическому ожиданию, т. е. обратно интенсивности отказов λ. Поэтому если закон распределения мало отличается от экспоненциального, то его можно рассматривать как экспоненциальный с параметром λ, равным обратной величине среднего времени безотказной работы элемента (это время определяется испытанием достаточно большого числа однородных элементов).

Хотя для определенных элементов экспоненциальный закон может и не иметь места, но, как показали проведенные исследования,

при замене отказавших элементов новыми сказывается эффект перемешивания возрастов, и отказы систем в целом будут подчиняться экспоненциальному закону. Можно также показать, что при экспоненциальном распределении отказов условная вероятность $\Lambda(t) = \lambda t$, как для восстанавливаемых, так и для невосстанавливаемых систем.

4. Простая (нерезервированная) система. Рассмотрим систему, в которой отказ каждого элемента происходит независимо и приводит к отказу всей системы. В смысле надежности ее можно представить как последовательное соединение элементов (рис. 286), хотя физически они могут быть соединены как угодно. В соответствии с правилом умножения вероятностей для независимых событий вероятность безотказной работы системы $p(t)$ равна произведению вероятностей p_i безотказной работы ее элементов $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Используя выражения для p_i из (2), имеем

V_1 — V_2 — … — V_n

Рис. 286. Последовательное соединение элементов (простая система)

$$p(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-\Lambda_i(t)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(t)\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \lambda_i(t)\,dt\right).$$

Отсюда следует, что интенсивность отказов простой системы равна сумме интенсивностей отказов ее элементов, т. е.

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t).$$

Рассмотрим простое устройство, состоящее из двух частей, причем одна из них имеет экспоненциальное распределение ($\lambda = \text{const}$), а другая характеризуется интенсивностью отказов $\lambda(t) = \lambda t$. Тогда

$$\Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda\,dt = \lambda t; \quad \Lambda_2(t) = \int_0^t \lambda t\,dt = \frac{1}{2}\lambda t^2;$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = e^{-\left(\lambda t + \frac{1}{2}\lambda t^2\right)} = e^{-\lambda t\left(1 + \frac{1}{2}t\right)}.$$

При экспоненциальном распределении интенсивность отказов простой системы $\lambda = \sum_i n_i \lambda_i$, где n_i и λ_i — соответственно количество и интенсивность отказов элементов данного типа. Среднее время безотказной работы $t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}$.

Пусть, например, усилитель промежуточной частоты радиоприемника содержит следующий набор компонентов: резисторы

($n_1 = 50$; $\lambda_1 = 0{,}30$), конденсаторы ($n_2 = 75$; $\lambda_2 = 0{,}33$), подстроечные конденсаторы ($n_3 = 14$; $\lambda_3 = 0{,}20$), усилительные электронные лампы ($n_4 = 8$, $\lambda_4 = 0{,}12$), мощные электронные лампы ($n_5 = 2$; $\lambda_5 = 0{,}14$), трансформаторы ($n_6 = 8$; $\lambda_6 = 0{,}30$), реле ($n_7 = 2$; $\lambda_7 = 0{,}50$), дроссели ($n_8 = 20$; $\lambda_8 = 0{,}30$), разъемы ($n_9 = 2$; $\lambda_9 = 0{,}20$), где интенсивности отказов компонентов даны в 10^{-5} отказов/час. Рассматривая усилитель как простую систему, найдем для него интенсивность отказов $\lambda = (50 \cdot 0{,}30 + 75 \cdot 0{,}33 + 14 \times 0{,}20 + 8 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}14 + 8 \cdot 0{,}30 + 2 \cdot 0{,}50 + 20 \cdot 0{,}30 + 2 \times 0{,}20) 10^{-5} = 53{,}59 \cdot 10^{-5}$ отказов/час. Среднее время безотказной работы $t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} = 1/53{,}59 \cdot 10^{-5} = 1866$ час. Вероятность безотказной работы усилителя в течение 100 час. равна $P(100) = \exp(-\lambda t) = \exp(-53{,}59 \cdot 10^{-3}) = 0{,}95$.

Выполнив аналогичные расчеты для всех блоков радиоприемника, можно найти его вероятностные характеристики.

5. Резервирование системы. Простейший способ резервирования заключается в параллельной работе n элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (*горячий резерв*), что соответствует их параллельному соединению (рис. 287). Отказ системы наступает только при отказе всех элементов.

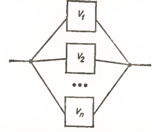


Рис. 287. Параллельное соединение элементов системы (резервированная система).

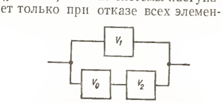


Рис. 288. Резервирование с помощью переключателя.

Если p_i — надежность i-го элемента ($i = 1, 2, \ldots, n$), то его ненадежность выражается как $1 - p_i$. Следовательно, ненадежность системы $1 - P = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n)$, а надежность

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) = \sum p_i - \sum_{i \neq j} p_i p_j + \sum_{i \neq j \neq k} p_i p_j p_k - \cdots$$

Пусть все элементы характеризуются постоянной интенсивностью отказов λ, т. е. $p_i = e^{-\lambda t} = p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; тогда

$$P = 1 - (1 - p)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k p^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k e^{-k\lambda t};$$

$$t_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k\lambda}.$$

Если ввод резервного элемента v_2 производится с помощью переключателя v_0 (рис. 288), то общая надежность резерва p_0p_2, а надежность системы $P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_0p_2) = p_1 + p_0p_2 - p_1p_0p_2$.

Эффективность резервирования на различных уровнях можно проиллюстрировать следующим простым примером. Пусть система состоит из двух последовательных блоков v_1 и v_2 (рис 289, *а*)

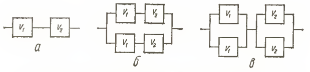


Рис. 289. Резервирование на различных уровнях:
а — исходная система; *б* — резервирование всей системы; *в* — резервирование блоков.

с надежностями p_1 и p_2. Общая надежность системы без резервирования $P = p_1p_2$. При резервировании всей системы (рис. 289, *б*) ее надежность $P' = 1 - (1 - P)^2 = P(2 - P) = p_1p_2(2 - p_1p_2)$. Если же резервировать отдельные **блоки** (рис. 289, *в*), то $P'' = p_1\,(2 - p_1)\cdot p_2(2 - p_2) = p_1p_2[4 - 2(p_1 + p_2) + p_1p_2]$. Разность $P'' - P' = 2p_1p_2(1 - p_1)(1 - p_2)$ всегда положительна, так как $p_1 < 1$ и $p_2 < 1$, следовательно, $P'' > P'$, т. е. эффективнее всего резервирование на самом низком уровне. Этот вывод справедлив для невосстанавливаемых систем, если в качестве показателя надежности принята вероятность безотказной работы.

Рис. 290. Резервированная система (*а*), ее орграф (*б*) и преобразование орграфа (*в*).

6. Надежность сложных систем. Приведенные результаты легко распространяются на более сложные структуры, которые можно представить в виде последовательно-параллельного соединения элементов. Надежность систем произвольной структуры с конечным числом состояний просто определяется с помощью алгебры событий (1. 7).

Отказ рассматривается как событие, нарушающее работоспособность элементов или системы, и ему приписывается значение 0. Отсутствие отказа означает работоспособность, которому соответствует значение 1. Каждый элемент, как и система в целом, может находиться в одном из двух положений, и в этом смысле они характеризуются логическими переменными, которые способны принимать

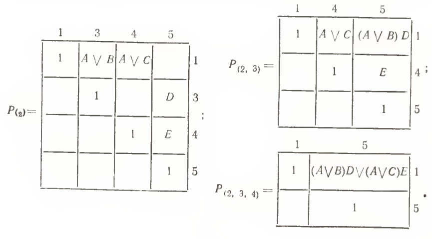
значения 0 или 1. Условие надежной работы (или отказов) системы обычно можно установить из блок-схемы, отражающей реальные связи между элементами, или из описания ее функционирования. Это условие можно представить в виде логической функции, которая получается либо непосредственно из описания функционирования, либо путем анализа графа системы.

Пусть, например, резервированная система задана блок-схемой (рис. 290, *а*), которой соответствует ориентированный граф (рис. 290, *б*). Матрица непосредственных связей графа (5. 3. 6) имеет вид:

$P =$

	1	2	3	4	5
1	1	A	B	C	
2		1	1	1	
3			1		D
4				1	E
5					1

Последовательным исключением узлов 2, 3 и 4 (5. 3. 7) приводим ее к матрице полных связей относительно узлов 1 и 5:



$P_{(2)} =$

	1	3	4	5
1	1	$A \vee B$	$A \vee C$	
3		1		D
4			1	E
5				1

;

$P_{(2,\ 3)} =$

	1	4	5
1	1	$A \vee C$	$(A \vee B) D$
4		1	E
5			1

;

$P_{(2,\ 3,\ 4)} =$

	1	5
1	1	$(A \vee B) D \vee (A \vee C) E$
5		1

.

Таким образом, логическая функция, определяющая условие функционирования, имеет вид $(A \vee B)D \vee (A \vee C)E$. К этому же результату можно прийти путем последовательного преобразования ориентированного графа (рис. 290, *в*).

Следующий шаг заключается в приведении логической функции к каноническому многочлену по правилам алгебры событий:

$$(A \vee B) D \vee (A \vee C) E = (A + B - AB) D + (A + C - AC) E -$$
$$- (A + B - AB)(A + B - AC) DE = AD + BD + AE + CE -$$
$$- (ABD + ACE + ADE) - BCDE + ABCDE.$$

Наконец, замещая каждую переменную соответствующими функциями надежности, получаем выражение для надежности системы:

$$P = p_A p_B + p_B p_D + p_A p_E + p_C p_E - (p_A p_B p_D + p_A p_C p_E + p_A p_D p_E) -$$
$$- p_B p_C p_D p_E + p_A p_B p_C p_D p_E.$$

Если все элементы характеризуются экспоненциальными законами надежности с одинаковыми интенсивностями отказов λ, то

$$P = 4e^{-2\lambda t} - 3e^{-3\lambda t} - e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t}.$$

Рассмотрим другой пример, когда условия безотказной работы заданы описанием функционирования. Пусть в системе, состоящей из четырех элементов A, B, C, D, отказ может наступить только при отказе не менее двух ее элементов, причем система сохраняет работоспособность при следующих комбинациях двух отказавших элементов: (A, B), (A, D), (C, D). Логическая функция надежного функционирования получается в виде: $ABCD \vee ABC \vee$ $\vee ABD \vee ACD \vee BCD \vee CD \vee BC \vee AB = CD \vee BC \vee AB$. Ей соответствует канонический многочлен $(CD + BC - BCD) +$ $+ AB - (CD + BC - BCD)AB = AB + BC + CD - BDC - ABC$. Если все элементы характеризуются одинаковыми интенсивностями отказов λ, то надежность системы

$$P = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}.$$

Сложные системы обычно бывают восстанавливаемыми (вводят профилактику), и поэтому целесообразнее говорить об *эффективности* сложных систем, а не о их надежности. В качестве критериев эффективности может использоваться, например, вероятность нормального функционирования, определяемая произведением вероятности безотказной работы на коэффициент готовности системы.

7. Резервирование как марковский процесс. До сих пор рассматривались системы, в которых каждый элемент функционирует независимо от состояний других элементов (горячий резерв). Иначе говоря, не делается никаких различий между основными и резервными элементами, и вероятность отказа любого из них определяется только интенсивностью отказов. Более сложные условия имеют место, когда резервное оборудование включают только при отказе

дублируемого им элемента, а сам резервный элемент до этого не функционирует *(холодный резерв)*, или же находится в состоянии готовности *(облегченный резерв)*. При холодном резервировании отказ резервного элемента до его вступления в работу не может наступить, а при облегченном резервировании интенсивность отказов резервного элемента до его введения в рабочий режим ниже, чем при функционировании взамен отказавшего элемента.

Анализ надежности резервированных систем в подобных случаях требует рассмотрения процесса замещения отказавших элементов во времени. Эта задача упрощается, если исходить из гипотезы о пуассоновском распределении отказов, и сводится к рассмотрению марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем. Предполагается, что система переходит из одного состояния в другое мгновенно при наступлении отказа и включении резервных элементов. Переключатель либо считается абсолютно надежным, либо рассматривается как постоянно функционирующий элемент системы с экспоненциальным распределением отказов.

Надежность системы без восстановления отказавших элементов с течением времени стремится к нулю, поэтому такие системы являются существенно нестационарными (предельный режим означает просто выход из строя системы). Для систем с восстановлением представляет интерес и стационарный режим, который характеризует динамическое равновесие потоков отказов и восстановлений.

Пусть в системе имеется один основной и $n-1$ элементов, находящихся в холодном резерве. Обозначим, как и ранее, через p_i надежность i-го элемента ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Основной элемент, проработав некоторое случайное время τ_1, выходит из строя, и на его место становится первый резервный элемент, который работает случайное время τ_2, и т. д. Последний резервный элемент, проработав случайное время τ_n, тоже выходит из строя, а с ним выходит из строя и вся система.

Пусть надежности элементов подчинены экспоненциальному закону, т. е. $p_i = e^{-\lambda_i t}$. Тогда надежность всей системы определяется приближенным выражением

$$P \approx 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})}{n!},$$

которое справедливо при малых интенсивностях отказов λ_i. Это выражение дает ясное представление о выигрыше, которого можно добиться, применяя холодное резервирование (сравните с (5)).

Рассмотрим теперь систему, состоящую из одного основного и $n-1$ резервных элементов, находящихся в облегченном резерве.

Предположим, что надежности элементов и в рабочем и в нерабочем состоянии подчиняются экспоненциальному закону и надежность элемента в рабочем состоянии не зависит от времени пребывания его в нерабочем состоянии. Пусть также надежности всех элементов одинаковы. Обозначим интенсивность отказов элемента в облегченном режиме через λ, а в рабочем — через Λ. При этих условиях для надежности системы можно получить приближенное выражение

$$P \approx 1 - \frac{\Lambda(\Lambda + \lambda) \ldots (\Lambda + (n-1)\lambda)}{n!} t^n,$$

которое справедливо при высоких надежностях элементов.

Ниже приводятся характерные примеры, иллюстрирующие применение теории марковских процессов к анализу надежности систем. Если потоки отказов не являются пуассоновскими, то задача усложняется, хотя часто немарковский процесс можно свести к марковскому увеличением числа состояний системы.

Рис. 291. Граф системы с холодным резервированием (элемент A замещается элементом B с помощью переключателя S).

8. **Включение резервного элемента замещением.** Рассмотрим холодное резервирование элемента A путем его замещения элементом B с помощью переключателя S. В зависимости от того, какой из этих трех элементов выходит из строя, система может находиться в одном из шести состояний, для которых граф системы показан на рис. 291 ($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{S}$ означают отказы элементов, а λ_A, λ_B, λ_S — интенсивности отказов). Система может функционировать только в трех состояниях: 1) ASB, 2) $A\bar{S}B$, 3) $\bar{A}SB$, а остальные состояния соответствуют отказу системы, из которых она может выйти только путем восстановления оборудования. Считая систему невосстанавливаемой и полагая $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$, записываем уравнения Колмогорова для рабочих состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \lambda_S)\,p_1; \quad \frac{dp_2}{dt} = \lambda_S p_1 - \lambda p_2; \quad \frac{dp_3}{dt} = \lambda p_1 - (\lambda + \lambda_S)\,p_3.$$

Решая эти уравнения при начальных условиях $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = p_3(0) = 0$, получаем:

$$p_1(t) = e^{-(\lambda+\lambda_s)t};$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda p_2 + \lambda_s e^{-(\lambda+\lambda_s)t}; \quad p_2(t) = e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\lambda_s)t};$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda + \lambda_S)\,p_3 + \lambda e^{-(\lambda+\lambda_s)t}; \quad p_3(t) = \lambda t e^{-(\lambda+\lambda_s)t}.$$

Надежность системы равна сумме надежностей ее рабочих состояний, т. е.

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-(\lambda+\lambda_s)t}.$$

Если отказы переключателя практически исключаются ($\lambda_s = 0$), то $P = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$. В сложных системах резервируемую замещением часть можно выделить и определить отдельно ее надежность, а затем определить надежность всей системы изложенными ранее методами. Пусть, например, искусственный спутник оборудован двумя передатчиками, один из которых резервный. Отказ системы означает потерю радиосвязи и возникает при выходе из строя обоих передатчиков (X) или при наличии радиопомех из-за солнечной активности (Y). Если λ — интенсивность отказов радиопередатчиков, то $p_X = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$. При интенсивности радиопомех φ вероятность того, что за время t помехи не возникнут равна $p_Y = e^{-\varphi t}$. Поэтому надежность системы $P = p_X p_Y = (1 + \lambda t)^{-(\lambda+\varphi)t}$.

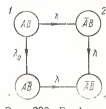


Рис. 292. Граф системы с облегченным резервом.

9. Система с облегченным резервом. Пусть основной элемент A при отказе заменяется резервным элементом B, причем интенсивность отказов работающего элемента равна λ, а интенсивность отказов резервного элемента до его включения $\lambda_0 (\lambda_0 < \lambda)$. Граф состояний системы показан на рис. 292, а уравнения Колмогорова имеют вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_0 + \lambda)\, p_1; \quad \frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 - \lambda p_2; \quad \frac{dp_3}{dt} = \lambda_0 p_1 - \lambda p_3.$$

Решая эту систему при начальных условиях $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = p_3(0) = 0$, имеем:

$$p_1(t) = e^{-(\lambda_0+\lambda)t};$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda e^{-(\lambda_0+\lambda)t} - \lambda p_2; \quad p_2(t) = (e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda_0+\lambda)t})\frac{\lambda}{\lambda_0};$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \lambda_0 e^{-(\lambda_0+\lambda)t} - \lambda p_3; \quad p_3(t) = e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda_0+\lambda)t}.$$

Надежность системы определяется как сумма надежностей ее рабочих состояний, т. е

$$P(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\lambda_0} e^{-(\lambda_0+\lambda)t}.$$

При $\lambda_0 \to 0$ этот результат совпадает со случаем холодного резервирования при абсолютно надежном переключении (8).

10. Восстанавливаемые системы. В специальной литературе рассмотрено много разнообразных задач, относящихся к восста-

навливаемым системам. Они имеют много общего с замкнутыми системами массового обслуживания (5. 11), причем интенсивность восстановления μ, как и интенсивность обслуживания (5. 5), обычно принимается постоянной, а поток отказов рассматривается как входящий поток.

Пусть, например, восстанавливаемая система состоит из двух параллельно работающих устройств. Она может находиться в трех состояниях: 1) оба устройства работают; 2) одно устройство работает, другое ремонтируется; 3) оба устройства ремонтируются (отказ системы). Граф системы показан на рис. 293, *а*, а система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -2\lambda p_1 + \mu p_2;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 2\lambda p_1 - (\lambda + \mu) p_2 + 2\mu p_3;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \lambda p_2 - 2\mu p_3.$$

Рис. 293. Граф восстанавливаемой системы (*а*) и его упрощение при определении надежности (*б*).

При нулевых начальных условиях $p_1(0) = 1;\ p_2(0) = p_3(0) = 0$ находим следующее решение:

$$p_1(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left[\mu^2 + 2\lambda\mu e^{-(\lambda+\mu)t} + \lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}\right];$$

$$p_2(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left[2\lambda\mu + 2\lambda(\lambda-\mu) e^{-(\lambda+\mu)t} - 2\lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}\right];$$

$$p_3(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left[\lambda^2 - 2\lambda^2 e^{-(\lambda+\mu)t} + \lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}\right].$$

Готовность системы $A(t)$ определяется вероятностью того, что система в некоторый момент времени t находится в рабочем состоянии. Для рассматриваемого примера такими состояниями являются 1 и 2, поэтому

$$A(t) = p_1(t) + p_2(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\left[\mu(2\lambda+\mu) + 2\lambda^2 e^{-(\lambda+\mu)t} - \lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}\right].$$

В стационарном режиме (при $t \to \infty$) готовность A означает долю времени, в течение которого система готова к действию, и называется коэффициентом готовности. Для нашего примера

$$A = \frac{\mu(2\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Коэффициент готовности A можно определить решением системы алгебраических уравнений (одно из них лишнее)

$$-2\lambda p_1 + \mu p_2 = 0; \quad 2\lambda p_1 - (\lambda+\mu) p_2 + 2\mu p_3 = 0;$$
$$\lambda p_2 - 2\mu p_3 = 0$$

совместно с нормировочным условием $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Надежность восстанавливаемой системы, т. е. вероятность отсутствия отказа в течение интервала времени t, определяется при условии, что система не возвращается из состояния отказа в рабочее состояние. Иначе говоря, учитываются лишь те процессы восстановления, которые не нарушают функционирования системы (рис. 293, *б*). Дифференциальные уравнения для определения функции надежности принимают вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -2\lambda p_1 + \mu p_2; \quad \frac{dp_2}{dt} = 2\lambda p_1 - (\lambda + \mu) p_2; \quad \frac{dp_3}{dt} = \lambda p_2.$$

Решив эти уравнения, найдем функцию надежности как сумму надежностей в состояниях 1 и 2, т. е. $P(t) = p_1(t) + p_2(t)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Двигатели, устанавливаемые на самолете, характеризуются вероятностью отказа q, причем отказ одного из них не влияет на вероятность отказа других двигателей. Для успешного осуществления полета, по крайней мере, половина из общего числа двигателей самолета должна быть исправна.

а) Найдите вероятность успешного полета самолетов с двумя и четырьмя двигателями.

б) Покажите, что при $0 < q < \frac{1}{3}$ более надежным является самолет с четырьмя двигателями, а при $\frac{1}{3} < q < 1$ — самолет с двумя двигателями.

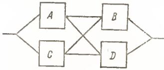


Рис. 294. Структурная схема системы к задаче 2.

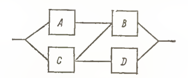


Рис. 295. Структурная схема системы к задаче 3.

2. Система с резервированием (рис. 294) содержит резервные блоки C и D, которые включаются по необходимости (блоки A и B первоначально исправны). Все блоки характеризуются одинаковой интенсивностью отказов λ.

а) Определите состояния системы и нарисуйте ее граф.

б) Запишите и решите уравнения Колмогорова для всех состояний.

в) Найдите надежность системы.

3. Найдите надежность системы (рис. 295), которая состоит из блоков A, B, C, D с одинаковыми надежностями p и теряет работоспособность при отказе двух блоков из четырех (в случаях, когда отказывают A и C или B и C или B и D), а также при отказе больше двух любых блоков.

4. Радиопередатчик характеризуется интенсивностью отказов $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного в недогруженном режиме, в котором интенсивность отказов $\lambda = 0,06 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Найдите следующие характеристики всей системы:

а) вероятность безотказной работы в течение $t = 100$ час;

б) среднюю наработку до первого отказа и интенсивность отказа.

7. ИНФОРМАЦИЯ И СВЯЗЬ

1. Сообщения. Система связи (рис. 296) предназначена для передачи сообщений от отправителя к получателю. Подлежащее передаче сообщение преобразуется в сигнал, который поступает в канал связи, а после приема подвергается обратному преобразованию в сообщение. Внешние помехи, воздействующие на канал связи, вносят в передаваемые сигналы искажения. Главная задача системы связи состоит в том, чтобы с достаточной точностью обеспечить взаимно-однозначное соответствие между переданным и принятым сообщением. Типичными примерами систем связи являются: телефонные сети, радиорелейные линии, телеметрические системы, космическая связь, радиовещание, телевидение. В общем случае любая передача сообщений может рассматриваться как система связи.

Сообщение называется *дискретным*, если оно представляет собой последовательность отдельных элементов (букв, цифр, символов). Дискретное сообщение, состоящее из n элементов, можно рассматривать как слово длины n, элементы которого принимают значения из конечного алфавита $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Обычно буквы алфавита $x_1, x_2, \ldots, x_m$ кодируются числами, преимущественно в двоичной системе счисления, а соответствующие им сигналы представляют собой последовательности импульсов определенной длительности. Используются *равномерные коды*, в которых буквы алфавита представляются комбинациями из одинакового числа элементов, и *неравномерные коды*, составленные из комбинаций различной длины. Примером равномерного кода может служить телетайпный код Бодо, а неравномерного — азбука Морзе, которые для первых семи русских букв имеют вид:

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
Код Бодо	10000	00110	01101	01010	11110	01000	00011
Азбука Морзе	·—	—·	——	——·	—·	·	···—

Непрерывное сообщение, в отличие от дискретного, представляется непрерывной функцией времени (например, при передаче звуков или изображений). Однако на практике спектр функций обычно ограничивается, т. е. считается, что спектральное разложение не содержит частот выше некоторой граничной частоты ω. В соответствии с *теоремой Котельникова* такие функции вполне определяются конечным числом значений, отсчитанных через интервалы

времени $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_0}$. Таким образом, передача непрерывного сообщения в том практически важном случае, когда оно может быть представлено функцией с ограниченным спектром, сводится, как и в случае дискретного сообщения, к передаче последовательности чисел.

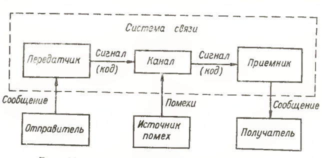


Рис. 296. Структурная схема системы связи

Из-за неизбежных помех передаваемая последовательность значений непрерывной функции претерпевает в системе связи искажения. Поэтому обычно используют дискретную шкалу передаваемых значений с таким расчетом, чтобы помеха не превосходила половины интервала между двумя соседними уровнями (рис. 297). Замена непрерывной шкалы дискретной называется *квантованием*, а представляемый последовательностью дискретных значений сигнал называется *квантованным*.

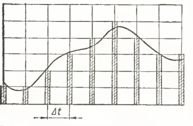


Рис. 297. Квантование непрерывного сигнала.

2. Статистическая мера информации. В качестве основной характеристики сообщения теория связи принимает величину, называемую *количеством информации*. Это понятие не затрагивает смысла и важности передаваемого сообщения, а связано со степенью его неопределенности.

Пусть алфавит состоит из m букв, каждая из которых может служить элементом сообщения. Количество возможных сообщений длины n равно числу перестановок с неограниченными повторениями (2. 10. 3), т. е.

$$N = m^n.$$

Для получателя все N сообщений являются равновероятными, а получение конкретного сообщения равносильно для него случай-

ному выбору одного из N объектов с вероятностью $\frac{1}{N}$. Ясно, что чем больше N, тем большая степень неопределенности характеризует этот выбор и тем более информативным можно считать сообщение. Итак, число N могло бы служить мерой информации. Однако с позиций техники связи естественно наделить эту меру свойством аддитивности, т. е. определить ее так, чтобы она была пропорциональна длине n сообщения (ведь при передаче и оплате сообщения, например телеграммы, важно не его содержание, а общее число элементов). Этому требованию отвечает логарифмическая функция, которая и принимается в качестве количества информации

$$I = \log N = n \log m.$$

Количество информации, приходящееся на один элемент сообщения, называется *энтропией*:

$$H = \frac{I}{n} = \log m.$$

В принципе безразлично, какое основание логарифма используется для определения количества информации и энтропии, так как в силу соотношения $\log_a m = \log_a b \log_b m$ переход от одного основания к другому сводится лишь к изменению единицы измерения. Чаще всего используют двоичные логарифмы, т. е. энтропию выражают как $H_0 = \log_2 m$. При этом единицу количества информации на один элемент сообщения называют *двоичной единицей* или *битом*. Так как из $\log_2 m = 1$ следует $m = 2$, то ясно, что 1 бит — это количество информации, которым характеризуется один двоичный элемент при равновероятных состояниях 0 и 1. Двоичное сообщение длины n содержит n бит информации. Единица количества информации, равная 8 битам, называется *байтом*. Если основание логарифма выбрать равным десяти, то энтропия выражается в десятичных единицах на элемент сообщения *(дитах)*, причем 1 дит $= \log_{10} 2$ бит $= 3{,}32$ бит.

Определим, например, количество информации, которое содержится в телевизионном сигнале, соответствующем одному кадру развертки. В кадре 625 строк, а сигнал, соответствующий одной строке, представляет собой последовательность из 600 случайных по амплитуде импульсов, причем амплитуда каждого импульса может принять любое из 8 значений с шагом в 1 В. Искомое количество информации

$$I = 625 \cdot 600 \log 8 = 1{,}125 \cdot 10^6 \text{ бит}.$$

Приведенная выше количественная оценка информации основана на предположении о равновероятности всех букв алфавита. В общем случае каждая из букв появляется в сообщениях

с различной вероятностью. Пусть на основании статистического анализа известно, что в сообщениях длины n буква x_i появляется n_i раз, т. е. вероятность ее появления $p_i = \frac{n_i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Все буквы алфавита составляют полную систему случайных событий, называемую *ансамблем*, поэтому $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Число всех возможных сообщений длины n, в которые буква x_i входит n_i раз $(i = 1, 2, \ldots, m)$ определяется как число перестановок с повторениями из n элементов, спецификация которых $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. В соответствии с (2. 10. 3) имеем:

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Действуя аналогично предыдущему, находим количество информации

$$I = \log N = \log n! - (\log n_1! + \log n_2! + \cdots + \log n_m!).$$

При достаточно больших n это выражение можно преобразовать с помощью приближенной *формулы Стирлинга*:

$$\ln n! \approx n(\ln n - 1).$$

Воспользовавшись этой формулой и соотношением $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, получим:

$$I = \ln N = n(\ln n - 1) - \sum_{i=1}^{m} n_i(\ln n_i - 1) =$$

$$= n \ln n - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i = -n\left[-\ln n + \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\left(\ln \frac{n_i}{n} + \ln n\right)\right] =$$

$$= -n\left(-\ln n + \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n} + \ln n \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\right) = -n \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n_i}{n}.$$

Переходя к вероятностям и произвольным основаниям логарифмов, получаем *формулы Шеннона* для количества информации и энтропии:

$$I = -n \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i; \quad H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i.$$

В дальнейшем в выражениях для I и H всегда будем использовать логарифмы с основанием 2.

3. Свойства энтропии. При равновероятности букв алфавита $p_i = \frac{1}{m}$ и из общей формулы получаем

$$H = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = -\left(m \cdot \frac{1}{m}\right)(-\log m) = \log m.$$

В этом случае энтропия определяется исключительно числом букв m и по существу является характеристикой только алфавита. Если же буквы неравновероятны, то алфавит можно рассматривать как дискретную случайную величину, заданную статистическим распределением частот n_i $\left(\text{или вероятностей } p_i = \frac{n_i}{n}\right)$:

Буквы α_i	α_1	α_2	...	α_m
Частоты n_i	n_1	n_2	...	n_m

Такие распределения получают обычно на основе статистического анализа конкретных типов сообщений (например, русских или английских текстов, численных значений результатов измерений и т. п.). Поэтому, хотя формально в выражение для энтропии входят только характеристики алфавита, оно отражает статистические свойства некоторой совокупности сообщений.

Рис. 298. Графики функций $\log \frac{1}{p_i}$ и $-p_i \log p_i$.

На основании выражения

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{1}{p_i}$$

величину $\log \frac{1}{p_i}$ можно рассматривать как *частную энтропию*, характеризующую информативность буквы x_i, а энтропию H — как среднее значение частных энтропий. При малых p_i частная энтропия велика, а с приближением p_i к единице она стремится к нулю (рис. 298). Функция $-p_i \log p_i$ отражает вклад буквы x_i в энтропию H. Как видно, при $p_i = 1$ эта функция равна нулю,

затем возрастает до своего максимума и при уменьшении p стремится к нулю. Из условия

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(-p_i \log p_i) = -\log p_i - \log e = -\log p_i e = 0$$

находим $p_i e = 1$, где e — основание натуральных логарифмов. Таким образом, функция $-p_i \log p_i$ при $p_i = \frac{1}{e} = 0{,}37$ имеет максимум $\frac{1}{e} \log e = 0{,}531$.

Энтропия H — величина вещественная, неотрицательная и ограниченная, т. е. $H \geqslant 0$ $\Big($это свойство следует из того, что такими же качествами обладают все ее слагаемые $p_i \log \frac{1}{p_i}\Big)$. Энтропия равна нулю, если сообщение известно заранее (в этом случае каждый элемент сообщения замещается некоторой буквой с вероятностью, равной единице, а вероятности остальных букв равны нулю). Можно также показать, что энтропия максимальна, если все буквы алфавита равновероятны, т. е. $H_{\max} = \log m$.

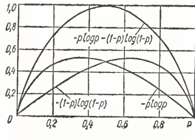


Рис. 299. График энтропии двоичных сообщений и ее составляющих.

Особый интерес представляют *бинарные сообщения*, использующие двухбуквенный алфавит (0,1). Так как при $m = 2$ вероятности букв алфавита $p_1 + p_2 = 1$, то можно положить $p_1 = p$ и $p_2 = 1 - p$. Тогда энтропия определяется соотношением:

$$H = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 = -p \log p - (1 - p) \log (1 - p),$$

график которого показан на рис. 299. Он может быть суммирован из двух графиков, определяющих вклад каждой из двух букв. Как видно, энтропия бинарных сообщений достигает максимального значения, равного 1 биту, при $p = 0{,}5$, и ее график симметричен относительно этого значения.

4. Энтропия при непрерывном распределении состояний **элементов**. Если элементы сообщения могут принимать значения на непрерывном интервале, то вместо конечного алфавита необходимо рассматривать бесконечное множество возможных состояний элементов, определяемое непрерывным распределением плотности вероятностей $w(x)$. Для обобщения формулы Шеннона разобьем интервал возможных состояний на равные непересекающиеся отрезки Δx и рас-

смотрим множество дискретных состояний $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_i = w(x_i)\Delta x (i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда

$$H = -\sum_{i=1}^{m} w(x_i)\Delta x \log w(x_i)\Delta x =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} w(x_i)\Delta x \log w(x_i) - \sum_{i=1}^{m} w(x_i)\Delta x \log \Delta x.$$

В пределе при $\Delta x \to 0$ с учетом соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1$

получим:

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\log w(x)\,dx - \log \Delta x$$

Первое слагаемое в этой сумме, называемое *приведенной энтропией*, целиком определяет информативность сообщений, обусловленных статистикой состояний их элементов. Величина $\log \Delta x$ зависит только от выбранного интервала Δx, определяющего точность квантования состояний, и при $\Delta x = \text{const}$ она постоянна.

Итак, энтропия и количество информации зависят от распределения $w(x)$. В теории связи большое значение имеет решение вопроса о том, при каком распределении обеспечивается максимальная энтропия $H(x)$. Можно показать, что при заданной дисперсии

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)\,dx = \text{const}$$

наибольшей информативностью сообщение обладает тогда, когда состояния элементов распределены по нормальному закону:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Так как дисперсия определяет среднюю мощность сигнала, то отсюда следуют практически важные выводы. Передача наибольшего количества информации при заданной мощности сигнала (или наиболее экономичная передача данного количества информации) достигается при такой обработке сигнала, которая приближает распределение к нормальному. В то же время, приписывая нормальное распределение помехе, обеспечивают ее наибольшую «информативность», т. е. учитывают ее пагубное воздействие на прохождение сигналов в самом худшем случае.

Если дисперсия σ^2 не ограничена, то, как показывает анализ, энтропия максимальна при условии, что состояния элементов внутри интервала их существования $a \leqslant x \leqslant b$ распределены по равномерному закону, т. е.

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 & \text{при } a > x, \ x > b. \end{cases}$$

Найдем значения энтропии в рассмотренных двух случаях. При заданной дисперсии

$$H(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \log\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right] dx - \log \Delta x =$$

$$= \log\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{x^2}{2\sigma^2} dx - \log \Delta x =$$

$$= \log\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\sqrt{2\pi e}\right).$$

При неограниченной дисперсии

$$H_p(x) = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \log\left(\frac{1}{b-a} - \Delta x\right) dx = \log\frac{b-a}{\Delta x},$$

но так как дисперсия равномерного распределения (см. табл. 10) $\sigma_p^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$, то $b - a = 2\sqrt{3}\sigma_p$, и, следовательно,

$$H_p(x) = \log\left(\frac{\sigma_p}{\Delta x} 2\sqrt{3}\right).$$

Сравнивая между собой сообщения с равномерным и нормальным распределением вероятностей при условии $H(x) = H_p(x)$, получаем соотношение

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi e}{6}\sigma^2 \approx 1{,}42\sigma^2.$$

Это значит, что при одинаковой информативности сообщений средняя мощность сигналов для равновероятного распределения их амплитуд должна быть на 42% больше, чем при нормальном распределении.

5. Условная энтропия. До сих пор предполагалось, что все элементы сообщения независимы, т. е. появление каждого данного элемента никак не связано с предшествующими элементами. Рассмотрим теперь два ансамбля $X = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и $Y = (y_1, y_2,$

..., y_s), которые определяются не только собственными вероятностями $p(x_i)$ и $p(y_j)$, но и условными вероятностями $p_{x_i}(y_j) = p_{y_j}(x_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, r$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. Так как вероятность совместного появления совокупности состояний $p(x_i, y_j) = p(x_i)\,p_{x_i}(y_j)$, то общая энтропия зависимых ансамблей X и Y определяется по формуле Шеннона

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(x_i, y_j)\log p(x_i, y_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(x_i)\,p_{x_i}(y_j)\log\left[p(x_i)\,p_{x_i}(y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} p(x_i)\log p(x_i)\sum_{j=1}^{s} p_{x_i}(y_j) - \sum_{i=1}^{r} p(x_i)\sum_{j=1}^{s} p_{x_i}(y_j)\log p_{x_i}(y_j).$$

С учетом соотношения $\sum_{j=1}^{s} p_{x_i}(y_j) = 1$ имеем

$$H(X, Y) = H(X) + H_X(Y),$$

где $H(X)$ — энтропия ансамбля X; $H_X(Y)$ — *условная энтропия* ансамбля Y при условии, что сообщения ансамбля X известны:

$$H_X(Y) = -\sum_{i=1}^{r} p(x_i)\sum_{j=1}^{s} p_{x_i}(y_j)\log p_{x_i}(y_j).$$

Если X и Y независимы, то $H_X(Y) = H(Y)$ и, следовательно, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. Если X и Y полностью зависимы, т. е. при появлении x_i неизбежно следует y_j, то $p(x_i, y_j)$ равна единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Поэтому $H_X(Y) = 0$ и, следовательно, $H(X, Y) = H(X)$, т. е. при полной зависимости двух ансамблей один из них не вносит никакой информации.

Полученное выражение для условной энтропии можно использовать и как информативную характеристику одного ансамбля X, элементы которого взаимно зависимы. Положив $Y = X$, получим

$$H' = -\sum_{i=1}^{r} p(x_i)\sum_{j=1}^{s} p_{x_i}(x_j)\log p_{x_i}(x_j).$$

Пусть, например, алфавит состоит из двух элементов 0 и 1. Если эти элементы равновероятны, то $H_0 = \log m = \log 2 = 1$. При $p(0) = \frac{3}{4}$ и $p(1) = \frac{1}{4}$ имеем

$$H = -p(0)\log p(0) - p(1)\log p(1) = -\left(\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right) = 0{,}815.$$

В случае взаимной зависимости элементов, определяемой, например, условными вероятностями $p_0(0) = \frac{2}{3}$; $p_0(1) = \frac{1}{3}$; $p_1(0) = 1$ и $p_1(1) = 0$, условная энтропия

$$H' = -p(0)\,[p_0(0)\log p_0(0) + p_0(1)\log p_0(1)] - \\ - p(1)\,[p_1(0)\log p_1(0) + p_1(1)\log p_1(1)] = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right) = 0{,}685.$$

Легко показать, что энтропия при взаимно зависимых элементах всегда меньше, чем при независимых, т. е. $H' < H$.

6. Взаимная энтропия. Пусть ансамбли X и Y относятся соответственно к передаваемым и принимаемым сообщениям. Различия между X и Y обусловливаются искажениями сигналов и при отсутствии помех $H(Y) = H(X)$. Воздействие помех характеризуется условной энтропией $H_Y(X)$, так что получаемое потребителем количество информации на один элемент сообщения

$$E(X, Y) = H(X) - H_Y(X).$$

Величину $E(X, Y)$ называют *взаимной энтропией*. Очевидно, $E(X, Y) = E(Y, X)$. Если X и Y независимы (шумы в канале приводят к полному искажению сообщений), то $H_Y(X) = H(X)$ и $E(X, Y) = 0$. Если ансамбли X и Y полностью зависимы (шумы в канале отсутствуют), то $H_Y(X) = 0$ и $E(X, Y) = H(X) = H(Y)$.

Так как $H_Y(X) = H(X, Y) - H(Y)$, то

$$E(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y),$$

или

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p(x_i,\ y_j) \log \frac{p_{y_j}(x_i)}{p(x_i)}.$$

7. Избыточность сообщений. Чем больше энтропия, тем большее количество информации содержит в среднем каждый элемент сообщения. Пусть $H_1 < H_2$, тогда $I = n_1H_1 = n_2H_2$ и $\mu = n_2/n_1 = H_1/H_2$, т. е. при передаче одинакового количества информации сообщение тем длиннее, чем меньше его энтропия. Величина μ, называемая *коэффициентом сжатия*, характеризует степень укорочения сообщений при переходе к кодированию состояний элементов, характеризующимся большей энтропией. При этом доля излишних элементов оценивается *коэффициентом избыточности*

$$r = \frac{H_2 - H_1}{H_2} = 1 - \frac{H_1}{H_2} = 1 - \mu.$$

Так как $H' < H < H_0$, то обычно используют три коэффициента избыточности

$$r' = 1 - \frac{H'}{H}; \quad r'' = 1 - \frac{H}{H_0}; \quad r_0 = 1 - \frac{H'}{H_0},$$

называемые соответственно: r' — частная избыточность, обусловленная взаимосвязью; r'' — частная избыточность, зависящая от распределения и r_0 — полная избыточность. Эти три величины связаны зависимостью:

$$r_0 = r' + r'' - r'r''.$$

Так, для примера из (5) на основании полученных значений энтропий $H_0 = 1$; $H = 0{,}815$; $H' = 0{,}685$ имеем:

$$r' = 1 - \frac{0{,}685}{0{,}815} = 0{,}16; \; r'' = 1 - 0{,}815 = 0{,}18; \; r_0 = 1 - 0{,}685 = 0{,}31.$$

Русский алфавит, включая пропуск между словами, содержит 32 элемента, следовательно, $H_0 = \log 32 = 5$ бит. Анализ показывает, что с учетом неравномерности появления различных букв алфавита $H = 4{,}35$ бит, а с учетом зависимости двухбуквенных сочетаний $H' = 3{,}52$ бит. На основании этих данных получаем:

$$r' = 1 - \frac{3{,}52}{4{,}35} = 0{,}19; \quad r'' = 1 - \frac{4{,}35}{5} = 0{,}13; \quad r_0 = 1 - \frac{3{,}52}{5} = 0{,}30.$$

На самом деле вследствие зависимости между сочетаниями, содержащими две и больше букв, а также смысловой зависимости между словами, избыточность русского языка (как и других европейских языков) превышает 50%. Избыточность устраняется построением оптимальных кодов, которые укорачивают сообщения по сравнению с равномерными кодами. В то же время избыточность играет и положительную роль, так как благодаря ей сообщения менее уязвимы со стороны помех. Это обстоятельство используется при помехоустойчивом кодировании.

8. Эффективное кодирование. При кодировании каждая буква исходного алфавита представляется различимыми последовательностями, состоящими из кодовых букв (цифр). Если исходный алфавит содержит m букв, то для построения равномерного кода с использованием k кодовых букв необходимо удовлетворить соотношение $m \leqslant k^q$, где q — количество элементов в кодовой последовательности. Отсюда

$$q \geqslant \frac{\log m}{\log k} = \log_k m.$$

Для построения равномерного кода достаточно пронумеровать буквы исходного алфавита и записать их коды как q-разрядные

числа в k-ичной системе счисления. Например, при *двоичном кодировании* 32 букв русского алфавита используется $q = \log_2 32 = 5$ разрядов, на чем и основан телетайпный код. Кроме двоичных, наибольшее распространение получили *восьмеричные коды*. Пусть, например, необходимо закодировать алфавит, состоящий из 64 букв. Для этого потребуется 6 двоичных или 2 восьмеричных разряда. Буква с номером 13 получит соответственно коды 001101 или 15. Часто используются также *двоично-десятичные коды*, в которых цифры десятичного номера буквы представляются двоичными кодами. Так, для нашего примера буква с номером 13 кодируется как 0001 0011.

Ясно, что при различной вероятности появления букв исходного алфавита равномерный код является избыточным, так как его энтропия $\log_k m = H_0$ всегда больше энтропии H данного алфавита, т. е. информационные возможности такого кода используются не полностью. Устранение избыточности достигается применением неравномерных кодов, в которых буквы, имеющие наибольшую вероятность, кодируются наиболее короткими кодовыми последовательностями, а более длинные комбинации присваиваются редким буквам. Если i-я буква, вероятность которой p_i, получает кодовую комбинацию длины q_i, то средняя длина комбинации

$$q_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i.$$

Считая кодовые буквы равновероятными, определяем наибольшую энтропию закодированного алфавита как $q_{\text{ср}} \log m$, которая не может быть меньше энтропии исходного алфавита H, т. е. $q_{\text{ср}} \log m \geqslant H$. Отсюда имеем

$$q_{\text{ср}} \geqslant \frac{H}{\log m}.$$

При двоичном кодировании ($m = 2$) приходим к соотношению $q_{\text{ср}} \geqslant H$ или

$$\sum_{i=1}^{m} p_i q_i \geqslant -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i.$$

Чем ближе значение $q_{\text{ср}}$ к энтропии H, тем более эффективно кодирование. В идеальном случае, когда $q_{\text{ср}} \approx H$, код называют *эффективным*. Эффективное кодирование, устраняя избыточность сообщений, приводит к сокращению длины сообщений, а значит, позволяет уменьшить время их передачи или объем памяти, необходимой для их хранения.

При построении неравномерных кодов необходимо обеспечить возможность их однозначной расшифровки. В равномерных кодах

такая проблема не возникает, так как при расшифровке достаточно кодовую последовательность разделить на группы, каждая из которых состоит из q элементов. В неравномерных кодах можно использовать разделительный символ между буквами алфавита (так поступают, например, при передаче сообщений с помощью азбуки Морзе). Если же отказаться от разделительных символов, то следует запретить такие кодовые комбинации, начальные части которых уже использованы в качестве самостоятельной комбинации. Например, если 101 означает код какой-то буквы, то нельзя использовать комбинации 1, 10 или 10101.

Практические методы оптимального кодирования просты и основаны на очевидных соображениях. Прежде всего, буквы (или любые сообщения, подлежащие кодированию) исходного алфавита записываются в порядке убывающей вероятности. Упорядоченное таким образом множество букв разбивается на два подмножества так, чтобы суммарные вероятности этих подмножеств были примерно равны. Затем каждое подмножество снова разбивается на два подмножества с соблюдением того же условия равенства вероятностей. Такое разбиение продолжается до тех пор, пока в подмножествах не окажется только по одной букве кодируемого алфавита. При каждом разбиении буквам верхнего подмножества присваивается кодовый элемент 1, а буквам нижнего подмножества — 0. Например,

Рис. 300. Релейное дерево оптимального кода.

Буква x_i	Вероятность p_i	Код	Длина q_i	$p_i q_i$	$-p_i \log p_i$
x_1	0 25	1 1	2	0,5	0,50
x_2	0,25	1 0	2	0,5	0,50
x_3	0,15	0 1 1	3	0,45	0,41
x_4	0,15	0 1 0	3	0,45	0,41
x_5	0,05	0 0 1 1	4	0,2	0,22
x_6	0,05	0 0 1 0	4	0,2	0 22
x_7	0,05	0 0 0 1	4	0,2	0,22
x_8	0,05	0 0 0 0	4	0,2	0,22

$$q_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^{m} p_i q_i = 2{,}7; \quad H = -\sum_{l=1}^{m} p_i \log p_i = 2{,}7.$$

Как видно, $q_{\text{ср}} \approx H$, следовательно, полученный код является оптимальным. Рассмотренный метод известен как *метод Шеннона—*

Фано. Процесс его построения иллюстрируется с помощью релейного дерева, показанного на рис. 300.

9. Корректирующие коды. Для защиты от помех в связи и вычислительной технике используются *корректирующие коды*, которые основаны на введении избыточности. Обычно корректирующие коды являются двоичными и равномерными.

Ошибка в кодовой комбинации появляется вследствие замены одних элементов другими, причем *r-кратная ошибка* возникает при искажении r элементов. Например, если кодовая комбинация 0110111 принята как 0100110, то имеет место двукратная ошибка. Вообще различие между парой кодовых комбинаций выражается *расстоянием*, которое равно числу несовпадающих двоичных разрядов. Его можно также определить как число единиц в сумме этих комбинаций по модулю два: $0110111 + 0100110 = 0010001$. Если двоичным комбинациям длины q (равномерный код) сопоставить вершины q-мерного куба, то расстояние означает число ребер, отделяющих одну вершину от другой.

Корректирующие коды позволяют обнаруживать и исправлять ошибки. Ясно, что при использовании для кодирования букв исходного алфавита (или любых сообщений) всех 2^q-комбинаций любая ошибка останется незамеченной, так как искажающая буква будет воспринята как некоторая другая буква алфавита. Поэтому необходимо располагать избыточным набором кодовых комбинаций, что обычно достигается применением кодов большей длины по сравнению с минимально необходимой. Использованные для кодирования комбинации называют *разрешенными*, а избыточные—*запрещенными*.

Наименьшее расстояние между комбинациями данного кода называют *кодовым расстоянием*. Более полное представление о свойствах кода дает *матрица расстояний D*, элементы d_{ij} которой ($i, j = 1, 2, \ldots, m$) равны расстояниям между каждой парой из всех m разрешенных комбинаций. Например, код $x_1 = 000$; $x_2 = 001$; $x_3 = 010$; $x_4 = 111$, кодовое расстояние которого $d = 1$, представляется симметричной матрицей четвертого порядка:

$D =$

x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	1	3	x_1
1		2	2	x_2
1	2		2	x_3
3	2	2		x_4

Представление этого кода на трехмерном кубе показано на рис. 301, *а*, где зачерненные вершины соответствуют разрешенным комбинациям.

Ошибка может быть обнаружена, если разрешенная комбинация вследствие ее искажения переходит в запрещенную и не может совпасть с какой-либо другой разрешенной комбинацией. Ясно, что для обнаружения однократной ошибки данной комбинации необходимо, чтобы ее расстояние от любой другой комбинации было не меньше двух. В приведенном выше примере этому требованию отвечает только комбинация x_4, а ошибки, вызываемые переходами $x_1 \rightleftarrows x_2$ и $x_1 \rightleftarrows x_3$, код не обнаруживает. Для обнаружения всех r-кратных ошибок необходимо обеспечить условие $d \geqslant r + 1$. Так, код на рис. 301, *б* будет обнаруживать все однократные ошибки.

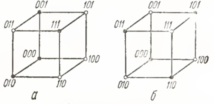


Рис. 301. Представление кода на трехмерном кубе.

Ошибка будет не только обнаружена, но и исправлена, если искаженная комбинация остается ближе к первоначальной, чем к любой другой разрешенной комбинации, т. е. должно быть $r < \frac{1}{2} d$ или $d \geqslant 2r + 1$. В общем случае для того, чтобы код позволял обнаруживать все ошибки кратности $r \leqslant r_0$ и исправлять все ошибки кратности $r \leqslant r_c$, его кодовое расстояние должно удовлетворять неравенству

$$d \geqslant r_0 + r_c + 1 \quad (r_0 \geqslant r_c).$$

Проиллюстрируем построение корректирующего кода на следующем примере. Пусть исходный алфавит, состоящий из четырех букв, закодирован двоичным кодом: $x_1 = 00$; $x_2 = 01$; $x_3 = 10$; $x_4 = 11$. Этот код использует все возможные комбинации длины 2, и поэтому не может обнаруживать ошибки ($d = 1$). Припишем к каждой кодовой комбинации один элемент 0 или 1 так, чтобы число единиц в нем было четное, т. е.

$$x_1 = 000, x_2 = 011, x_3 = 101, x_4 = 110.$$

Для этого кода $d = 2$, и, следовательно, он способен обнаруживать все однократные ошибки. Так как любая запрещенная комбинация содержит нечетное число единиц, то для обнаружения ошибки достаточно проверить комбинацию на четность (например, суммированием по модулю 2 цифр кодовой комбинации).

Чтобы код был способен и исправлять однократные ошибки, необходимо добавить еще не менее двух разрядов. Это можно сделать различными способами, например повторить первые две цифры:

$$x_1 = 00000, x_2 = 01101, x_3 = 10110; x_4 = 11011.$$

Матрица расстояний этого кода

$$D = \begin{array}{c|c|c|c|c|l} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline & & 3 & 3 & 4 & x_1 \\ & 3 & & 4 & 3 & x_2 \\ & 3 & 4 & & 3 & x_3 \\ & 4 & 3 & 3 & & x_4 \end{array},$$

т. е. $d \geqslant 3$, что отвечает приведенному выше неравенству. Принцип проверки на четность можно распространить и на процедуру исправления ошибок, но соответствующие методы основаны на более глубоких исследованиях. Разработаны также методы построения корректирующих кодов с учетом вероятностей появления букв алфавита, а значит, и вероятностей ошибок различных кратностей.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите энтропию непрерывной случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону,

$$w(x) = \begin{cases} ce^{-cx}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Найдите энтропию случайной величины, распределенной по закону

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Определите $H(X)$ и $H_X(Y)$, если $P(x_1, y_1) = 0{,}3$; $P(x_1, y_2) = 0{,}2$; $P(x_2, y_3) = 0{,}25$; $P(x_3, y_2) = 0{,}15$; $P(x_3, y_3) = 0{,}1$.

4. Определите $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, если $P(x_1, y_1) = 0{,}2$; $P(x_2, y_1) = 0{,}4$; $P(x_2, y_2) = 0{,}25$; $P(x_2, y_3) = 0{,}15$.

5. Определите $H(X)$ и $E(X, Y)$, если $P(x_1, y_1) = 0{,}3$; $P(x_1, y_2) = 0{,}2$; $P(x_2, y_3) = 0{,}1$; $P(x_3, y_2) = 0{,}15$; $P(x_3, y_3) = 0{,}25$.

6. Распределение вероятностей случайной величины x имеет вид: $p(x_1) = 0{,}1$; $p(x_2) = 0{,}1$; $p(x_3) = 0{,}1$; $p(x_4) = 0{,}7$. Определите число n значений случайной величины, при котором энтропия равномерного распределения будет равна энтропии $H(x)$ заданного распределения.

7. Постройте код Шеннона—Фано, если известны вероятности: $p(x_1) = 0{,}5$; $p(x_2) = 0{,}25$; $p(x_3) = 0{,}125$; $p(x_4) = 0{,}125$.

8. Постройте корректирующий код для передачи двух сообщений: а) обнаруживающий одну ошибку; б) обнаруживающий и исправляющий одну ошибку; в) обнаруживающий две и исправляющий одну ошибку.

Литература

Широко известны учебные пособия: Е. С. Вентцель «Теория вероятностей» (М., Физматгиз, 1962), Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей» (М., Физматгиз, 1961), В. С. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика» (М., «Высшая школа», 1972). Основные положения теории вероятностей глубоко и в доступной форме излагаются в книге В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» (М., «Мир», 1967). Для более

подготовленных читателей может представлять интерес классическая монография А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (М., «Наука», 1974), 1-е издание которой на русском языке опубликовано в 1936 г.

Из популярной литературы можно рекомендовать Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин «Элементарное введение в теорию вероятностей» (М., Гостехиздат, 1957), Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас «Вероятность» (М., «Мир», 1969).

Прикладные методы математической статистики рассмотрены в книгах: А. К. Митропольский «Техника статистических вычислений» (М., «Наука», 1971), Г. Хан, С. Шапиро «Статистические модели в инженерных задачах» (М., «Мир», 1969), Жюль Мот «Статистические предвидения и решения на предприятии» (М., «Прогресс», 1966), А. М. Длин и др. «Математическая статистика» (М., «Высшая школа», 1975). В приведенных работах можно найти таблицы распределений и функций, используемых при вычислениях.

По методам обработки наблюдений можно рекомендовать следующие книги: Т. А. Агекян «Основы теории ошибок для астрономов и физиков» (М., «Наука», 1972), Е. И. Пустыльник «Статистические методы анализа и обработки наблюдений» (М., «Наука», 1968), В. Д. Большаков «Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей» (М., «Недра», 1965), А. Д. Бродский, В. Л. Кан «Краткий справочник по математической обработке измерений» (М., Стандартгиз, 1960). Среди работ, посвященных контролю качества, особого внимания заслуживает монография Д. Коудена «Статистические методы контроля качества» (М., Физматгиз, 1961).

Процессы массового обслуживания подробно рассмотрены в книгах: Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко «Введение в теорию массового обслуживания» (М., «Наука», 1966), Т. Л. Саати «Элементы теории массового обслуживания и ее приложения» (М., «Советское радио», 1971), Л. А. Овчаров «Прикладные задачи теории массового обслуживания» (М., «Машиностроение», 1969), Д. Кокс, У. Смит «Теория очередей» (М., «Мир», 1966). С математическим аппаратом теории надежности и его применением к практическим задачам можно ознакомиться по книгам: «Справочник по надежности». Т. I (М., «Мир», 1969), Дж. Сандлер «Техника надежности систем» (М., «Наука», 1966), В. И. Нечипоренко «Структурный анализ и методы построения надежных систем» (М., «Советское радио», 1968). С единых позиций вопросы теории массового обслуживания и надежности изложены в монографии Е. С. Вентцель «Исследование операций» (М., «Советское радио», 1972).

Для первоначального знакомства с проблемами теории информации и связи можно рекомендовать монографии А. А. Харкевича «Очерки общей теории связи» (М., Гостехиздат, 1957) и «Борьба с помехами» (М., «Наука», 1965), которые вошли в том 3 «Избранных трудов» А. А. Харкевича (М., «Наука», 1973). Популярному изложению основ теории информации посвящены книги: А. М. Яглом и И. М. Яглом «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973) и Л. Бриллюэн «Наука и теория информации» (М., Физматгиз, 1960). Специальные вопросы теории информации и связи рассматриваются во многих учебных пособиях и монографиях, например: Р. Галагер «Теория информации и надежная связь» (М., «Советское радио», 1974), Н. И. Клюев «Информационные основы передачи сообщений» (М., «Советское радио», 1966), Л. Френкс «Теория сигналов» (М., «Советское радио», 1974), С. Стейн и Дж. Джонс «Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений» (М., «Связь», 1971).

Много полезных задач по теории вероятностей и ее приложениям можно найти в книгах: Б. Г. Володин и др. «Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей» (Л., Судпромгиз, 1962), В. Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» (М., «Высшая школа», 1975), В. И. Тихонов и др. «Примеры и задачи по статистической радиотехнике» (М., «Советское радио», 1970).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ



Редакторы
инж. *Н. М. Корнильева,*
А. М. Овчаренко
Переплет художника *Е. В. Попова*
Художественный редактор
В. С. Шапошников
Технический редактор
Е. О. Толстых
Корректоры
Л. А. Сергеева,
Л. В. Лобанова

Сдано в набор 15.IV. 1975 г. Подписано к печати 8.IX. 1975 г. Формат бумаги $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Объем: 44,64 усл. печ. л.; 47,71 уч.-изд. л. Тираж 35 000. Зак. № 5-165. БФ 05600. Цена 2 руб. 77 коп.

Издательство «Техніка», 252601, Киев, 1, ГСП, Пушкинская, 28.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе
Республиканского производственного
объединения «Полиграфкнига»
Госкомиздата УССР, Харьков,
Донец-Захаржевская, 6/8.





